Zusammenfassung der 33 zusätzlichen direkt auf der 8C-Seite deponierten Übungsaufgaben

(*Dr. Resel, Jänner 2014*)

Bilden die Bildpunkte der Lösungen x_k $(1 \leq k \leq 4)$ einer normierten algebraischen Gleichung vierten Grades mit reellen Koeffizienten in der GAUSSschen Zahlenebene ein Rechteck, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist, so gilt

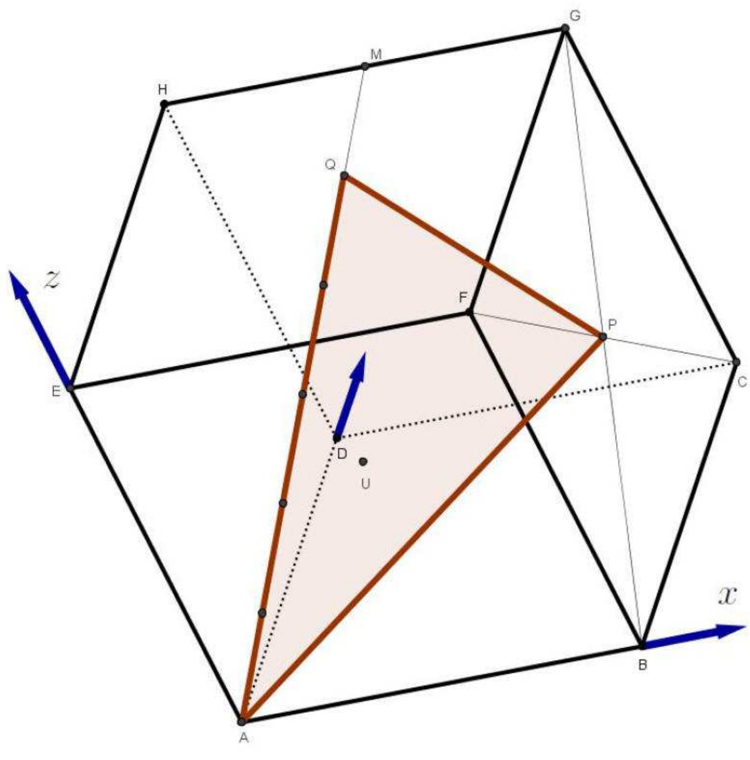
1. $a_1 = a_3 = 0$
2. $a_0 = \left(\frac{a_2}{2}\right)^2 + \Im^2(x_k^2)$, $1 \leq k \leq 4$

Begründe Punkt 1 allgemein und verifiziere Punkt 2 anhand der konkreten Gleichung $x^4 - 10x^2 + a_0 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 3 - 2i$!

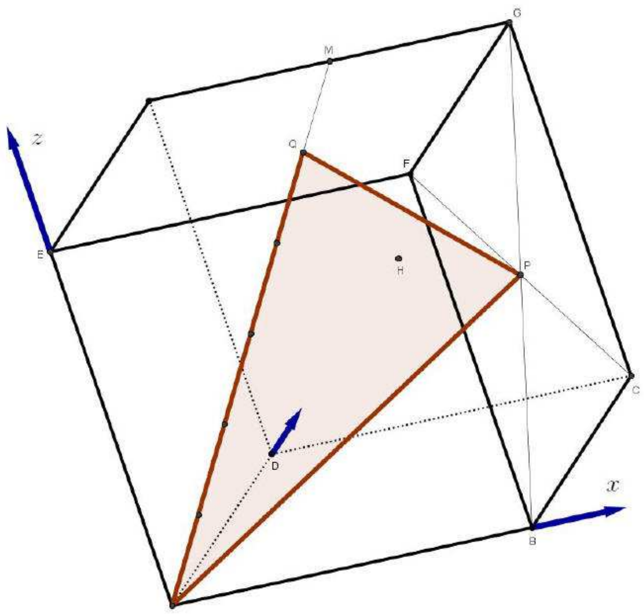
Bilden die Bildpunkte der Lösungen x_k $(1 \leq k \leq 4)$ einer normierten algebraischen Gleichung vierten Grades mit reellen Koeffizienten in der GAUSSschen Zahlenebene ein Rechteck, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist, so gilt

