Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bildungsdirektion
Wien

ahs heustadelgasse wien

www.heustadelgasse.at

$\geq$ 51. Österreichische Mathematische Olympiade 2020

243 $(= 3^5)$ vermischte Aufgaben auf 32 $(= 2^5)$ Seiten

Kursleiter: Dr. Robert Resel

1. Ermittle
$$\left(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2\right) - \left(2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 100^2\right) + (4 + 8 + 12 + \ldots + 200).$$

2. Eine dreistellige Zahl, deren Hunderter-, Zehner- und Einerziffer aufeinanderfolgende, kleiner werdende natürliche Zahlen sind, ist um 21 kleiner als das Dreifache des Quadrates ihrer Ziffernsumme. Bestimme diese Zahl.

3. Man ermittle alle zweistelligen Zahlen, die genau so groß sind wie das Produkt aus ihrer Ziffernsumme und der Einerziffer.

4. Für die Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{N}^*$ gilt $f(1) = 1996$ sowie
$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 \cdot f(n) \;\; \forall n > 1.$$
Ermittle den exakten Wert von $f(1996)$.

5. Beweise $\forall a \in \mathbb{R}^+$ sowie $\forall b \in \mathbb{R}^+$ die Ungleichung
$$4\left(a^3 + b^3\right) \geq (a + b)^3$$
und untersuche auch den Fall der Gleichheit.

6. Beweise: Ist $(n - 1, n + 1)$ ein Primzahlzwillingspaar, dann ist $n^2\left(n^2 + 16\right)$ durch 720 teilbar.

7. Ermittle vier Primfaktoren unter 100 von $3^{32} - 2^{32}$.

8. Beweise für alle rechtwinkligen Dreiecke mit den Kathetenlängen a und b sowie der Hypotenusenlänge c die Ungleichung

$$\left(a^2+b^2\right)^2 \geq (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

und untersuche auch den Fall der Gleichheit.

9. Ermittle (freilich ohne Taschenrechner)

$$\frac{1^4+2007^4+2008^4}{1^2+2007^2+2008^2}.$$

10. Es sei $x \in \mathbb{N}$ sowie $y \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y-z=12 \\ x^2+y^2-z^2=12 \end{array} \right\}.$$

Berechne alle möglichen Lösungstripel.

11. Ermittle alle sowohl positiven als auch negativen ganzzahligen Werte für n, sodass $n^2+20n+11$ eine Quadratzahl ist.

12. Ermittle (freilich ohne Taschenrechner)

$$\frac{2014^4+4\cdot 2013^4}{2013^2+4027^2}-\frac{2012^4+4\cdot 2013^4}{2013^2+4025^2}.$$

13. a und b seien von 0 verschiedene natürliche Zahlen sowie p eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl, sodass $a^2+p^2=b^2$ gilt. Beweise:

    (a) $12 \mid a$

    (b) $2(a+p+1)$ ist eine Quadratzahl.

14. Ermittle alle Paare positiver ganzer Zahlen (m,n), welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$n^2-6n=m^2+m-10$$

15. Ausgehend vom Quadrat $\square ABCD$ wird auf dessen Seite BC bzw. CD der Punkt E bzw. F so gewählt, dass $\measuredangle EAF=45°$ gilt und weder E noch F Eckpunkte des Quadrats sind. Die Gerade g_{AE} bzw. g_{AF} schneidet die Umkreislinie des Quadrats nebst A außerdem noch in G bzw. H. Beweise, dass $g_{EF} \parallel g_{GH}$ gilt.

16. Ermittle alle $x \in \mathbb{R}$, welche die Gleichung $\left\lfloor \dfrac{20}{x+18} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x+18}{20} \right\rfloor = 1$ erfüllen.

17. Ermittle alle Paare reeller Zahlen x und y, welche das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x+y=\dfrac{2}{|x|+x} \\ 7x+8y=\dfrac{2}{|y|+y} \end{array} \right\}$$

erfüllen.

18. Beweise, dass für jedes Lösungspaar (x, y) des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 3x^2y - y^3 \\ y = x^3 - 3xy^2 \end{array} \right\}$$

die folgende Beziehung gilt:

$$m_h(x, y) = 2 \cdot (x - y) \cdot m_q(x, y)^2$$

19. Ermittle alle positiven ganzen Zahlen a und b mit

$$\binom{ab+1}{2} = 2ab(a + b),$$

wobei

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-2)] \cdot [n-(k-1)]}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \quad \text{mit} \quad 0 \leq k \leq n.$$

20. x, y und z seien reelle Zahlen, deren Summe 0 ergibt, wobei jede der drei Zahlen nicht größer als 1 ist. Beweise die Ungleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz \leq 9$$

und untersuche auch den Fall der Gleichheit.

21. Ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, welche das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x - 2016} + \sqrt{y - 56} = 11 \\ x + y = 2193 \end{array} \right\}$$

erfüllen.

22. Bestimme alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, welche das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{c} xy = 20 \\ yz = 12 \\ x + y + z = 12 \end{array} \right\}$$

erfüllen.

23. Für welche Primzahl(en) p und welche von 0 verschiedene natürliche(n) Zahl(en) n gilt $n^2 + 8n + 6 = p - 1$?

24. Ermittle alle positiven ganzzahligen Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 - xy = 2009 \\ y^2 - x = 15 \end{array} \right\}.$$

25. Für $a \in \mathbb{R}_0{}^+$ und $b \in \mathbb{R}_0{}^+$ mit $ab \leq 1$ beweise man $\dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{a} \geq a + 1$.

26. Beweise, dass das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 25 \\ ax + by = 10 \end{array} \right\}$$

genau dann reell lösbar ist, wenn $a^2 + b^2 \geq 4$ gilt.

27. Löse: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}$

28. Löse: $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 2\sqrt{x}$

29. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + 4y = 21 \\ y^2 + 4x = 21 \end{array} \right\}.$$

30. Löse über $\mathbb{R}$: $\dfrac{|x^2-1|}{x-2} = x$

31. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} (x+y)^2 - 3(x+y) = 4 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \end{array} \right\}.$$

32. Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}^+$ mit $ab = 1$ beweise man $a^3 + b^3 + 1 \geq 2a + b^2$.

33. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^4 + y^4 = 17(x+y)^2 \\ xy = 2(x+y) \end{array} \right\}.$$

34. Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}^+$ beweise man $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$.

35. Ermittle jene $x \in \mathbb{N}^*$ sowie $y \in \mathbb{N}^*$, welche $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2003}$ erfüllen.

36. Ermittle alle Lösungstripel des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} xyz = 2002 \\ x + y + z = 42 \\ xy + xz = 377 \end{array} \right\}.$$

37. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} 2a^2 - 2ab + b^2 = a \\ 4a^2 - 5ab + 2b^2 = b \end{array} \right\}.$$

38. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^4 + y^3 = 9 \\ x^2 + y = 3 \end{array} \right\}.$$

39. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^3 = y^2 - 1 \\ x^2 = y + 1 \end{array} \right\}.$$

40. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x(y+41) = 2001 \\ (3x+2y) \cdot \dfrac{y}{2} = 2002 \end{array} \right\}.$$

41. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} y - 8 = \sqrt{\dfrac{x+y+8}{2}} \\ y + 5 = \sqrt{x + \dfrac{y}{2} + 5} \end{array} \right\}.$$

42. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x+y} + \sqrt{z} = 7 \\ \sqrt{x+z} + \sqrt{y} = 7 \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{x} = 5 \end{array} \right\}.$$

43. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x^3 + y^3 = 3 \\ x^9 + y^9 = 9 \end{array} \right\}.$$

44. Es sei $x \in \mathbb{N}^*$ sowie $y \in \mathbb{N}^*$ sowie $(x^3 - 198) \cdot \dfrac{y}{3} = 1999$. Ermittle $x \cdot y$!

45. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x + \dfrac{x}{y} = \dfrac{8}{3} \\ y - \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2} \end{array} \right\}.$$

46. Für $n \geq 11$ beweise man:

$$f(n) := \frac{(4 \cdot 1^4 + 1) \cdot (4 \cdot 3^4 + 1) \cdot (4 \cdot 5^4 + 1) \cdot ... \cdot [4 \cdot (2n-1)^4 + 1]}{(4 \cdot 2^4 + 1) \cdot (4 \cdot 4^4 + 1) \cdot (4 \cdot 6^4 + 1) \cdot ... \cdot [4 \cdot (2n)^4 + 1]} < \frac{1}{1000}$$

47. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 2 = (x+2)(y-2) \\ x^2 = 4\left(y^2 - 4y + x + 3\right) \end{array} \right\}.$$

48. Löse die Gleichung $8^x + 2 = 4^x + 2^{x+1}$.

49. Ermittle alle Lösungspaare des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{array} \right\}.$$

50. Löse die Gleichung $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1=0$.

51. Es seien a, b und k reelle Zahlen, wobei $0 \leq b \leq a$ gelte.

$$\text{Beweise: } \sqrt{a^2+k^2}-\sqrt{b^2+k^2} \leq a-b$$

52. Für $n \geq 4$ beweise man:

$$\left(4^2-4\right)\cdot\left(5^2-4\right)\cdot\left(6^2-4\right)\cdot\ldots\cdot\left(n^2-4\right) < 6\cdot\left(4^2-9\right)\cdot\left(5^2-9\right)\cdot\left(6^2-9\right)\cdot\ldots\cdot\left(n^2-9\right)$$

53. Löse die Gleichung $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)(x+11)+225=0$.

54. Dem Quadrat $\square ABCD$ wird auf seine Seite CD nach außen ein gleichseitiges Dreieck ΔDCE aufgesetzt. Ferner wird D an C gespiegelt, was F liefert. Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen g_{AE} und g_{BF}!

55. Anna schreibt die Zahlen von 16 bis 24 der Reihe nach auf einen Zettel, den ihr Bruder Erik derart in zwei Teile reißt, dass auf einem Teil genau eine Zahl mehr steht als auf dem anderen Teil. Bevor Anna sich so richtig ärgern kann, fällt ihr auf, dass die Summe der Zahlen auf beiden Streifenteilen gleich groß ist. Dies wirft für sie als Jungmathematikerin freilich die Frage auf, ob es noch andere Reihen aufeinanderfolgender Zahlen mit eben genau dieser Eigenschaft gibt.

    (a) Finde drei weitere solche Zahlenreihen, darunter auch jene mit der aktuellen Jahreszahl.

    (b) Beweise, dass jede derartige Zahlenreihe immer mit einer Quadratzahl beginnen muss.

56. Für welche Primzahlen p_1, p_2 und p_3 gilt $\dfrac{1}{11}=\dfrac{1}{p_1\cdot p_2}+\dfrac{1}{p_2\cdot p_3}+\dfrac{1}{p_1\cdot p_3}$?

57. Im Schuljahr 2018/19 fand in Deutschland das 27. Mal die Fürther-Mathematik-Olympiade statt, in Unterfranken wurde er damals das 20. Mal angeboten. Deshalb bildet Paul aus den Punkten $F(27|20)$ $M(2018|2019)$ und $O(0|0)$ das Dreieck ΔFMO ("F(Ü)MO-Dreieck").

    (a) Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks!

    (b) Beweise: Das F(Ü)MO-Dreieck wächst jedes Schuljahr um vier Flächeneinheiten.

58. Eine Zahl heißt "*leiwaund*", wenn sie sich als Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ($\neq 0$) schreiben lässt. Beweise, dass man durch Anhängen der Zahl 25 (nicht addieren!) an eine leiwaunde Zahl stets eine Quadratzahl erhält.

59. Im Quadrat $\square ABCD$ mit der Seitenlänge a wird jede Diagonale über C bzw. D hinaus um a verlängert, was die Punkte E und F erzeugt.

(a) Beweise: Das Viereck $ABEF$ ist ein gleichschenkliges Trapez.

(b) Berechne die Maße aller Innenwinkel von $ABEF$.

60. Im Parallelogramm $ABCD$ bezeichne M den Mittelpunkt der Seite AD sowie L den Mittelpunkt der Strecke CM. Welchen Bruchteil des Parallelogramms nimmt das Fünfeck $ABLCD$ ein?

61. Ein paar Tage nach seinem letzten Geburtstag kommt ein pensionierter Mathematiklehrer ins Grübeln. Sein aktuelles Alter ist eine Primzahl. Vor einem Jahr konnte er sein damaliges Alter als Produkt von drei verschiedenen Primzahlen schreiben. In einem Jahr wird sich sein Alter als Produkt aus dem Quadrat einer Primzahl und der dritten Potenz einer anderen Primzahl berechnen lassen. Wie alt ist der pensionierte Mathematiklehrer?

