2.3 Drehungen im $\mathbb{R}^n$ und die SO(n)

In Ergänzung zu unseren bereits angestellten Überlegungen bzgl. linearen Abbildungen (vgl. [33], S. ...) sowie orthogonalen Matrizen aus $\mathbb{R}^{(3,3)}$ (vgl. [31], S. ... und auch [33], S. ...) stellen wir uns zunächst für den einfach(st)en Fall der Dimension 2 die Frage nach der Gestalt jener Matrizen aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$, deren zugehörige lineare Abbildungen *distanzerhaltend* operieren. Man spricht *diesfalls* auch von *Isometrien*.

Ausgehend vom Ansatz

$$\varphi: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{y} = \varphi(\mathfrak{x}) = A \cdot \mathfrak{x} \ \text{ mit } \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

stellen wir also an φ (und damit in weiterer Folge an die Eintragungen a, b, c und d der *Koeffizientenmatrix* A von φ) die Forderung

$$|\mathfrak{x}| = |\varphi(\mathfrak{x})| \quad \forall \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^2,$$

was auf

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \right| \quad (*)$$

bzw.

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}$$

resp. nach Quadrieren und Vereinfachen auf

$$\underline{(a^2+c^2-1)} \cdot x^2 + \underline{2 \cdot (ab+cd)} \cdot xy + \underline{(b^2+d^2-1)} \cdot y^2 = 0$$

führt, womit $(*)$ nur dann $\forall (x|y) \in \mathbb{R}^2$ eintritt, wenn die <u>unterstrichenen Koeffizienten</u> sämtlich verschwinden, ergo

$$a^2+c^2 = 1 \ (1), \quad ab+cd = 0 \ (2) \quad \wedge \ b^2+d^2 = 1 \ (3)$$

gilt.

Nun sagen (1), (2) und (3) geometrisch interpretiert aber nichts weiter aus, alsdass die Spaltenvektoren von A normiert sind [(1) und (3)] sowie aufeinander normal stehen [(2)], was wegen (1) und (3) motiviert durch Polarkoordinaten den Ansatz $a = \cos\alpha$ und $c = \sin\alpha$ nahelegt sowie wegen (2) in weiterer Folge $b = -\sin\alpha$ und $d = \cos\alpha$ impliziert, was uns zur bekannten Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

führt (vgl. etwa [33], S. ...).

$\boxed{\text{Übungsaufgabe für den werten Leser.}}$ In Verallgemeinerung des soeben behandelten Spezialfalls $n = 2$ beweise man für beliebige Matrizen aus $\mathbb{R}^{(n,n)}$, dass die Forderung der Isometrie an die hinter der Matrix steckende lineare Abbildung ebenso auf normierte und zueinander paarweise orthogonale Spaltenvektoren dieser Matrix führt, m.a.W. also sämtliche Isometrien des $\mathbb{R}^{(n,n)}$ durch orthogonale Matrizen vermittelt werden.

Dass es zur Festlegung einer Isometrie des $\mathbb{R}^2$ in sich nur eines einzigen Parameters (etwa den entsprechenden Drehwinkel α oder eine seiner Winkelfunktionen) bedarf, liegt (vgl. letzte Klammer) auf der Hand und bedarf keines weiteren Kommentars.

Eine Dimension höher sieht dies mit der räumlichen Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \kappa^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2 & -2\kappa\nu+2\lambda\mu & 2\kappa\mu+2\lambda\nu \\ 2\kappa\nu+2\lambda\mu & \kappa^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2 & -2\kappa\lambda+2\mu\nu \\ -2\kappa\mu+2\lambda\nu & 2\kappa\lambda+2\mu\nu & \kappa^2-\lambda^2-\mu^2+\nu^2 \end{pmatrix}$$

nicht mehr so einfach aus wie im Fall $n = 2$. Dies betrifft sowohl die Herleitung der Eintragungen von A (vgl. etwa [31], S. ... *ohne Verwendung von Quaternionen* oder [33], S. ... *unter Verwendung von Quaternionen*) als auch die Bedeutungen der involvierten Parameter κ, λ, μ und ν, welche einerseits durch $\kappa^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1$ $(**)$ untereinander gekoppelt sind und via

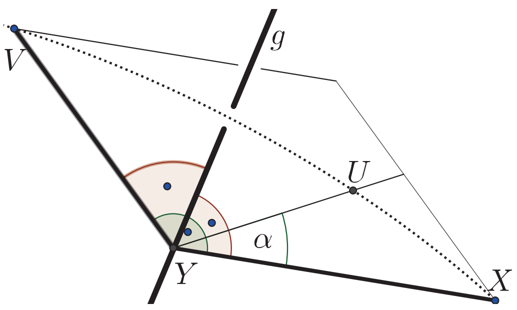
$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\overrightarrow{r}| = \sin\frac{\alpha}{2}$$

den Richtungsvektor $\overrightarrow{r}$ jener Gerade g durch den Koordinatenursprung angeben, um welche via φ gedreht wird, und zwar durch den Drehwinkel α.