1. $a_1 = a_3 = 0$
2. $a_2 = 4 \cdot \Im^2(x_k) - 2 \cdot \sqrt{a_0}$, $1 \leq k \leq 4$

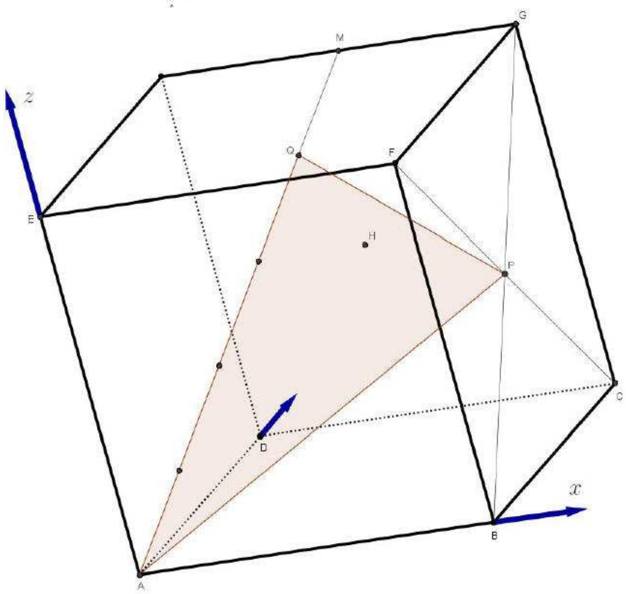
Begründe Punkt 1 allgemein und verifiziere Punkt 2 anhand der konkreten Gleichung $x^4 + 16x^2 + a_0 = 0$ mit der Lösung $x_1 = -1 - 3i$!



In der linken Figur ist ein Würfel $ABCDEFGH$ der Seitenlänge 24 abgebildet. M ist ein Kantenmittelpunkt, P ist ein Flächenmittelpunkt. Q entsteht durch Sechstelung der Strecke AM.
Zeige, dass der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ΔAPQ auf der Raumdiagonale AG liegt und gib die exakte Lage durch ein Teilverhältnis an! Das angegebene Koordinatensystem ist nicht verbindlich, aber durchaus zu empfehlen.

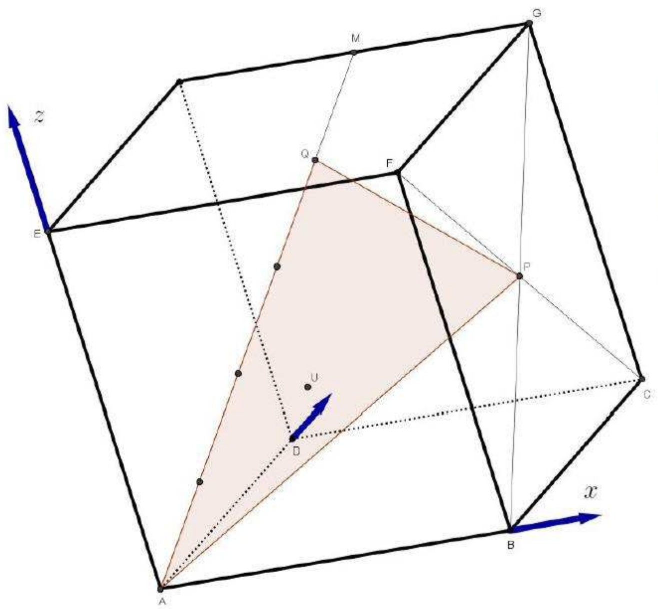


In der linken Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 24 abgebildet. M ist ein Kantenmittelpunkt, P ist ein Flächenmittelpunkt. Q entsteht durch Sechstelung der Strecke AM. Berechne im angegebenen Koordinatensystem die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H des Dreiecks ΔAPQ!