62. Eine natürliche Zahl z beginnt mit der Ziffer 1. Nimmt man diese 1 von der ersten Stelle und hängt sie an die verbliebenen Ziffern an, so entsteht eine neue Zahl y (Bsp.: $z = 5298 \ \Rightarrow \ y = 2985$). Ermittle die kleinste Zahl z, für welche $y = 3 \cdot z$ gilt.

63. Im Dreieck ΔABC schneidet die Winkelsymmetrale des Winkels $\measuredangle ACB$ die Seite AC im Punkt D. Ferner gilt $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{DC}$. Beweise, dass es sich bei ΔABC um den zehnten Teil eines regelmäßigen Zehnecks handelt.

64. Der Mittelwert von 2018 nicht unbedingt verschiedenen, positiven ganzen Zahlen zwischen 1 und 20 182 018 beträgt 2018.

    (a) Berechne die größtmögliche Zahl, die unter diesen 2018 Zahlen auftreten kann.

    (b) Ermittle die größtmögliche Zahl, wenn alle 2018 Zahlen paarweise verschieden sind.

65. Wir gehen von drei paarweise verschiedenen Punkten aus. Zeige, dass es je nach Lage dieser drei Punkte entweder unendlich viele oder genau drei Geraden gibt, von denen alle drei Punkte den gleichen Normalabstand haben.

66. Mit zwei natürlichen Zahlen wurden die folgenden Rechenoperationen durchgeführt:

    - Die Zahlen wurden addiert.
    - Die kleinere Zahl wurde von der größeren subtrahiert.
    - Die Zahlen wurden miteinander multipliziert.
    - Die größere Zahl wurde durch die kleinere dividiert.

    Die Summe der vier Resultate ergab 243. Ermittle alle möglichen Lösungspaare!

67. Prof. X schreibt eine natürliche Zahl n (< 50000) an die Tafel. Ein Schüler sieht sofort, dass n gerade ist. Ein anderer meint, dass n durch 3 teilbar sei. Ein dritter wiederum findet heraus, dass n ein Vielfaches von ist. Dies geht so weiter, bis schließlich der zwölfte Schüler sagt: "Die Zahl n besitzt auch den Teiler 13."
    Nach kurzem Nachdenken stellt der Lehrer am Ende fest: "Genau zwei der zwölf Aussagen waren falsch. Die beiden falschen Vermutungen sind unmittelbar hintereinander erfolgt."
    Begründe mit Hilfe dieser Äußerungen klar, welche Zahl Prof. X an die Tafel geschrieben haben muss.

68. Die Seiten eines dicken Buches werden beginnend mit Seite 1 fortlaufend durchnummeriert, wofür sage und schreibe 6877 Ziffern verwendet werden. Wie viele Seiten hat dieses Buch?

69. Länge und Breite eines rechteckigen Platzes weisen in Metern gemessen ganzzahlige Längen auf. Legt man den Platz mit quadratischen Platten à 1m^2 aus, dann ist die Anzahl der inneren Platten genau so groß als die Anzahl der am Rand liegenden Platten. Welche Abmessungen kommen für diesen Platz daher in Frage?

70. Ermittle alle durch 16 teilbaren natürlichen Zahlen mit der Ziffernsumme 12 sowie dem Ziffernprodukt 14.

71. Ermittle alle natürlichen Zahlen, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

    (a) Die Zahl ist neunstellig.
    (b) Die aus der ersten, zweiten und dritten bzw. vierten, fünften und sechsten resp. der siebten, achten und neunten Ziffer gebildeten Zahlen verhalten sich wie 1:3:5.
    (c) Die Zahl ist durch alle natürlichen Zahlen von 2 bis 10 teilbar.

72. Zerlege die Zahl 279 so in neun Summanden, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

    - Alle Summanden sind natürliche Zahlen.
    - Ordnet man sie der Größe nach, so unterscheiden sie sich benachbarte Summanden um jeweils die gleiche Zahl.

    Ermittle alle möglichen derartigen additiven Zerlegungen von 279 und begründe auch die Vollständigkeit der Lösung!

73. Beweise: Die via

$$z := 2020! \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + + \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020}\right)$$

    definierte Zahl (wobei $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$) ist durch 2021 teilbar.

74. Ermittle den Wert der Differenz

$$\begin{array}{c} 9081726351 \cdot 9081726357 \cdot 9081726360 \cdot 9081726352 \\ -9081726353 \cdot 9081726359 \cdot 9081726358 \cdot 9081726350 \end{array}$$

ohne Taschenrechner sowie ohne händisches(!) Ausrechnen.

75. Für $T(n) := \dfrac{n^3-1}{n^3+1}$ bilde man das Produkt $\wp := \prod_{n=2}^{100} T(n)$ und beweise, dass $\wp < \dfrac{2}{3}$ gilt (wiederum ohne Taschenrechner sowie ohne händisches Ausrechnen.).

76. Ermittle die Einerziffer von $3^{2019} + 5^{2020} + 7^{2021}$!

77. Beweise, dass die Summe der Quadrate von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nicht wieder eine Quadratzahl sein kann. Ist dies bei der Summe der Quadrate von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen möglich (Beweis!)?

78. Zeige, dass sich die Zahl 1 000 000 000 eindeutig als Produkt zweier natürlicher Zahlen anschreiben lässt, welche beide an der Einerstelle keine Null aufweisen.

79. Passend zur Jahreszahl zeige man, dass 2019^{2019} bzw. 2020^{2020} etwas mehr als 4 Millionen bzw. 16 Milliarden Teiler besitzt.

80. Ebenso passend zur Jahreszahl zeige man, dass 20^{19} bzw. 20^{20} exakt 780 bzw. 861 Teiler besitzt und berechne, für welches $n \in \mathbb{N}$ die Zahl 20^n exakt 2016 Teiler besitzt.

81. Ermittle alle durch 8 teilbaren natürlichen Zahlen mit der Ziffernsumme 10 sowie dem Ziffernprodukt 12.

82. Anna nennt ein Rechteck schön, wenn die Maßzahlen seiner Seiten natürliche Zahlen sind und die Maßzahlen seines Umfangs und seines Flächeninhalts übereinstimmen. Ermittle in diesem Sinne alle schönen Rechtecke.

83. Für welche natürlichen Zahlen a, b, c und d mit $b > c$ (0 nicht mitgerechnet!) gilt

$$2001 = (2+a) \cdot (0+b) \cdot (0+c) \cdot (1+d)?$$

Ermittle alle möglichen Lösungen!

84. Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 2001 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlicher Zahlen darzustellen.

85. Spiegelt man in einem konvexen Viereck $ABCD$ den Punkt $\left\{\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\right\}$ am Punkt $\left\{\begin{array}{c} B \\ C \\ D \\ A \end{array}\right\}$, so entsteht durch die gespiegelten Punkte ein neues Viereck. Den wievielfachen Flächeninhalt des Ausgangsvierecks weist das neue Viereck auf?

86. Die Bewohner des ÖMO-Planeten benutzen keine Finger zum Zählen, sondern deren Fühler. Da sie anatomisch mit weniger als zehn Fühlern ausgestattet wurden, rechnen sie nicht wie wir im dekadischen Zahlensystem, sondern benutzen ein Zahlensystem, dessen Ziffervorrat mit der Anzahl der ÖMO-Fühler übereinstimmt. In ebenjenem System gilt dann etwa

$$(12)_b \cdot (34)_b = (441)_b \,.$$

Wie viele Fühler hat denn nun ein ÖMO-Maner?

87. Maximum hat eine neue Rechenoperation erfunden, welche darin besteht, zwei Zahlen dergestalt eine dritte Zahl zuzuordnen, indem man das Produkt der beiden Ausgangszahlen um 1 vergrößert, was er als "maximieren" bezeichnet. Ausgehend von drei paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen größer als 1 maximiert Max zunächst die kleinste mit der mittleren und maximiert hernach das Resultat mit der größten der drei Zahlen, was ihn zum Resultat 2003 führt. Wie lauten die drei Ausgangszahlen von Maximum (Sind selbige eindeutig?)?

88. Im unteren Kalender von Februar 2020 (oder auch Februar 1992 bzw. Februar 2048) wurde ein (3×3)-Feld wie in der Abbildung markiert.

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	

   (a) Vergrößert man die kleinste Zahl in diesem Feld um 8 und multipliziert das Resultat mit 9, so erhält man exakt die Summe aller Zahlen aus dem Feld. Beweise, dass dies für jedes beliebige (3×3)-Feld einer Tabelle mit sieben Spalten gilt!

   (b) Finde einen ähnlichen Zusammenhang für (4×4)-Felder und beweise ihn!

89. Beweise: $$\frac{2\overbrace{66.............66}^{2004 \text{ Sechsen}}4}{4\underbrace{66.............66}_{2004 \text{ Sechsen}}2} = \frac{2\overbrace{66.............66}^{2005 \text{ Sechsen}}4}{4\underbrace{66.............66}_{2005 \text{ Sechsen}}2}$$

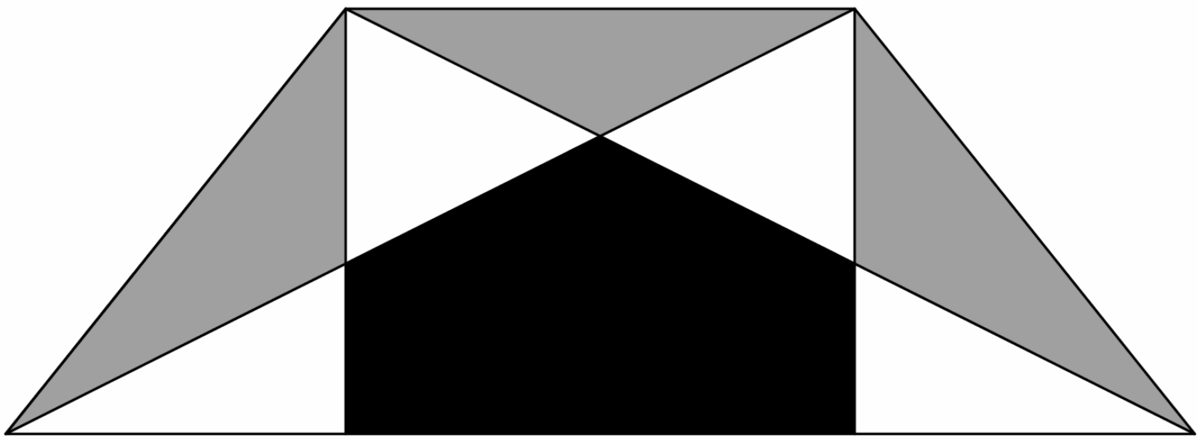
90. Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 105 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlicher Zahlen darzustellen.

91. Welche möglichst nahe bei 100 000 liegende natürliche Zahl hat genau 16 Teiler und ist durch 2008 teilbar?

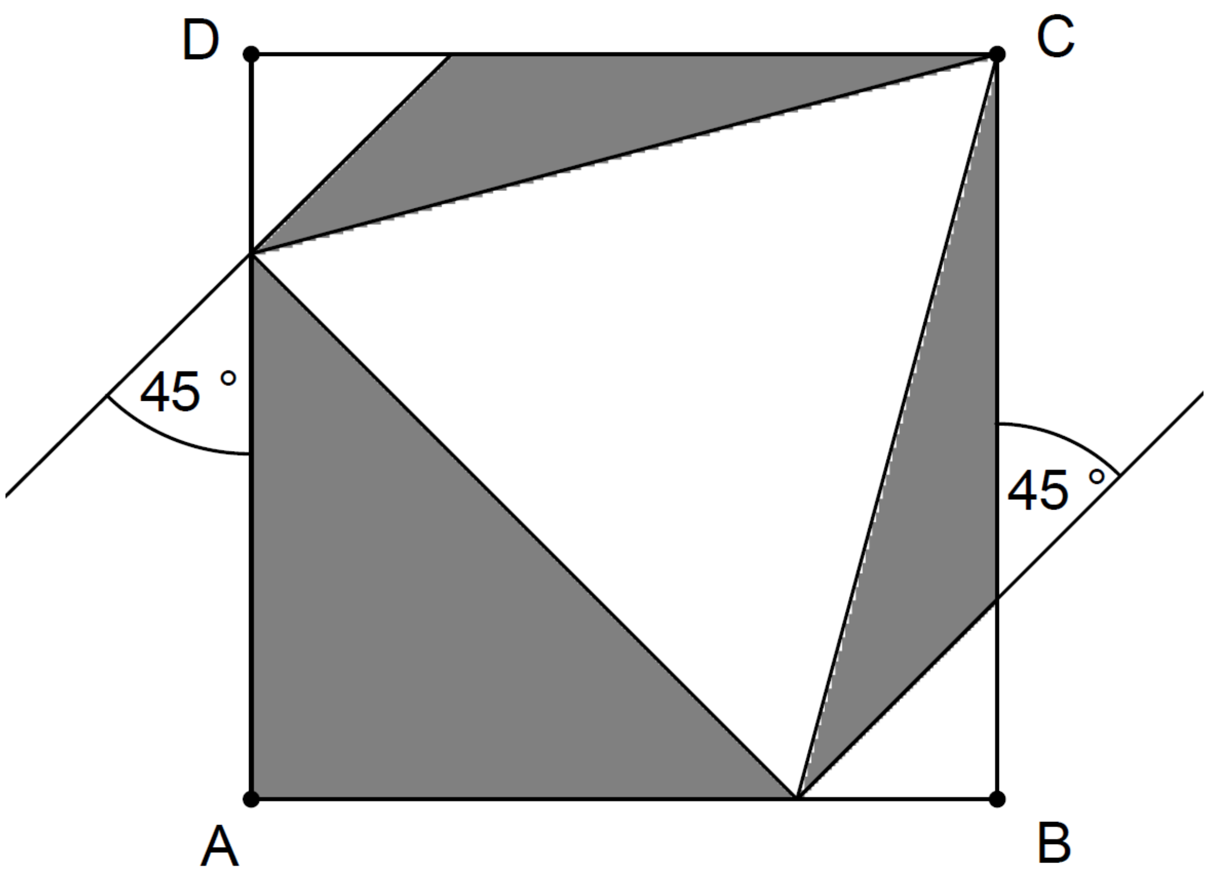
92. Die Summe von 2008 aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen ist eine Quadratzahl. Welchen kleinsten Wert kann die größte dieser 2008 Zahlen haben?