Wegen $(**)$ besitzt A somit drei Freiheitsgrade, welche sich auch durch die geometrische Interpretation der hinter φ steckenden Drehung ergeben, da für einen Richtungsvektor der Drehachse g zwei der drei Komponenten ausreichen (weil man ja ungeachtet von der Bedeutung der Parameter λ, μ und ν dennoch o.B.d.A. von einem normierten Richtungsvektor ausgehen darf) und somit mit dem Drehwinkel insgesamt drei Freiheitsgrade bestehen, $\square$.

Steigen wir nun in den abstrakten $\mathbb{R}^n$ auf und beginnen mit der analytischen Seite, so hat die entsprechende Matrix A aus $\mathbb{R}^{(n,n)}$ zunächst n^2 Eintragungen. Nun liefert zunächst die Normierung aller Spaltenvektoren von A eine Restriktion in Form von n Gleichungen, welche jeweils n der n^2 Eintragungen untereinander koppeln. Überdies liefert die paarweise Orthogonalität ebenjener Spaltenvektoren über das Orthogonalitätskriterium $\binom{n}{2}$ Gleichungen, welche jeweils $2n$ der n^2 Eintragungen untereinander koppeln, womit für die Anzahl f_n der Freiheitsgrade von A und somit auch der dahintersteckenden Isometrie φ demnach

$$f_n = n^2 - n - \binom{n}{2} = n\cdot(n-1) - \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}, \quad \text{ergo } \boxed{f_n = \tbinom{n}{2}} \text{ gilt.}$$



Zur Klärung der geometrischen Interpretation von f_n erinnern wir an die Herleitung der Darstellung von A in [31], S. 92f, woran wir anhand der linken Abbildung (geringfügig für unsere Zwecke gegenüber [31], S. 92 adaptiert) die Notwendigkeit einer eindeutig bestimmten Normalen auf die Trägergerade des Vektors $\overrightarrow{YX}$ – wobei $U = Y + \cos\alpha\cdot\overrightarrow{YX} + \sin\alpha\cdot\overrightarrow{YV}$ das Bild von X unter φ ist – in jenem *affinen Raum* $\mathcal{U}$ erkennen, bei welchem es sich um ein (durch den Vektor $\overrightarrow{OY}$) translatiertes Bild des orthogonalen Komplements $\mathcal{D}^\perp$ des **Drehraums** $\mathcal{D}$

(in Verallgemeinerung der Drehachse g im $\mathbb{R}^3$ bzw. des Drehzentrums im $\mathbb{R}^2$) bezüglich des $\mathbb{R}^n$ handelt. Da die obig postulierte Existenz einer eindeutigen Normalen zwingend $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{D}^\perp = 2$ impliziert, muss für den **Drehraum** demnach $\dim \mathcal{D} = n-2$ gelten[2], wobei wir o.B.d.A. von einer *Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ von $\mathcal{D}$ ausgehen können. Bezüglich der insgesamt $n \cdot (n-2)$ Komponenten der $n-2$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$ aus $\mathcal{B}$ konstatieren wir, dass durch die Normierung der $n-2$ Vektoren ebenso $n-2$ Restriktionsgleichungen zwischen je n der $n \cdot (n-2)$ Komponenten resultieren. Außerdem ergeben sich aus der paarweisen Orthogonalität der $n-2$ Vektoren $\binom{n-2}{2}$ Restriktionsgleichungen zwischen je $2n$ der $n \cdot (n-2)$ Komponenten, womit die Anzahl der Freiheitsgrade f_n von φ aus geometrischer Sicht inkl. Beachtung des Drehwinkels α also

$$f_n = n \cdot (n-2) - (n-2) - \binom{n-2}{2} + 1$$

bzw. vereinfacht

$$f_n = n \cdot (n-2) - (n-2) - \frac{(n-2) \cdot (n-3)}{2} + 1$$

resp.