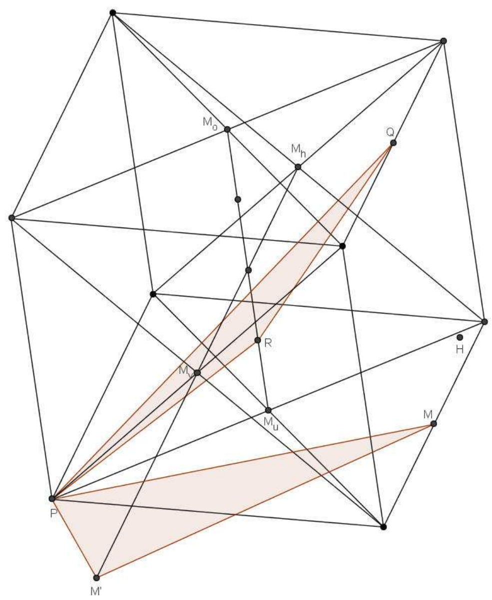
In der linken Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 20 abgebildet. M ist ein Kantenmittelpunkt, P ist ein Flächenmittelpunkt. Q entsteht durch Fünftelung der Strecke AM. Zeige, dass der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ΔAPQ auf der Raumdiagonale AG liegt und gib die exakte Lage durch ein Teilverhältnis an!

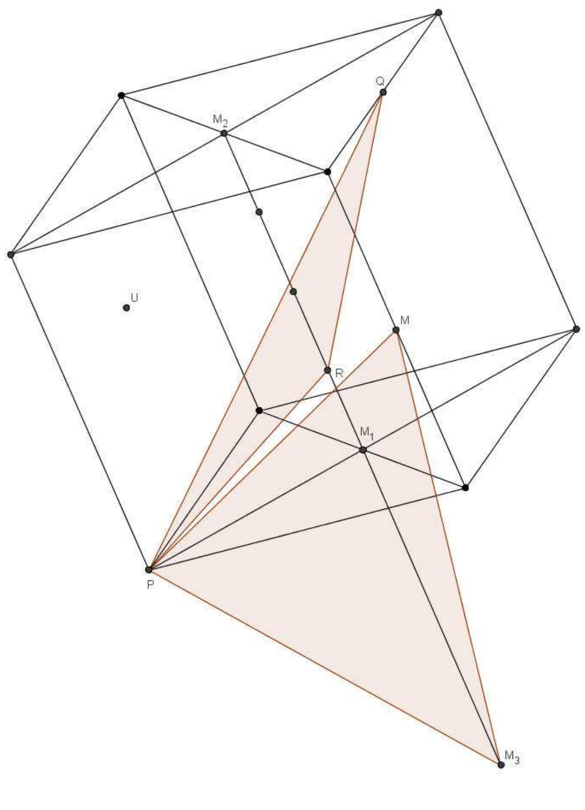
Das angegebene Koordinatensystem ist nicht verbindlich, aber durchaus zu empfehlen.



In der linken Figur ist ein Würfel $ABCDEFGH$ der Seitenlänge 20 abgebildet. M ist ein Kantenmittelpunkt, P ist ein Flächenmittelpunkt. Q entsteht durch Fünftelung der Strecke AM. Berechne im angegebenen Koordinatensystem die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U des Dreiecks ΔAPQ!