93. Ermittle die kleinste Zahl, die 18 Teiler hat.

94. Zeichnet man in einem gleichschenkligen Trapez sowohl die beiden Höhen durch die Endpunkte der kürzeren Parallelseite sowie die Diagonalen ein, so entstehen wie in der nachstehenden Abbildung illustriert sieben Dreiecke sowie ein Fünfeck.
Beweise, dass die drei gefärbten Dreiecke in Summe genau so viel Platz einnehmen als das ebenso gefärbte Fünfeck.



95. Einem Quadrat $\square ABCD$ wird ein gleichseitiges Dreieck mit einem Eckpunkt in C einbeschrieben (vgl. untere Abbildung). An den Ecken B und D werden (wie in der Abbildung illustriert) Dreiecke abgetrennt. Beweise, dass die drei gefärbten Dreiecke in Summe genau so viel Platz einnehmen als das gleichseitige Dreieck.



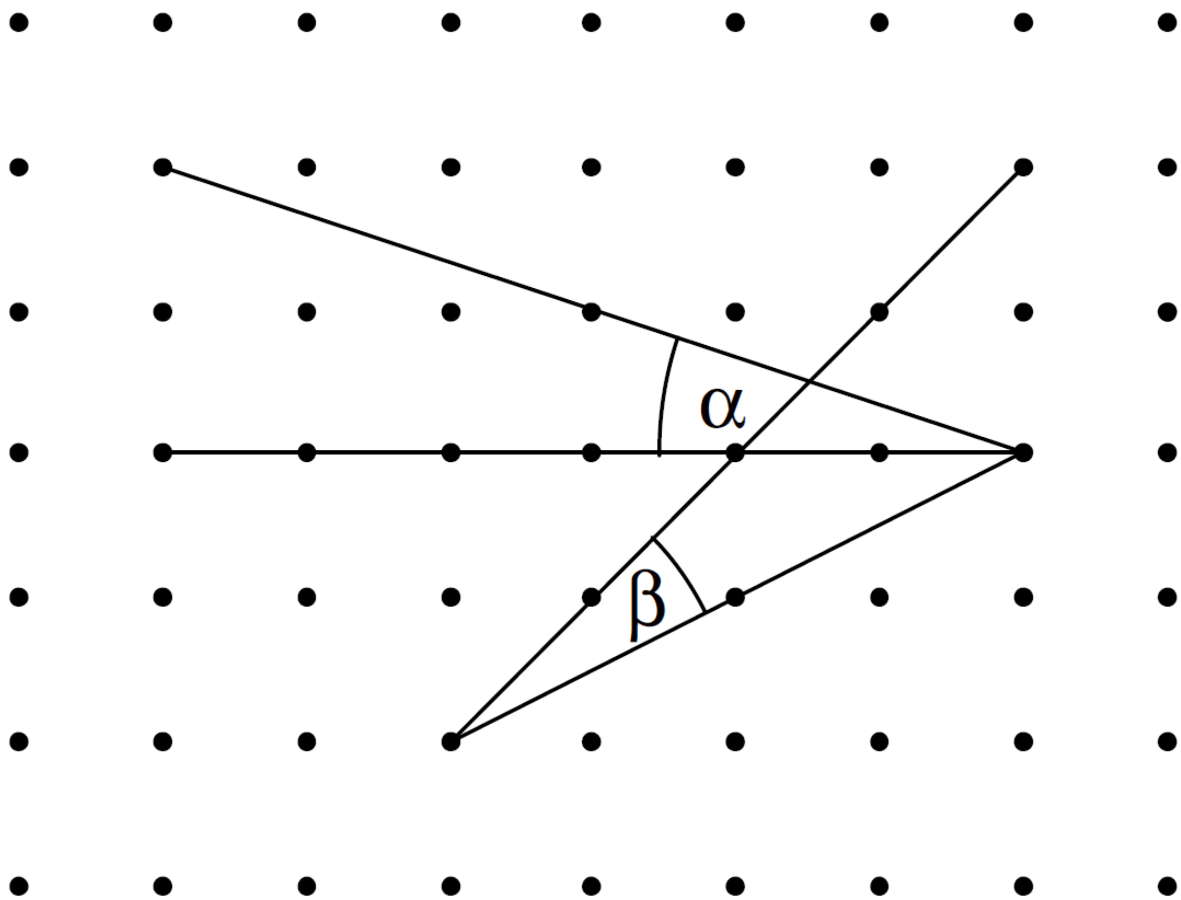
96. Ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(3|4)$ und $C(2|y)$ mit $y > 0$ weist einen Flächeninhalt von 5 Flächeneinheiten auf. Für welche/n Wert/e ist dies möglich?

97. Eine quadratische Platte wird vollständig in 255 Einheitsquadrate und ein größeres Quadrat zerschnitten. Welche Seitenlänge kann die Ausgangsplatte gehabt haben? Gib alle Möglichkeiten an.

98. Über den Seiten BC und CD eines Quadrats werden nach außen gleichschenklige Dreiecke ΔCBE und ΔDCF mit einem Winkel von je 30° an der Spitze errichtet. Beweise, dass die Normale auf CE durch B mit BE und EF ein gleichseitiges Dreieck begrenzt.

99. Ausgehend von $m \in \mathbb{N}$ lasse sich $2m$ als Summe zweier Quadratzahlen darstellen. Beweise, dass dies dann auch für m selbst gilt.

100. Im unten abgebildeten quadratischen Gitternetz beweise man die Kongruenz der eingezeichneten Winkel α und β.



101. Andi, Birgit, Clemens, Daniela und Elias schreiben die Zahlen von 1 bis 10 auf zehn verschiedene Zettel und werfen diese in eine Schüssel. Jedes Kind entnimmt ihr nun blind je zwei Zettel, addiert die entsprechenden Zahlen und meldet die Summe, was in der obig angegebenen Reihenfolge (außer Elias) auf 17, 16, 11 und 7 führt.

   (a) Welche Summe erhält denn nun Elias?

   (b) Wer hat welche Zettel gezogen?

102. Alexander betrachtet die zweistellige Zahl 60 sowie die zugehörige Quadratzahl $60 \cdot 60 = 3600$. Er stellt fest, dass die Quadratzahl von 60 genau zwei Stellen mehr aufweist als die Ausgangszahl 60. Ermittle alle weiteren natürlichen Zahlen, für die das auch gilt.

103. Ermittle alle Lösungstripel des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{c} xy + 1 = 2z \\ yz + 1 = 2x \\ xz + 1 = 2y \end{array} \right\}.$$

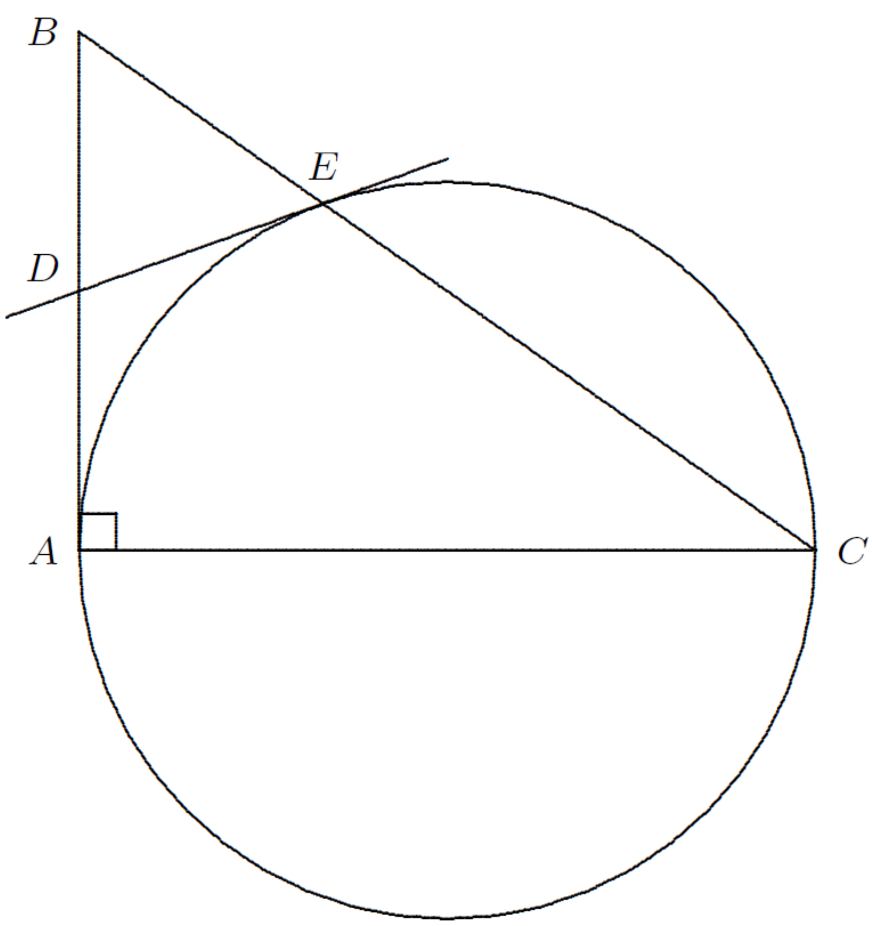
104. Der Mittelpunkt eines regelmäßigen Sechsecks wird an den Sechseckseiten gespiegelt. Die resultierenden Spiegelpunkte sind die Eckpunkte eines zweiten Sechsecks, von dem zu zeigen ist, dass es den dreifachen Flächeninhalt des Ausgangssechsecks aufweist.

105. Eine durch 6 teilbare sechsstellige Zahl $n = (abcdef)_{10}$ enthält jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 und 6 genau einmal. Ferner weist n folgende Eigenschaften auf:

- Die Zahl $n_1 = (abcde)_{10}$ ist durch 5 teilbar.
- Die Zahl $n_2 = (abcd)_{10}$ ist ein Vielfaches 4.
- Die Zahl $n_3 = (abc)_{10}$ ist durch 3 teilbar.
- Die Zahl $n_4 = (ab)_{10}$ ist gerade.

Ermittle alle Zahlen, die für n in Frage kommen.

106. Ausgehend vom unten abgebildeten rechtwinkligen Dreieck ΔABC wird an die Kreislinie mit dem Durchmesser AC im (nebst C) zweiten Schnittpunkt mit der Hypotenuse die Tangente gelegt und mit der Kathete AB geschnitten, was wie in der Abbildung illustriert auf das Dreieck ΔBDE führt. Beweise, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist und ferner, dass D die Kathete AB halbiert.

