50. Österreichische Mathematische Olympiade

Vorbereitungskurs für Anfänger

`Kursleiter:` Dr. Robert Resel

`Schuljahr:` 2018/19

`Kursort:` AHS Heustadelgasse

Vermischte Übungsaufgaben, Teil 1

1. Ermittle alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $n|p(n)$ mit $p(n) = n^2 + 3n + 27$ gilt.

2. Bestimme alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $(n+1)|q(n)$ mit $q(n) = n^2 + 1$ gilt.

3. Berechne alle $x \in \mathbb{N}$ sowie alle dazu passenden $y \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$ gilt.

4. Beweise: Sind x^2 und y^2 ungerade Quadratzahlen, so kann $x^2 + y^2$ keine Quadratzahl sein.

5. Beweise: $\underbrace{1111...1111}_{2n \text{ Ziffern}} = \underbrace{2222...2222}_{n \text{ Ziffern}} + \left(\underbrace{3333...3333}_{n \text{ Ziffern}}\right)^2$

6. Beweise: Gilt zwischen den reellen Zahlen a, b und c die Gleichung $a^2 + 2bc = 1$, so auch die Ungleichung $(a^2 + 2b^2) \cdot (a^2 + 2c^2) \geq 1$.

7. Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}^+$ ist die Ungleichung $a^3b^3 + 3a^2b^2 + 3ab + 1 \geq (a+b)^3$ zu beweisen.

8. Beweise für $x \in \mathbb{R}$ sowie $y \in \mathbb{R}^+$ mit $x + y > 0$ die Ungleichung $\frac{y}{x+y} + \frac{x}{y} \geq 1$.

9. Für $x \in \mathbb{R}^+$ und $y \in \mathbb{R}^+$ ist die Ungleichung $\left(x + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right) \leq \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2$ zu beweisen.

10. Beweise für $a \in \mathbb{R}$ sowie $b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung
$$a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 \leq 3 \cdot \left(a^5 + b^5\right).$$

11. Aus den ersten fünfzehn natürlichen Zahlen (ohne der 0) sind zwei Zahlen derart auszuwählen, dass deren Produkt der Summe der dreizehn verbleibenden Zahlen gleicht. Ist dies möglich?

50. Österreichische Mathematische Olympiade

Vorbereitungskurs für Anfänger

`Kursleiter:` Dr. Robert Resel

`Schuljahr:` 2018/19

`Kursort:` AHS Heustadelgasse

Vermischte Übungsaufgaben, Teil 2

12. Für $x \in \mathbb{R}^+$ und $y \in \mathbb{R}^+$ mit $x+y=4$ ist die Ungleichung $\dfrac{(2x+1)^2}{x}+\dfrac{(2y+1)^2}{y} \geq 25$ zu beweisen.

13. In der Abbildung auf der letzten Seite wurde einer der vier Eckpunkte eines Quadrats an einem seiner benachbarten Eckpunkte gespiegelt, woraus in der angegebenen Art und Weise ein Rechteck (mit geflochtener Struktur) generiert wurde. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte von Rechteck und Quadrat? Wieviel Prozent des Rechtecks liegen außerhalb des Quadrats?

14. Für $x \in \mathbb{R}^+$ und $y \in \mathbb{R}^+$ ist die Ungleichung $(x+y) \cdot \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \geq 4$ zu beweisen.

15. Beweise für $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}^+$ und $z \in \mathbb{R}^+$ die Ungleichung $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$.

16. Für $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$ ist die Ungleichung $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ zu beweisen.

17. Beweise für $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $(x+y+z)^2 \geq 3 \cdot (xy+yz+zx)$.

18. Für $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$ ist die Ungleichung $3 \cdot (x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$ zu beweisen.

19. Beweise für $w \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}^+$ und $z \in \mathbb{R}^+$ die Ungleichung

$$\sqrt{(w+y)(x+z)} \geq \sqrt{wx}+\sqrt{yz}.$$

20. Für $x \in \mathbb{R}^+$ und $y \in \mathbb{R}^+$ ist die Ungleichung $\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2} \geq \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ zu beweisen.

21. Beweise die $\forall x \in \mathbb{R}$ gültige Ungleichung $x^4-4x+3 \geq 0$.

22. Ermittle, welche der beiden Differenzen $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ und $\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ größer ist, wobei $a > 1$ gilt.

50. Österreichische Mathematische Olympiade

Vorbereitungskurs für Anfänger

`Kursleiter:` Dr. Robert Resel

`Schuljahr:` 2018/19

`Kursort:` AHS Heustadelgasse

Vermischte Übungsaufgaben, Teil 3

23. Für $a \in \mathbb{R}$ ist zu beweisen: Weist die quadratische Gleichung $x^2 - ax + a = 0$ die reellen Lösungen x_1 und x_2 auf, dann gilt die Ungleichung ${x_1}^2 + {x_2}^2 \geq 2 \cdot (x_1 + x_2)$.

24. Beweise die $\forall x \in \mathbb{R}^+$ sowie $\forall y \in \mathbb{R}^+$ gültige Ungleichung $1 + \dfrac{1}{xy} \geq \dfrac{4}{x+y}$.

25. Beweise: Gelten ausgehend von $z \in \mathbb{R}^+$ die Ungleichungen $w > 2x$, $x > 3y$ und $y > 4z$, dann auch die folgende Ungleichung: $wx + 72yz > 12wz + 6xy$.

26. Ermittle alle $n \in \mathbb{N}$, für die $(n-3)|(20n-11)$ gilt!

27. Beweise: Ist p eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl, dann gilt $24|\,(p^2-1)$.

28. Beweise (etwa mittels vollständiger Induktion) die $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gültige Ungleichung $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1}}$.[1]

29. Für $x \in \mathbb{R}^+$ und $y \in \mathbb{R}^+$ ist die Ungleichung $\sqrt{x+y} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x+4y}$ zu beweisen.

30. Beweise die $\forall x \in \mathbb{R}$ gültige Ungleichung $1 + 2x^4 \geq x^2 + 2x^3$.

31. Über den Seiten AB und AC eines beliebigen Dreiecks ΔABC werden nach außen die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke ΔAKB und ΔACL (mit den Hypotenusen AB und AC) errichtet, ferner sei mit M der Mittelpunkt der Dreiecksseite BC

---

[1] Bemerkung für später (Wahlpflichtfach!): Aus

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}$$

lässt sich folgern, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ zwischen $\frac{3}{2}$ und 2 liegt, wobei der tatsächlich Wert faszinierenderweise exakt $\frac{\pi^2}{6}$ beträgt (wobei sich Letzteres auch im Wahlpflichtfach zeigen lässt).

bezeichnet. Beweise, dass auch ΔLKM gleichschenklig-rechtwinklig (mit welcher Hypotenuse?) ist und drücke den Flächeninhalt von ΔLKM durch den Flächeninhalt von ΔABC sowie die Seitenlängen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ aus.

$\boxed{\text{Gutes Gelingen!}}$

Wien, im Juli 2018. Dr. Robert Resel, eh.