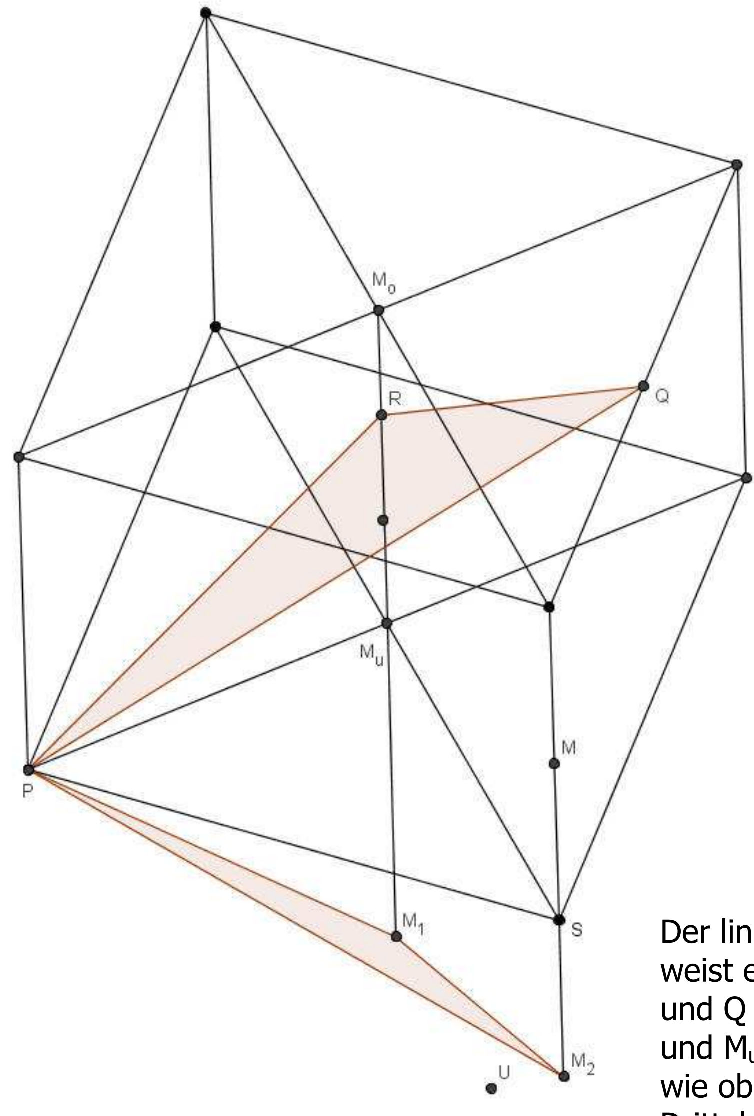
Der rechts abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 68 auf. M und Q sind Kantenmittelpunkte. M_o, M_u, M_v und M_h sind Flächenmittelpunkte (o/u wie oben/unten sowie v/h für vorne/hinten). R entsteht durch Viertelung der Strecke M_uM_h, M' ist der Spiegelpunkt von M_h an M_v. Zeige, dass der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ΔPQR in der durch M, M' und P aufgespannten Ebene liegt.

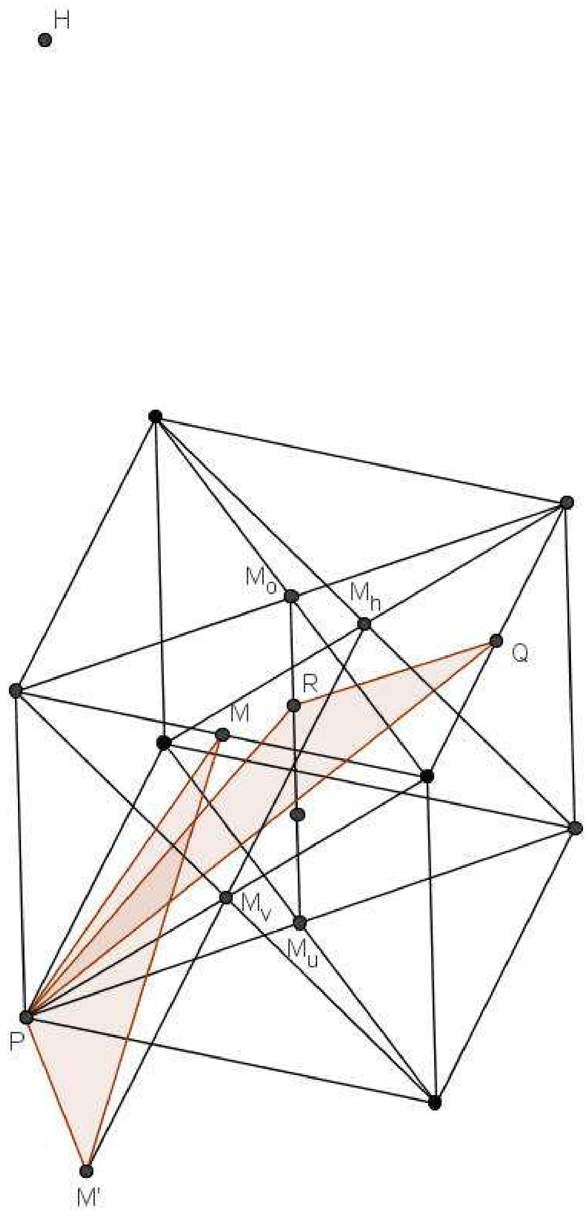




Der links abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 136 auf. M und Q sind Kantenmittelpunkte. M_1 und M_2 sind Flächenmittelpunkte. R entsteht durch Viertelung der Strecke M_1M_2, M_3 ist der Spiegelpunkt von M_2 an M_1. Zeige, dass der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ΔPQR in der durch M, M_3 und P aufgespannten Ebene liegt.