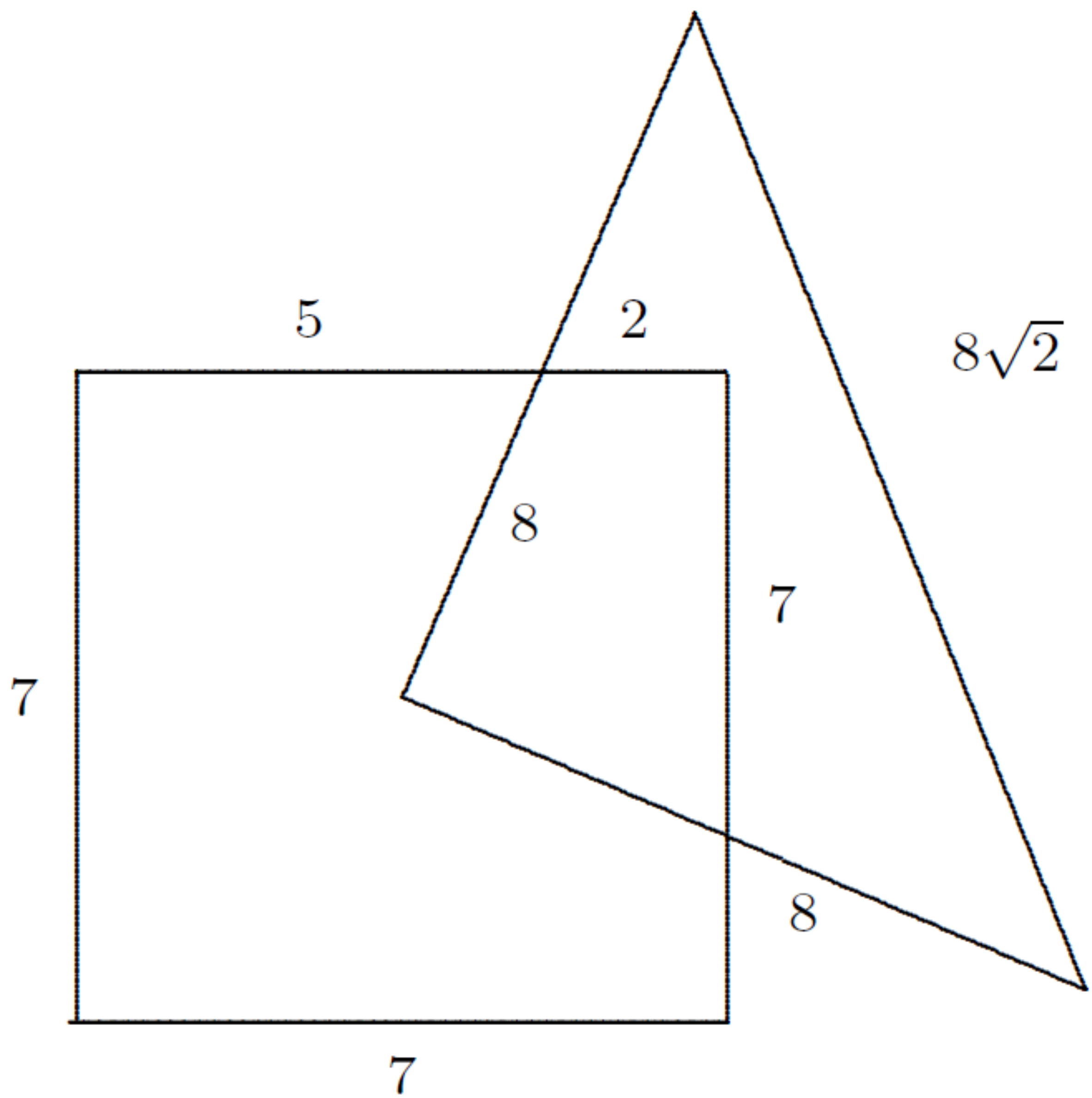


107. Mathemanfred vereinfacht den Bruch $\frac{37^3+13^3}{37^3+24^3}$ wie folgt:

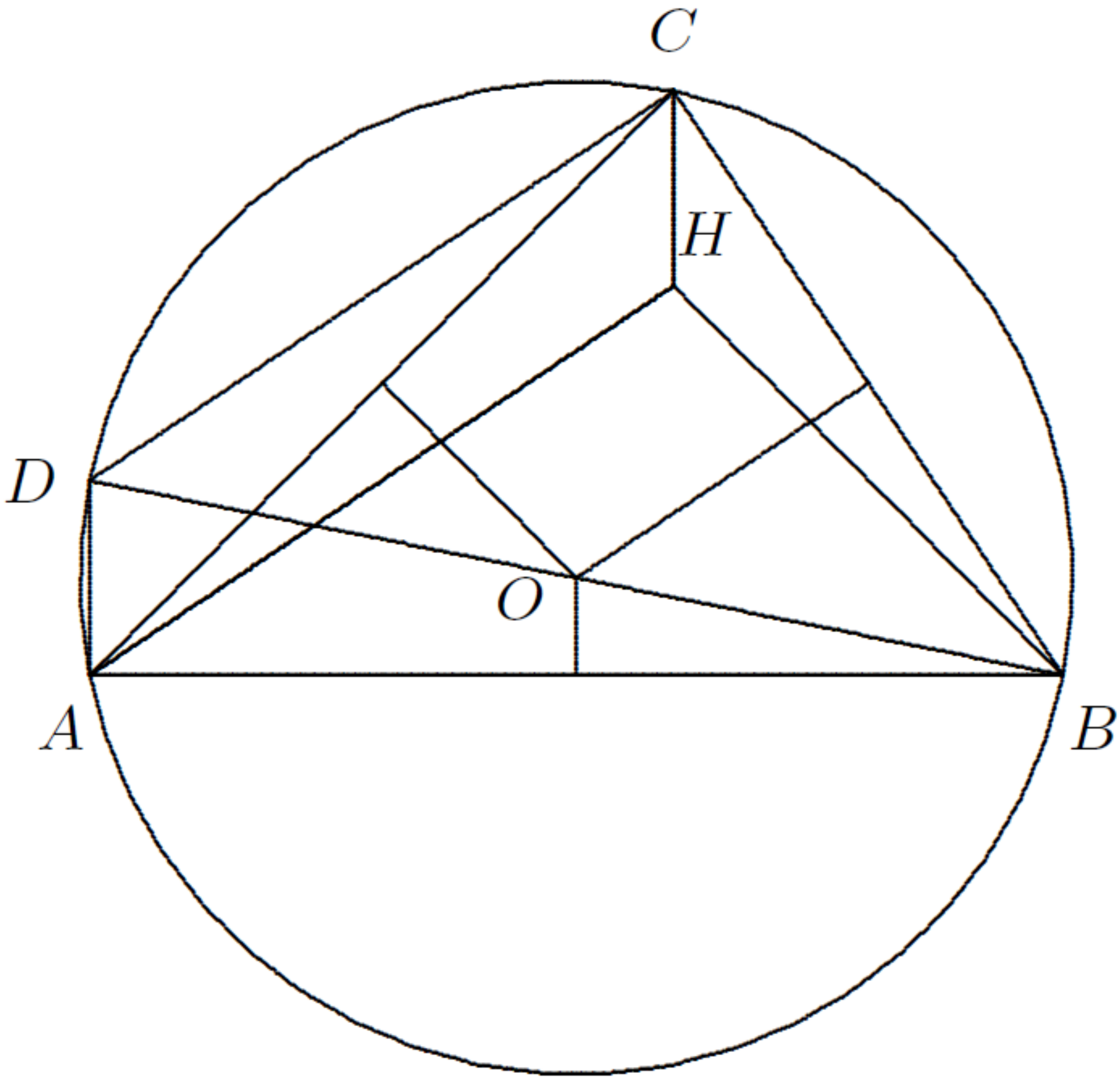
$$\frac{37^3+13^3}{37^3+24^3}=\frac{37+13}{37+24}=\frac{50}{61}$$

Auch wenn das Kürzen der Exponenten natürlich nicht zulässig ist, stellt sich das Resultat dennoch als korrekt heraus. Woran liegt das (Beweis!)?

108. Der Scheitel des rechten Winkels des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks in der unteren Abbildung befindet sich exakt im Mittelpunkt des abgebildeten Quadrats. Wie groß ist die Überschneidungsfläche von Dreieck und Quadrat?



109. In der folgenden Abbildung bezeichnet O bzw. H den Umkreismittelpunkt bzw. Höhenschnittpunkt des spitzwinkligen Dreiecks ΔABC. Der nebst B zweite gemeinsame Punkt von g_{BO} mit der Umkreislinie des Dreiecks ΔABC sei D. Beweise, dass es sich beim Viereck $AHCD$ um ein Parallelogramm handelt.



110. Ermittle einen geschlossenen Ausdruck für

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n!,$$

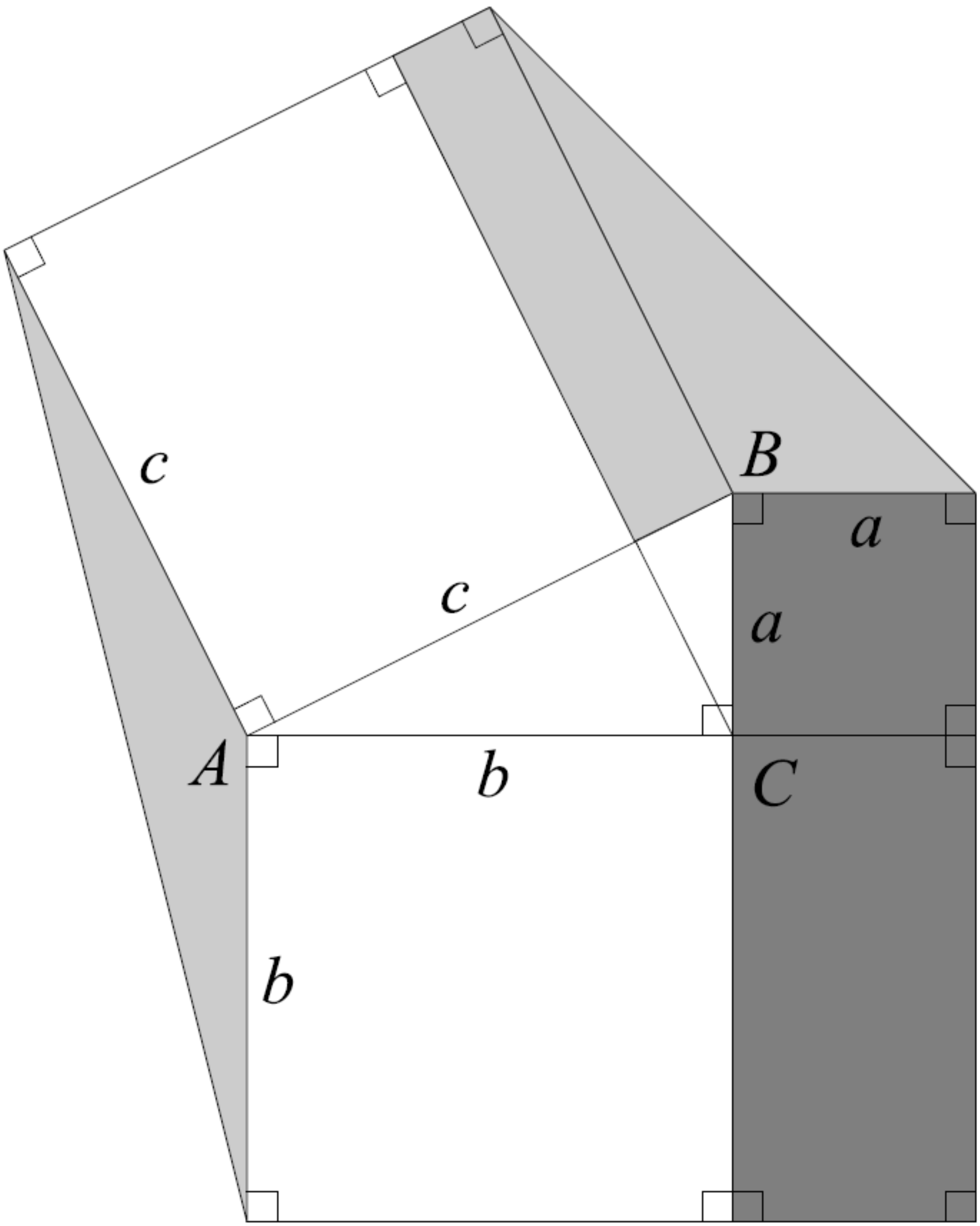
wobei

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1.$$

111. Es sei r eine rationale Näherung von $\sqrt{2}$, d.h. $\left|r - \sqrt{2}\right| = \varepsilon$ mit einer kleinen positiven reellen Zahl ε. Beweise, dass dann $\dfrac{r+2}{r+1}$ eine noch bessere Näherung ist.

112. In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck wird jeder Eckpunkt an der gegenüberliegenden Seite gespiegelt. Die resultierenden Spiegelpunkte sind die Eckpunkte eines zweiten im Allgemeinen nicht wieder rechtwinkligen Dreiecks, von dem zu zeigen ist, dass es den dreifachen Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks aufweist.

113. Beweise, dass die beiden in unterschiedlichen Graustufen gefärbten Bereiche in der folgenden Abbildung den gleichen Flächeninhalt aufweisen.