$$f_n = \frac{(n-2)}{2} \cdot (2n - 2 - n + 3) + 1 = \frac{(n-2) \cdot (n+1)}{2} + 1 = \frac{n^2 - n - 2 + 2}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2},$$

ergo

$$\boxed{f_n = \tbinom{n}{2}} \text{ gilt, } \square.$$

BEMERKUNGEN:

- Wegen
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$
(was der kleine GAUSS ja der Anekdote nach bereits im zarten Alter von acht Jahren für $n = 100$ zu erkennen vermochte, vgl. etwa [20]) und der sich daraus unmittelbar ergebenden Formel
$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$
ist die Dimension (in unserem Zusammenhang ein ebenso gebräuchlicher Begriff für die Anzahl der Freiheitsgrade) der $SO(n)$ also gleich der Summe der Dimensionen aller unter dem $\mathbb{R}^n$ liegenden $\mathbb{R}^k$ (ergo der natürlichen Zahlen von 1 bis $n-1$).

- Für den Fall $n = 3$ ergibt sich über die sogenannten drei EULERschen Winkel eine mögliche Festlegung von orthogonalen Abbildungen des Anschauungsraums in sich, nähere Details dazu entnehme man [21], S. 301ff!

- Ebenso für den Fall $n = 3$ sei ergänzend zu den soeben erwähnten EULERschen Winkel auch noch auf die alternative Verwendung der CARDAN-Winkel (ebenso drei an der Zahl) hingewiesen und für Details auf [25], S. 318f verwiesen!

[2]Dies impliziert insbesondere für $2 \leq n \leq 4$ die Drehung um einen Punkt bzw. eine Gerade bzw. eine Ebene(!) im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$.

[19] Hohenberg, Fritz (1956): Konstruktive Geometrie für Techniker. Springer, Wien.

[20] Kehlmann, Daniel (2005): Die Vermessung der Welt. Rowohlt, Reinbek.

[21] Knörrer, Horst (1996): Geometrie. Vieweg, Braunschweig.

[22] Kowol, Gerhard (2009): Projektive Geometrie und Cayley-Klein Geometrien der Ebene. Birkhäuser, Boston.

[23] Köhler, Günter (2006): Analysis. Heldermann, Lemgo.

[24] Krickeberg, Klaus und Herbert Ziezold (1995^4): Stochastische Methoden. Springer, Berlin.

[25] Meyberg, Kurt und Peter Vachenauer (1995^3):
Höhere Mathematik 1. Springer, Berlin.

[26] Paukert, Herbert (1998): Ein Fenster zum ICH. öbv&hpt, Wien.

[27] Perron, Oskar (1933): Algebra II. De Gruyter, Berlin.

[28] Rademacher, Hans und Otto Töplitz (1933^2): Von Zahlen und Figuren. Springer, Berlin.

[29] Resel, Robert (2000^2): Vollständige Lösungen zum Kapitel Wiederholung, Vertiefung und Ergänzung des Lehrbuchs der Mathematik 8 von Reichel-Müller-Hanisch. öbv&hpt, Wien.

[30] Resel, Robert (2005): Spezielle Beobachtungen zur Geometrie des Oktaeders. In: ÖMG Didaktik-Reihe (38), S. 118-129.

[31] Resel, Robert (2014): Reise zum Mittelpunkt der Mathematik. Logos, Berlin.

[32] Resel, Robert (2014): In 101 Abschnitten
um die mathematische Welt. Logos, Berlin.

[33] Resel, Robert (2015): 20000 Kurven unter der Enveloppe. Logos, Berlin.

[34] Richter-Gebert, Jürgen und Thorsten Orendt (2009): Geometriekalküle. Springer, New York/Berlin/Heidelberg.

[35] Rudin, Walter (1999): Reelle und komplexe Analysis. Oldenbourg, München/Wien.

[36] Scheid, Harald (1992): Wahrscheinlichkeitsrechnung. BI-Verlag, Mannheim.

[37] Roman, Tiberiu (1987): Reguläre und halbreguläre Polyeder. Harri Deutsch, Thun/Frankfurt.

[38] Wassell, Stephen R. (2002): Rediscovering a Family of Means. In: The Mathematical Intelligencer, Volume 24, Number 2 (S.58-65). Springer, New York.

[39] Werner, Dirk (1995): Funktionalanalysis. Springer, Berlin.