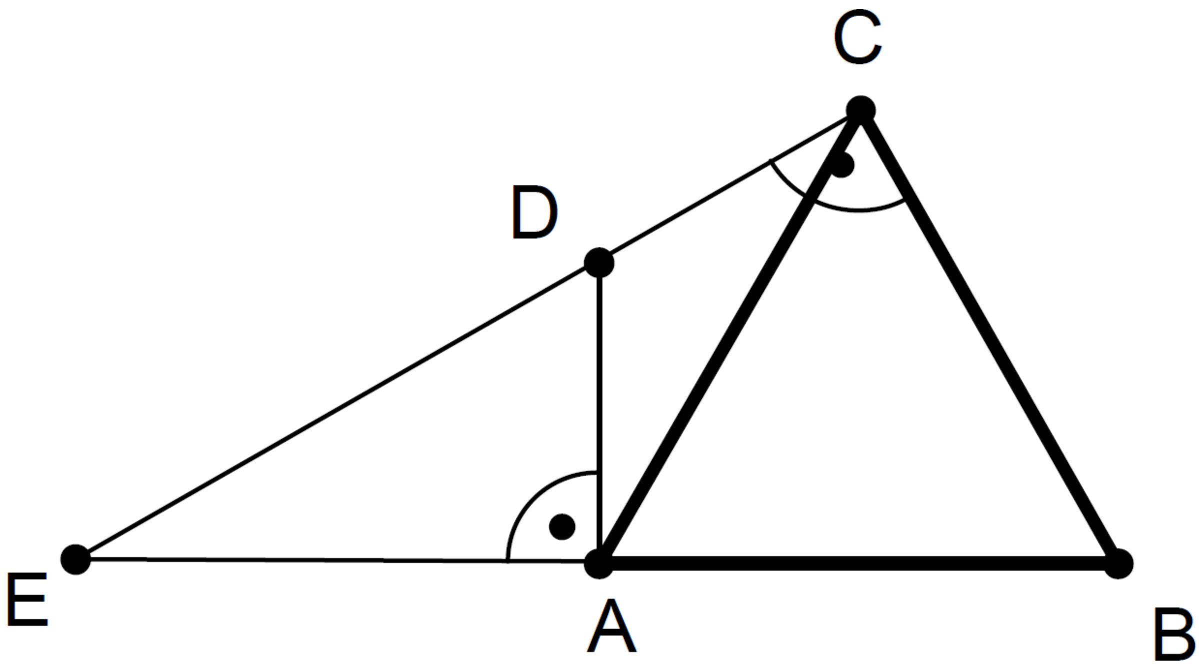


114. Ermittle alle Primzahlen p, q und r mit $q > r$, welche die Gleichung $p \cdot (q+r) = 2015$ erfüllen.

115. Ermittle alle Paare natürlicher Zahlen, welche die Gleichung $ab+2 = a^3+2b$ erfüllen.

116. H bzw. U sei der Höhenschnittpunkt bzw. der Umkreismittelpunkt eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ΔABC. Die Gerade g_{AU} schneide die Höhe h_b bzw. h_c in P bzw. Q. Beweise, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔPQH auf der durch A verlaufenden Schwerlinie des Dreiecks ΔABC liegt.

117. In der folgenden Abbildung ist ΔABC ein gleichseitiges Dreieck. Drücke die Flächeninhalte der aus ΔABC wie in der Abbildung illustriert generierten Dreiecke ΔACD und ΔADE durch den Flächeninhalt von ΔABC aus.



118. Es sei $ABCD$ ein Trapez mit den Parallelseiten AB und CD sowie P ein Punkt auf dem Schenkel BC. Beweise, dass die Parallele zu AP durch C die Parallele zu DP durch B auf DA schneidet.

119. Die Parallelseiten eines gleichschenkligen Trapezes mit aufeinander normal stehenden Diagonalen verlaufen in einem Abstand von 7 Längeneinheiten zueinander. Ermittle den Flächeninhalt dieses Trapezes.

120. Ermittle alle ganzzahligen positiven Lösungstripel von $ab + bc + ac = 2(a + b + c)$.

121. Wie viele siebenstellige Zahlen gibt es, für die das Ziffernprodukt 45^3 beträgt?

122. H sei der Höhenschnittpunkt eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ΔABC mit $\overline{AB} > \overline{AC}$, ferner sei D der Höhenfußpunkt auf g_{BC} sowie E der Spiegelpunkt von C an D. Überdies ergibt sich S als Schnittpunkt der Geraden g_{AE} und g_{BH}. Beweise, dass g_{MN} normal auf g_{DS} steht, wobei N bzw. M den Mittelpunkt der Strecke AE bzw. BH bezeichnet.

123. U sei der Umkreismittelpunkt eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ΔABC, ferner D der nebst A zweite gemeinsame Punkt von h_a mit der Umkreislinie des Dreiecks ΔABC. Schließlich sei E nebst B zweite gemeinsame Punkt von g_{BU} mit der Umkreislinie des Dreiecks ΔABC. Beweise, dass das Dreieck ΔABC sowie das Viereck $\Delta BCDE$ denselben Flächeninhalt aufweisen.

124. Ermittle alle ganzzahligen nicht-negativen Lösungstripel der Gleichung

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z+2}.$$

125. Eine Zahl besteht aus drei verschiedenen Ziffern. Die Summe der anderen fünf Zahlen, die aus denselben Ziffern gebildet werden können, beträgt 2003. Ermittle die Zahl.

126. Ermittle alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $(m^2 + n)(m + n^2) = (m - n)^3$, wobei sowohl $m \neq 0$ als auch $n \neq 0$ gelte.

127. Auf die Seiten BC, AC und AB eines beliebigen Dreiecks ΔABC werden nach außen gleichschenklige Dreiecke ΔCBD, ΔACE und ΔAFB aufgesetzt. Beweise, dass die Normale n_A auf g_{EF} durch A, die Normale n_B auf g_{DF} durch B sowie die Normale n_C auf g_{DE} durch C einander in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

128. $x = (111)_b = (212)_{b-2}$. Ermittle x zur (gewöhnlichen) Basis 10!

129. (p_1, p_2) und (p_3, p_4) seien minimal benachbarte Primzahlzwillinge, wobei p_1 und p_2 die kleineren der vier Primzahlen seien. Für die via $d := p_3p_4 - p_1p_2$ definierte Differenz d beweise man:

    (a) $36 \mid d$

    (b) $d = 12 \cdot \overline{p}$, wobei $\overline{p} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{4} p_k$

130. (p_1, p_2) und (p_3, p_4) seien minimal benachbarte Primzahlzwillinge, wobei p_1 sowie p_2 mit $p_1 < p_2$ die kleineren und dadurch p_3 sowie p_4 mit $p_3 < p_4$ die größeren der vier Primzahlen seien. Für die via $d := p_2p_3 - p_1p_4$ definierte Differenz d beweise man $d \equiv 12$.

131. (p_1, p_2) und (p_3, p_4) seien minimal benachbarte Primzahlzwillinge, wobei p_1 sowie p_2 mit $p_1 < p_2$ die kleineren und dadurch p_3 sowie p_4 mit $p_3 < p_4$ die größeren der vier Primzahlen seien. Für die via $d := p_2p_4 - p_1p_3$ definierte Differenz d beweise man:

    (a) $12 \mid d$

    (b) $d = 4 \cdot \overline{p}$, wobei $\overline{p} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{4} p_k$

132. (p_1, p_2) und (p_3, p_4) seien minimal benachbarte Primzahlzwillinge, wobei p_3 und p_4 mit $p_3 < p_4$ die größeren der vier Primzahlen seien. Für die via

$$m := p_1p_2p_3 - p_4 \quad \text{und} \quad n := p_1p_2p_4 - p_3$$

definierten natürlichen Zahlen m und n beweise man:

    (a) $m < n$
    (b) $12 \mid m \quad \wedge \quad 12 \mid n$
    (c) $72 \mid d$ mit $d = n - m$

133. Für d aus der vorherigen Aufgabe beweise man:

d hat mindestens 36 Teiler (1 und d mitgezählt!).

134. (p_1, p_2) und (p_3, p_4) seien minimal benachbarte Primzahlzwillinge, wobei p_3 und p_4 mit $p_3 < p_4$ die größeren der vier Primzahlen seien. Für die via

$$k := p_2 p_3 p_4 - p_1 \quad \text{und} \quad \ell := p_1 p_3 p_4 - p_2$$

definierten natürlichen Zahlen k und ℓ beweise man:

(a) $k > \ell$

(b) $12 \mid k \quad \wedge \quad 12 \mid \ell$

(c) $72 \mid d'$ mit $d' = k - \ell$

135. Für d' aus der vorherigen Aufgabe beweise man:

$$d' \text{ hat mindestens 36 Teiler (1 und } d \text{ mitgezählt!).}$$

136. Für die Differenzen d und d' aus den **letzten vier Aufgaben** beweise man:

(a) $d' > d$

(b) $d' - d = 24 \cdot \overline{p}$ mit $\overline{p} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{4} p_k$

(c) Eine der beiden Differenzen hat sogar mindestens 54 Teiler.

137. Für die in den Aufgaben 132 und 134 definierten natürlichen Zahlen k und m beweise man:

(a) $k > m$

(b) $48 \mid k - m$

138. Wir betrachten ein gleichschenkliges Dreieck ΔABC mit der Basislänge $\overline{AB} = 2b$ und der Höhe h auf die Basis, wobei $h > b$ gelte. Die Streckensymmetrale m_{AC} schneide BC in P. Beweise:

(a) Bezeichnet m_h bzw. m_q (wie üblich) das harmonische bzw. quadratische Mittel, dann gilt

$$\overline{M_{AC}P} = m_h(b, h) \cdot m_q(b, h) \cdot \frac{\sqrt{2}}{h - b}.$$

(b) Schneidet die Normale n auf m_{AC} durch P die Gerade $g_{M_{AB}C}$ in Q, dann gilt

$$\overline{M_{AB}Q} = \frac{m_h(b, h)}{k - 1},$$

wobei k die Steigung von g_{AC} gegenüber g_{AB} bezeichnet.

(c) $\overline{M_{AB}Q} < \overline{M_{AC}P}$

139.

$$\boxed{5187 : 3 = 1729, \quad 5188 : 4 = 1297}$$

Gibt es neben 1297 und 1729 noch weitere Paare vierstelliger Zahlen mit der obig illustrierten Eigenschaft, dass bei entsprechender Permutation der letzten drei Ziffern das Vierfache der kleineren Zahl um 1 größer ist als das Dreifache der größeren Zahl?

140. Einem Fahrgast der Wiener Linien fällt auf, dass bei allen Garnituren mit einer Wagennummer x im Bereich $4510 \leq x \leq 4519$ (wie z.B. die unten abgebildete gera-

de an der Wiener Lugner City vorbeifahrende Garnitur der Type E_1[1] mit der Wagennummer 4515) die aus Zehner- und Einerziffer der Wagennummer bestehende Zahl der Ziffernsumme der Wagennummer gleicht. Für welche (neben den o.g. zehn) weiteren vierstelligen Zahlen gilt dies noch?

141. Ermittle alle dreistelligen Zahlen, welche gleich dem 34-fachen ihrer Ziffernsumme sind.

142. Es seien a, b und c aufeinanderfolgende ungerade ganze Zahlen. Beweise, dass $a^2 + b^2 + c^2$ bei Division durch 12 stets den Rest 11 lässt.

143. Beweise: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = \frac{n\,(4n^2 - 3n + 5)}{6}$

144. Beweise: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists! m \in \mathbb{N}$ mit $\left(\sqrt{2} - 1\right)^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$

[1] erzeugt zwischen 1964 und 1976 und auch 2019 noch auf einigen Wiener Linien (neben der Linie 49 ebenso auf den Linien 25 und 26) unterwegs

145. Für die rekursiv via $\boxed{a_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{1+a_n},\ a_0 = \alpha^2 \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}}$ festgelegte Folge $\langle a_n \rangle$ ermittle man das explizite Bildungsgesetz und beweise ferner $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
$\left[\text{Lösung: } a_n = \dfrac{3\alpha^2}{(3n-4)\alpha^2+1}\right]$

146. Ein Rechteck wird längs seiner Diagonale gefaltet. Man beweise, dass der überlappende Dreiecksteil stets mehr als ein Viertel des Rechtecks einnimmt und weise insbesondere die Formel $\mathcal{A} = \dfrac{ad^2}{4b}$ für den Flächeninhalt des überlappenden Dreiecksteils nach, wobei a bzw. b resp. d die Länge bzw. Breite resp. Diagonale des Rechtecks bezeichnet.

147. Ermittle aller Paare (p, q) von Primzahlen, für welche die quadratische Gleichung $3x^2 - px + q = 0$ reelle Lösungen besitzt und beweise, dass für das arithmetische Mittel $\overline{x}$ aller Lösungen $\overline{x} = 1$ gilt.
[Lösung: Die Gleichungen lauten $3x^2 - 5x + 2 = 0$ und $3x^2 - 7x + 2$.]

148. Beweise: $120 \mid 3n^5 + 5n^3 - 8n \ \forall n \in \mathbb{Z}$

149. Beweise:
$$1 + 2^2 + 3^3 + 4 + 5^2 + 6^3 + 7 + 8^2 + 9^3 + ... + (3n)^3 + n = \frac{3n^2(n+1)(9n+13)}{4}$$

150. Von $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}$ weiß man, dass
$$a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 = 2^{10}$$
gilt. Berechne a!

151. Runde $\dfrac{444}{\sqrt{111 \cdot 112} - 111}$ ohne Taschenrechner.

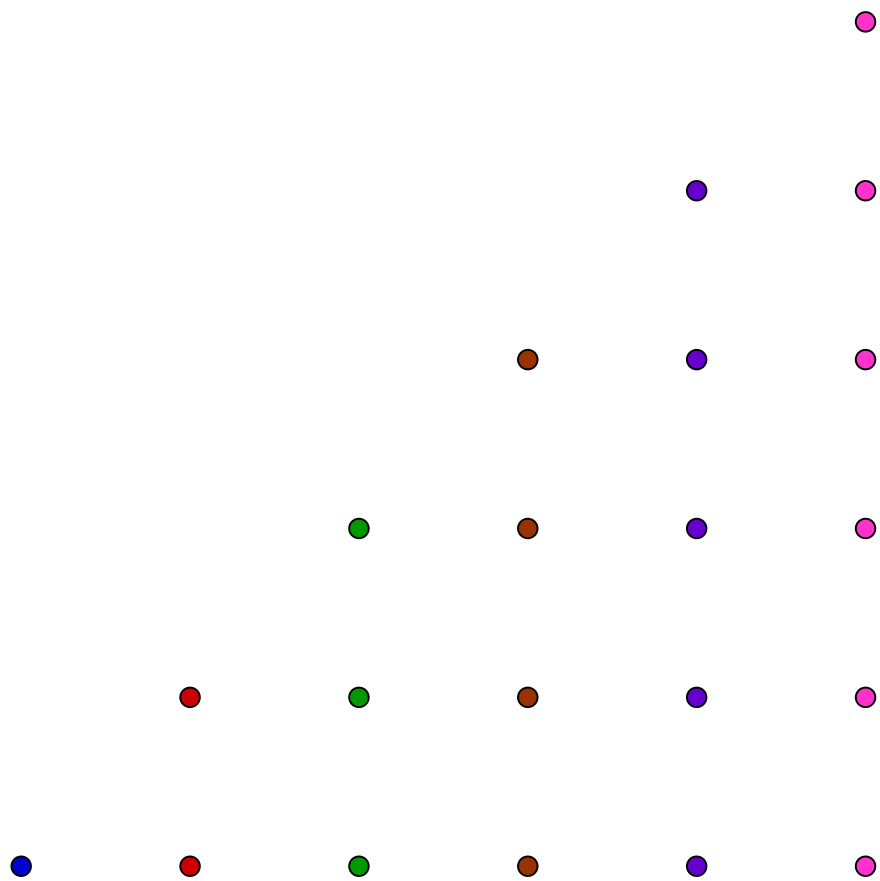
152. Ermittle alle Lösungen von $2^x(4 - x) = 2x + 4$.

153. $a \leq b < c$ seien die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks,
ferner $2p$ bzw. $\mathcal{F}$ sein Umfang bzw. Flächeninhalt. Beweise:
$$p(p-c) = (p-a)(p-b) = \mathcal{F}$$

154. Berechne alle ganzen Zahlen n, für welche der Ausdruck
$$\sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}}$$
ebenso eine ganze Zahl ist.

155. Da man sich die via
$$1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
definierten bzw. berechenbaren Gaussschen Summen auch als Gitterpunkte in und am Rand eines rechtwinkligen Dreiecks veranschaulichen kann (vgl. folgende Abbildung, welche ferner eine visuelle Herleitung der obigen Formel - einen sogenannten

A proof without words (Dr. R. Resel, January 2019)



$\mathbf{1} \quad \mathbf{+2} \quad \mathbf{+3} \quad \mathbf{+\ldots} \quad \boldsymbol{+n} \quad \boldsymbol{(+n+1)}$

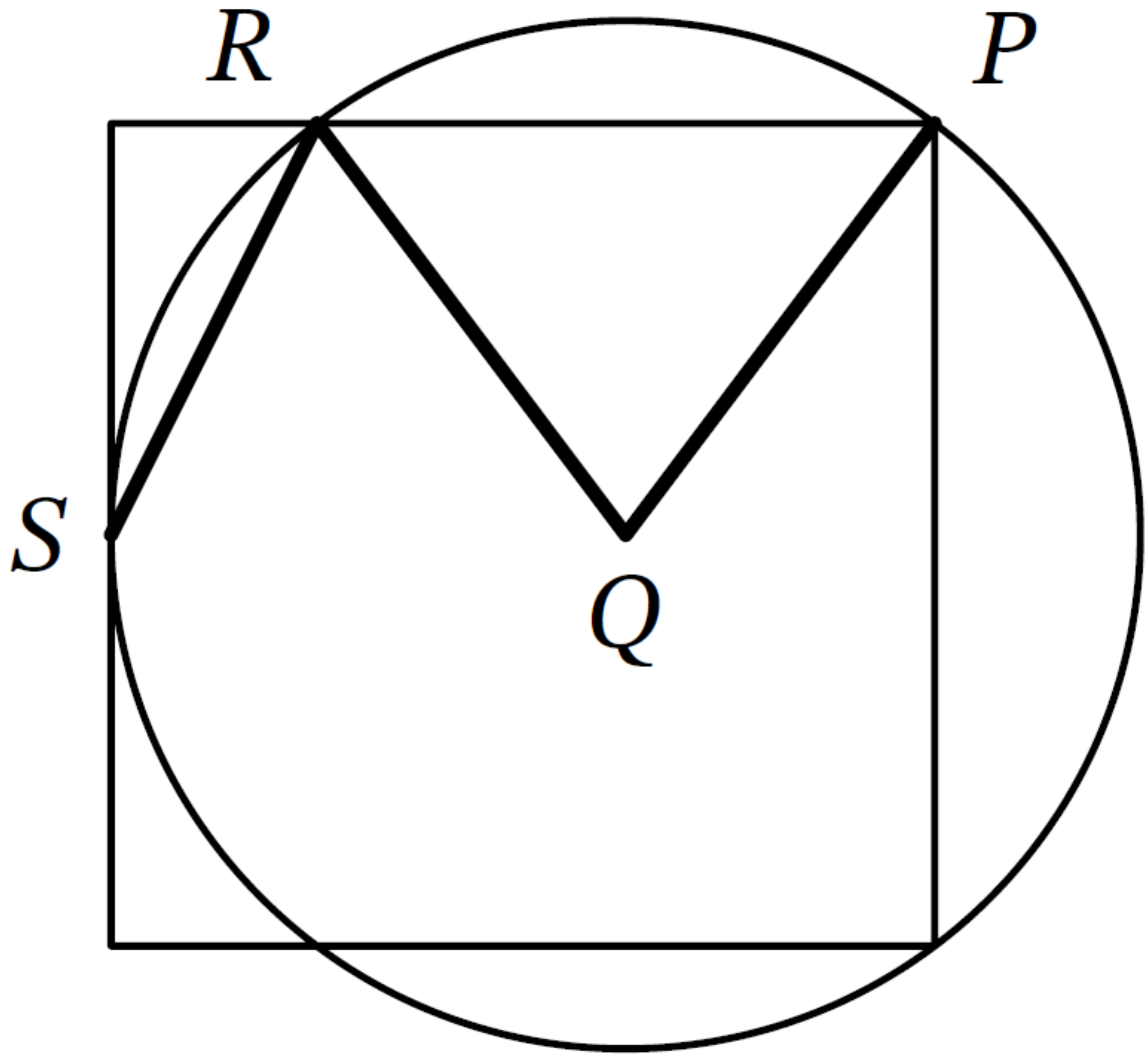
$$s_n := \sum_{k=1}^{n} k \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot s_n + n + 1 = (n+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot s_n = (n+1)(n+1-1) \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

"*proof without words*" - gestattet), werden ebenjene Summen auch als Dreieckszahlen (symbolisch: D_n) bezeichnet. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $T_n \mid T_{n+4}$? Ermittle die Summe all dieser Werte für n.

156. Beweise, dass für jede ungerade natürliche Zahl $2^9 \mid n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ gilt.

157. Die in der folgenden Abbildung visualisierte Kreislinie mit dem Mittelpunkt Q geht durch zwei benachbarte Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge 32 und berührt die den beiden Eckpunkten gegenüberliegende Seite in deren Mittelpunkt. Berechne die Länge des Polygonzugs $PQRS$ und runde (freilich ohne Taschenrechner) auf die nächste ganze Zahl.



158. Ermittle alle ganzzahligen Lösungstripel des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & & & & z^x & = & y^{2x} \\ & & & & 2^z & = & 4^x \\ x & + & y & + & z & = & 20 \end{array} \right\}.$$

159. Für $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$ und $d \in \mathbb{Z}$ mit $ab = cd$ beweise man, dass $a + b + c + d$ nicht prim sein kann.

160. Ermittle alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen, welche $2x^2+5y^2 = 11(xy-11)$ erfüllen.

161. Beweise für jedes beliebige Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c sowie dem Umkreisradius r die Ungleichung

$$r \geq \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}$$

und untersuche auch den Fall der Gleichheit.

162. Es sei D der Höhenfußpunkt auf der Seite BC des spitzwinkligen Dreiecks ΔABC. Ferner sei E ein Punkt der offenen Strecke AD, für den

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

gilt sowie F der Fußpunkt von D auf der Strecke BE. Beweise: $\measuredangle AFC = 90°$

163. Ermittle die kleinste ungerade natürliche Zahl n mit der gleichen Anzahl an Teilern (1 und n selbst mitgerechnet) als 360 (detto mit 1 und 360).

164. In welchen Punkten auf der Kreislinie mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ haben die Tangenten die Eigenschaft, mit der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + 1$ nur einen Punkt gemeinsam zu haben?

165. D bzw. E liegt auf dem Schenkel AB bzw. AC des gleichschenkligen Dreiecks ΔABC. Die Parallele zu g_{AC} durch B schneide g_{DE} in F, die Parallele zu g_{AB} durch C schneide g_{DE} in G. Beweise für die Flächeninhalte $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ der Vierecke $DBCG$ und $FBCE$ die Proportion

$$\frac{\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}.$$

166. Im Dreieck ΔABC gelte $\measuredangle ACB = 60°$ sowie $\overline{AC} < \overline{BC}$. Ferner sei D jener Punkt auf der Seite BC mit $\overline{BD} = \overline{AC}$. Durch Verlängerung der Seite AC entsteht via $\overline{AC} = \overline{CE}$ der Punkt E. Beweise: $\overline{AB} = \overline{DE}$

167. Löse über $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a^3 & + & 3ab^2 & + & 3ac^2 & - & 6abc & = & 1 \\ b^3 & + & 3a^2b & + & 3bc^2 & - & 6abc & = & 1 \\ c^3 & + & 3a^2c & + & 3b^2c & - & 6abc & = & 1 \end{array} \right\}$$

168. Löse über $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

169. Der Punkt D bzw. E resp. F liegt auf der Seite BC bzw. AC resp. AB des rechtwinkligen und nicht gleichschenkligen Dreiecks ΔABC mit der Hypotenuse BC derart, dass ein Quadrat $\square AFDE$ generiert wird. Beweise, dass die Trägergerade der Hypotenuse, die Gerade g_{EF} und die Tangente t_A an die Umkreislinie des Dreiecks ΔABC einander in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

170. M bzw. N sei ein Punkt auf der offenen Strecke BC bzw. CD des Quadrats $\square ABCD$, wobei $\measuredangle MAN = 45°$ gelte. Beweise, dass der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ΔAMN auf der Diagonale AC liegt.

171. Dem Dreieck ΔABC werden über seinen Seiten nach außen die gleichseitigen Dreiecke ΔAMB, ΔBNC und ΔCKA aufgesetzt. Durch den Mittelpunkt der Strecke MN bzw. NK resp. KM wird eine Normale AC bzw. AB resp. BC gelegt. Beweise, dass diese drei Normalen durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

172. Es sei P ein Punkt auf dem kürzeren Bogen AB der Umkreislinie des Quadrats $\square ABCD$. Für die via $g_{BD} \cap g_{CP} = \{R\}$ und $g_{AC} \cap g_{DP} = \{S\}$ definierten Punkte beweise man, dass die Dreiecke ΔARB und ΔDSR flächeninhaltsgleich sind.

173. Auf die Seite AB bzw. AC des Dreiecks ΔABC wird durch B bzw. C eine Normale gelegt, der Schnittpunkt der Normalen sei mit P bezeichnet. Ferner sei D bzw. E jener Punkt auf der Dreiecksseite AB bzw. AC, für welchen $\overline{BD} = \overline{BP}$ bzw. $\overline{CE} = \overline{CP}$ gilt. Schließlich sei F bzw. G jener Punkt auf AC bzw. AB, sodass DF bzw. EG normal auf AB bzw. AC steht. Beweise:

    (a) Der Mittelpunkt der Strecke AP ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC.
    (b) $\overline{FP} = \overline{GP}$

174. Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit der Hypotenuse BC gilt $\measuredangle ACB = 30°$. Ferner sei k jene Kreislinie durch A, welche die Hypotenuse des Dreiecks ΔABC in ihrem Mittelpunkt berührt. Schließlich sei N bzw. M der Schnittpunkt von k mit der Umkreislinie bzw. mit der Kathete AC des Dreiecks ΔABC. Beweise: $g_{MN} \perp g_{BC}$

175. Im spitzwinkligen Dreieck ΔABC gelte $\measuredangle BAC = 60°$. Man beweise für die Höhenfußpunkte H_b und H_c die Identität

$$\overline{H_bC} - \overline{H_cB} = \frac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2}.$$

176. Im spitzwinkligen Dreieck ΔABC gelte $\measuredangle BAC = 45°$. Ferner sei H bzw. U der Höhenschnittpunkt bzw. der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC sowie D der Höhenfußpunkt auf der Seite AC. Schließlich sei X der Mittelpunkt des Umkreisbogens AH des Dreiecks ΔADH, welcher auch D enthält. Beweise: $\overline{UX} = \overline{DU}$

177. Es sei h bzw. r die Höhe auf die Hypotenuse bzw. der Inkreisradius eines rechtwinkligen Dreiecks. Durch erstere wird das Ausgangsdreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke partitioniert, deren Inkreisradien mit r' und r'' bezeichnet seien. Beweise:

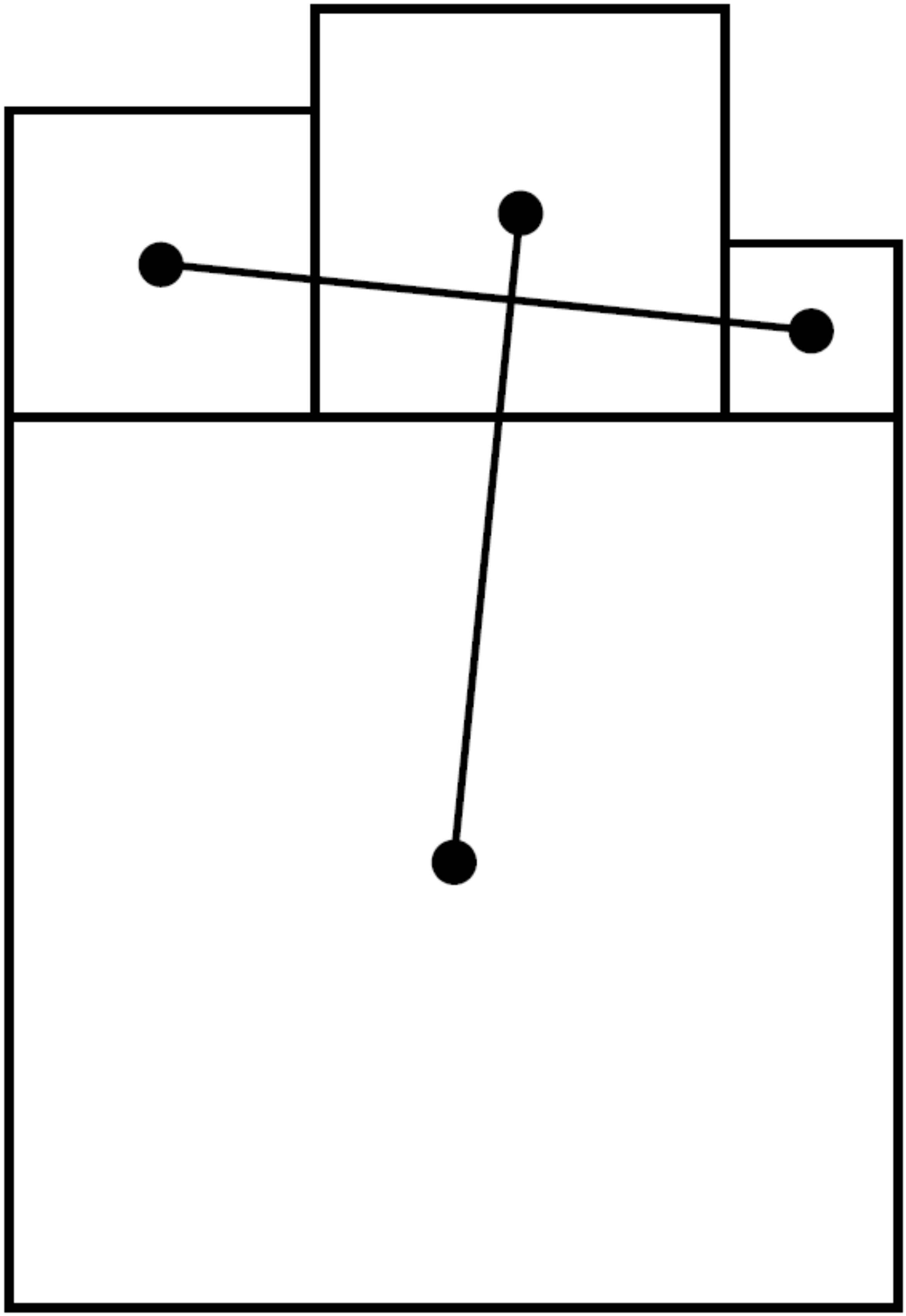
    (a) $h = r + r' + r''$
    (b) $r'^2 + r''^2 = r^2$

178. Man ermittle alle möglichen Werte des Ausdrucks $x + y$, wenn

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + \dfrac{x}{y} = 10 \\ \dfrac{x(x+y)}{y} = 20 \end{array} \right\}$$

gilt.

179. I bzw. r bezeichne den Inkreismittelpunkt bzw. den Inkreisradius des rechtwinkligen Dreiecks ΔABC mit der Hypotenuse AB. Ferner bezeichne D bzw. E den Schnittpunkt von g_{AI} mit g_{BC} bzw. von von g_{BI} mit g_{AC}. Beweise: $\dfrac{1}{\overline{AE}} + \dfrac{1}{\overline{BD}} = \dfrac{1}{r}$



180. In den vier obig abgebildeten Quadraten wurden entsprechende Mittelpunkte miteinander verbunden. Man beweise, dass die beiden eingezeichneten Strecken aufein-

ander normal stehen und dass deren gemeinsame Länge ℓ via $\ell = \frac{\sqrt{(d_\ell + d_m)^2 + (d_m + d_r)^2}}{2}$ berechnet werden kann, wobei d_ℓ bzw. d_m resp. d_r die Diagonallänge des oberen linken bzw. mittleren resp. rechten Quadrats bezeichnet.

181. Die Diagonalen eines Trapezes mit den Parallelseiten a und c sowie der Höhe h begrenzen mit den Parallelseiten zwei Dreiecke. Beweise für den Betrag der Differenz der Flächeninhalte der beiden Dreiecke die Darstellung

$$|\delta_{\mathcal{A}}| = \frac{|a-c|h}{2}.$$

182. Ermittle n in $6! \cdot 7! = n!$, wobei $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .. \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k$.

183. Ermittle alle Lösungen von $\sqrt{17 + x - 8\sqrt{x+1}} + \sqrt{5 + x - 4\sqrt{x+1}} = 6$.

184. Löse über $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$52^a \cdot 77^b \cdot 88^c \cdot 91^d = 2002$$

185. Im Rechteck $ABCD$ gelte $\overline{AB} < 2 \cdot \overline{AD}$. Ferner sei E der Mittelpunkt der Seite AB sowie F der Fußpunkt von F auf CE. Beweise, dass das Dreieck ΔFAD gleichschenklig ist.

186. Bezugnehmend auf die Notation in Aufgabe 155 beweise man: Falls $D_n = 2 \cdot D_m$, dann ist D_{2m-n} eine Quadratzahl.

187. Beweise: Stehen zwei Schwerlinien in einem Dreieck aufeinander normal, so ist die zur dritten Schwerlinie zugehörige Seite die kürzeste Dreiecksseite.

188. Es seien a, b und c beliebige reelle Zahlen. Beweise: $a^2 + 4b^2 + 8c^2 \geq 3ab + 4bc + 2ac$ Wann tritt Gleichheit ein?

189. Es sei $n > 18$ eine natürliche Zahl, sodass sowohl $n-1$ als auch $n+1$ prim sind. Beweise, dass n mindestens acht Teiler besitzt.

190. AB und CD seien die Parallelseiten eines Trapezes $ABCD$ mit dem Diagonalenschnittpunkt P. Beweise:

$$\mathcal{A}_{\Delta PAB} + \mathcal{A}_{\Delta PCD} > \mathcal{A}_{\Delta PBC} + \mathcal{A}_{\Delta PDA}$$

191. Beweise: $2010 < \frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + ... + \frac{2010^2+1}{2010^2-1} < 2010,5$

192. Jede Schwerlinie eines beliebigen Dreiecks partitioniert das Dreieck in zwei Teildreiecke mit den Schwerpunkten S_1 und S_2. Beweise, dass S_1 und S_2 von der besagten Schwerlinie gleiche Normalabstände aufweisen.

193. Löse über $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y = 1 \\ (x^2+y^2)(x^3+y^3) = x^4 + y^4 \end{array} \right\}$$

194. Ausgehend vom Dreieck ΔABC mit den Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ beweise man, dass die Identität

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

genau dann gilt, wenn $\measuredangle CBA = 60°$ zutrifft.

195. Die Diagonalen eines Trapezes mit den Parallelseiten a und c $(a > c)$ sowie der Höhe h begrenzen mit den Parallelseiten zwei Dreiecke. Es bezeichne $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$ den größeren bzw. kleineren der beiden Dreiecksflächeninhalte sowie $\mathcal{A}$ den Flächeninhalt des Trapezes. Beweise:

$$\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A} = ah.$$

196. Kann 2013 als Differenz zweier Kubikzahlen geschrieben werden?

197. Löse über $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x(y-1) + y(x+1) = 6 \\ (x-1)(y+1) = 1 \end{array} \right\}$$

198. Es sei P jener Punkt auf der Seite BC des Dreiecks ΔABC, für den $\overline{BP} : \overline{PC} = 2 : 1$ gilt. Beweise, dass die Gerade g_{AP} die Schwerlinie durch C in deren Mittelpunkt schneidet.

199. Es sei ρ bzw. r der In- bzw. Umkreisradius eines rechtwinkligen Dreiecks.

$$\text{Beweise: } r \geq \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \rho$$

200. Im spitzwinkligen Dreieck ΔABC gelte $\measuredangle BAC = 60°$. Beweise, dass die Winkelsymmetrale ebenjenes Winkels sowie die Höhen der Seiten AB und AC ein gleichseitiges Dreieck begrenzen.

201. Löse über $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

$$3\left(x^2 + y^2\right) - 7(x+y) = -4$$

202. Beweise $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n-1]{n} > n$$

203. Löse über $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{c} a^3 + b = 4c \\ a + b^3 = c \\ ab = -1 \end{array} \right\}$$

204. Ermittle alle Tripel aufeinanderfolgender ganzer Zahlen, sodass eine der drei Zahlen die Summe der beiden anderen ist.

205. Für $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ gelte $a + b = 2$ sowie $ab = -1$. Berechne $a^{10} + b^{10}$.

206. Beweise $\forall x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $x^5 + x + 1 \geq 3x^2$.

207. Die Inkreislinie eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks unterteilt die Hypotenuse in zwei Abschnitte r und s. Beweise, dass der Flächeninhalt des Dreiecks exakt $r \cdot s$ beträgt.

208. Ermittle vier ganze Zahlen (in allgemeiner Form) derart, dass die sechs möglichen paarweisen Summen aufeinanderfolgende ganze Zahlen ergeben. Beweise, dass die Summe dieser sechs Summen eine ungerade durch 3 teilbare Zahl ist.

209. Ermittle ganze Zahlen x und y, welche $x^2 - y^2 = 631$ erfüllen oder beweise, dass dies nicht möglich ist.

210. Ermittle ganze Zahlen x und y, welche $x^3 - y^3 = 631$ erfüllen oder beweise, dass dies nicht möglich ist.

211. Ermittle ganze Zahlen x und y, welche $x^4 - y^4 = 631$ erfüllen oder beweise, dass dies nicht möglich ist.

212. Was fällt dir an den unten aufgelisteten speziellen pythagoreischen Tripeln auf?

$$(3, 4, 5),\ (5, 12, 13),\ (7, 24, 25),\ (9, 40, 41)$$

Formuliere eine Vermutung und beweise selbige.

213. Auch an den halben Umfängen jener rechtwinkligen Dreiecke, deren Seitenlängen den obigen pythagoreischen Tripeln entsprechen, sind Auffälligkeiten erkennbar:

$$1+2+3,\ \ 1+2+3+4+5,\ \ 1+2+3+4+5+6+7,\ \ 1+2+3+4+5+6+7+8+9$$

Formuliere wiederum eine Vermutung und beweise auch diese.

214. Auch an den Flächeninhalten jener rechtwinkligen Dreiecke, deren Seitenlängen den obigen pythagoreischen Tripeln entsprechen, sind Auffälligkeiten erkennbar:

$$6 \cdot 1^2,\ \ 6 \cdot \left(1^2 + 2^2\right),\ \ 6 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right),\ \ 6 \cdot \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right)$$

Formuliere abermals eine Vermutung und beweise diese ebenso.

215. Auch an den Inkreisradien jener rechtwinkligen Dreiecke, deren Seitenlängen den obigen pythagoreischen Tripeln entsprechen, sind Auffälligkeiten erkennbar, welche du selbst erkunden und beweisen sollst.

216. Gibt es ganze Zahlen a, b, c, d und x, sodass

$$(x+1)^2 + a^2 = (x+2)^2 + b^2 = (x+3)^2 + c^2 = (x+4)^2 + d^2$$

gilt? Ermittle ein derartiges Quintupel oder beweise die Unmöglichkeit.

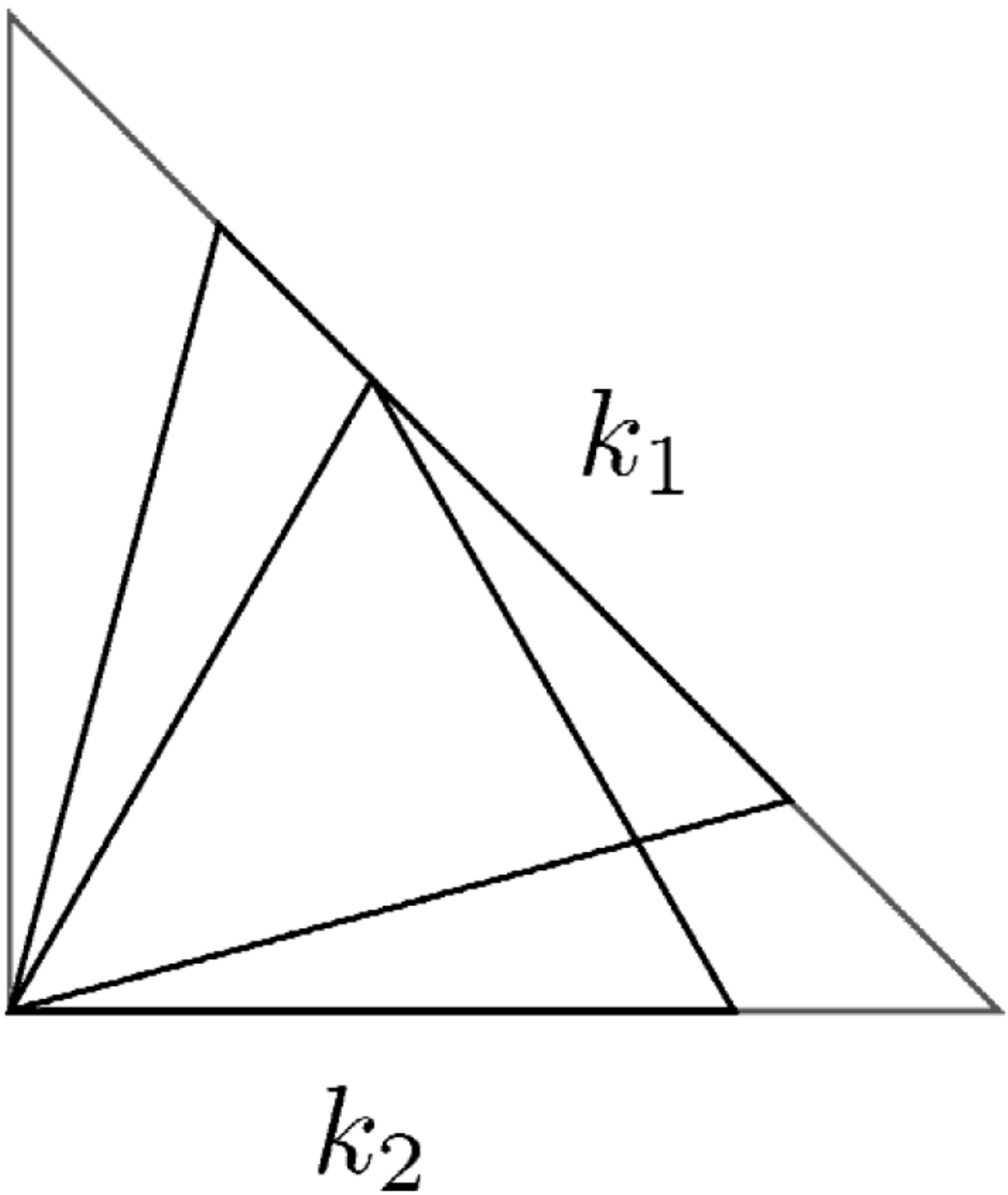
217. Der Punkt B liege auf der offenen Strecke AC. Nun werden über den Strecken AB und BC die gleichseitigen Dreiecke ΔABD und ΔBCE sowie auf die andere Seite von AC das gleichseitige Dreieck ΔCAF errichtet. Beweise, dass die Schwerpunkte dieser drei Dreiecke wiederum ein gleichseitiges Dreieck generieren, dessen

Schwerpunkt auf der Strecke AC zu liegen kommt und für dessen Seitenlänge ℓ die Darstellung

$$\ell = \sqrt{\frac{\overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC}^2}{3}}$$

gilt.

218. Einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck werden wir in der folgenden Abbildung illustriert zwei gleichseitige Dreiecke einbeschrieben. Drücke die Seitenlängen k_1 und k_2 durch die Kathetenlänge a des Ausgangsdreiecks aus.



219. Löse die Gleichung $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt[3]{x}$ für $x \geq 0$.

220. Löse über $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=1 \\ x^3+y^3+z^2=1 \end{array} \right\}$

221. D und E seien jene Punkte auf der offenen Strecke BC des Dreiecks ΔABC, für welche $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$ gilt. Ferner sei F der Mittelpunkt der Seite AC. Schließlich sei P bzw. Q der Schnittpunkt von g_{BF} mit g_{AD} bzw. g_{AE}. Beweise, dass dann $\overline{BP} = \frac{5}{3} \cdot \overline{PQ}$ gilt.

222. Für $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$ gelte $x+y+z=0$ sowie $xy+yz+xz+3=0$. Beweise, dass dann $x^3y+y^3z+z^3x$ konstant ist.

223. Auf der Hypotenuse BC eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ΔABC seien D und E jene Punkte, für die $\overline{BD} : \overline{DE} : \overline{EC} = 3:5:4$ gilt. Beweise: $\measuredangle DAE = 45°$

224. Beweise: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^3} \left\lfloor \sqrt[3]{k} \right\rfloor = \frac{n(n+1)\left(3n^2-5n+4\right)}{4}$

225. Im Dreieck ΔABC gelte $\overline{AB} > \overline{AC}$. Es sei P jener Punkt auf der Verlängerung der Strecke AB über A hinaus mit $\overline{AP} + \overline{PC} = \overline{AB}$. Ferner sei M der Mittelpunkt der Dreiecksseite BC sowie Q jener Punkt auf AB, für den g_{CQ} und g_{AM} gilt.
Beweise: $\overline{BQ} = 2 \cdot \overline{AP}$

226. Für $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$ gelte $x+y+z=0$. Beweise: $\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ac} + \frac{c^2}{2c^2+ab}$ ist konstant.

227. I sei der Inkreismittelpunkt des rechtwinkligen Dreiecks ΔABC mit der Hypotenuse AC, ferner n die Normale auf g_{AI} durch I sowie D der Schnittpunkt von g_{BC} und n. Beweise:

   (a) $g_{CI} \perp g_{AD}$
   (b) $\overline{DI} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \left(\overline{AC} - \overline{BC}\right)}$
   (c) $\overline{DI} < \overline{AB}$

228. P sei ein Punkt auf dem kürzeren Bogen CD der Umkreislinie des Quadrats $\square ABCD$. Beweise, dass $\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = \overline{BP} \cdot \overline{DP} - \overline{AP} \cdot \overline{CP}$ gilt (Hinweis: Peripheriewinkelsatz!).

229. P, Q, R und S sind innere Punkte der Seiten AB, BC, CD und AD des Quadrats $\square ABCD$ mit der Diagonalenlänge ℓ sowie dem halben Umfang $\wp$. Beweise:

$$\ell \leq \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{PS}^2} \leq \wp$$

230. X sei der Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse BC des rechtwinkligen Dreiecks ΔABC, ferner Y der Mittelpunkt der Strecke CX. Schließlich liege D auf der Verlängerung von AB über B hinaus derart, dass $\overline{AB} = \overline{BD}$ gilt.
Beweise: $g_{DX} \perp g_{AY}$

231. Beweise $\forall n \in \mathbb{N}: \; 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[8]{8} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{2^n} < 4$

232. Beweise $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ die Ungleichung $x^8 - x^5 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^4} \geq 0$.

233. P sei ein Punkt im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Normalabstände zu den Dreiecksseiten 3, 4 und 5 betragen. Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks.

234. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sowie $\forall z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beweise man

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \leq \frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}}{3}$$

und untersuche für beide involvierte Ungleichungen auch den Fall der Gleichheit.

235. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sowie $\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beweise man $(x+y)^5 \geq 12xy\,(x^3+y^3)$.

236. Für $f(x) = x^2 + x$ beweise man, dass die Gleichung $4 \cdot f(a) = f(b)$ keine Lösung mit $a \in \mathbb{Z}$ sowie $b \in \mathbb{Z}$ hat.

237. Ausgehend von $a \in \mathbb{R}^+$ sowie $b \in \mathbb{R}^+$ werden die arithmetische Zahlenfolge $\langle a, A_1, A_2, b, ...\rangle$ sowie die geometrische Zahlenfolge $\langle a, G_1, G_2, b, ...\rangle$ erzeugt. Beweise: $A_1 \cdot A_2 \geq G_1 \cdot G_2$

238. D bzw. E ist der Höhenfußpunkt auf der Seite AC bzw. AB des Dreiecks ΔABC mit $\measuredangle ABC = 60°$ sowie $\overline{AB} = \frac{4}{5} \cdot \overline{BC}$. Ferner sei M der Mittelpunkt der Strecke BD und schneide die Umkreislinie des Dreiecks ΔBMC die Gerade g_{AC} nebst C auch noch in N. Schließlich sei P der Schnittpunkt von g_{BN} und g_{CM}. Beweise: $\measuredangle EDP = 90°$

239. Löse über $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: $\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y = z + 2 \end{array} \right\}$

240. Die Diagonalen eines Trapezes mit den Parallelseiten a und c sowie der Höhe h begrenzen mit den Trapezschenkeln zwei Dreiecke. Es bezeichne $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$ die beiden Dreiecksflächeninhalte sowie $m_h(x,y)$ das harmonische Mittel von x und y. Beweise: $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{h}{2} \cdot m_h(a,c)$

241. Auf der Seite AD bzw. AB resp. BC eines Rechtecks $ABCD$ wird der Punkt P bzw. Q resp. R so gewählt, dass $\overline{AP} = \overline{RC}$ gilt. Beweise, dass der Polygonzug PQR mindestens so lange als jede der beiden Rechtecksdiagonalen ist.

242. Die Tangenten an die Umkreislinie des Dreiecks ΔABC in den Eckpunkten A und B schneiden einander in T. Die Parallele zu g_{AC} durch T schneide g_{BC} in D. Beweise: $\overline{AD} = \overline{CD}$

243. Über zwei gegenüberliegenden Seiten eines Quadrats werden nach innen gleichseitige Dreiecke errichtet und anschließend über den anderen beiden Quadratseiten gleichseitige Dreiecke nach außen. Man beweise, dass die vier neu entstehenden Eckpunkte der Dreiecke eine Raute generieren, welche den gleichen Flächeninhalt als das Ausgangsquadrat aufweist und ermittle auch die Maße der Innenwinkel dieser Raute.

Gutes Gelingen!

Wien, im August 2019. Dr. Robert Resel, eh.