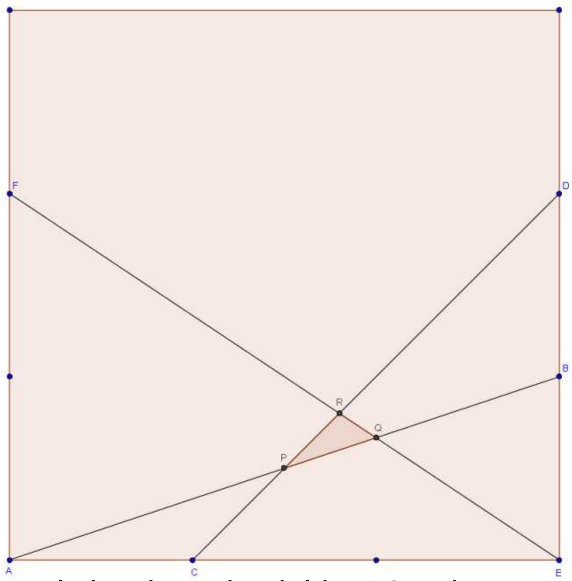
Der rechts abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 6 auf. M und Q sind Kantenmittelpunkte. M_o, M_u, M_v und M_h sind Flächenmittelpunkte (o/u wie oben/unten sowie v/h für vorne/hinten). R entsteht durch Drittelung der Strecke M_uM_h, M' ist der Spiegelpunkt von M_h an M_v. Zeige, dass der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ΔPQR in der durch M, M' und P aufgespannten Ebene liegt.



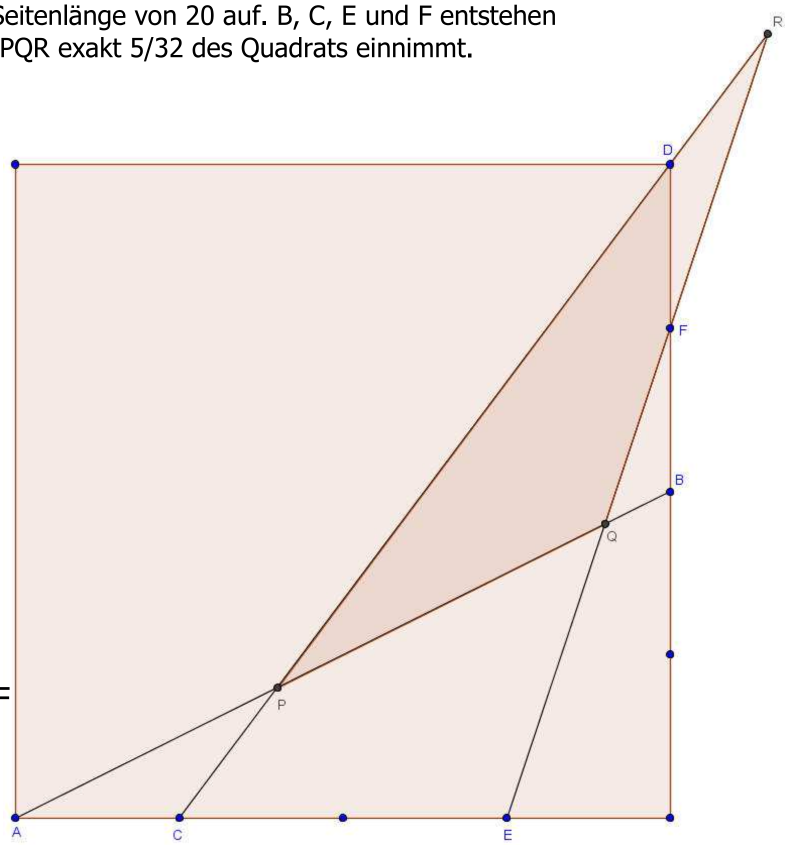


Der links oben abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 12 auf. M und Q sind Kantenmittelpunkte. M_o und M_u sind Flächenmittelpunkte (o/u wie oben/unten). R entsteht durch Drittelung der Strecke M_oM_u, M_1 ist der Spiegelpunkt von M_o an M_u, M_2 jener von M an S. Zeige, dass der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ΔPQR in der durch M_1, M_2 und P aufgespannten Ebene liegt.

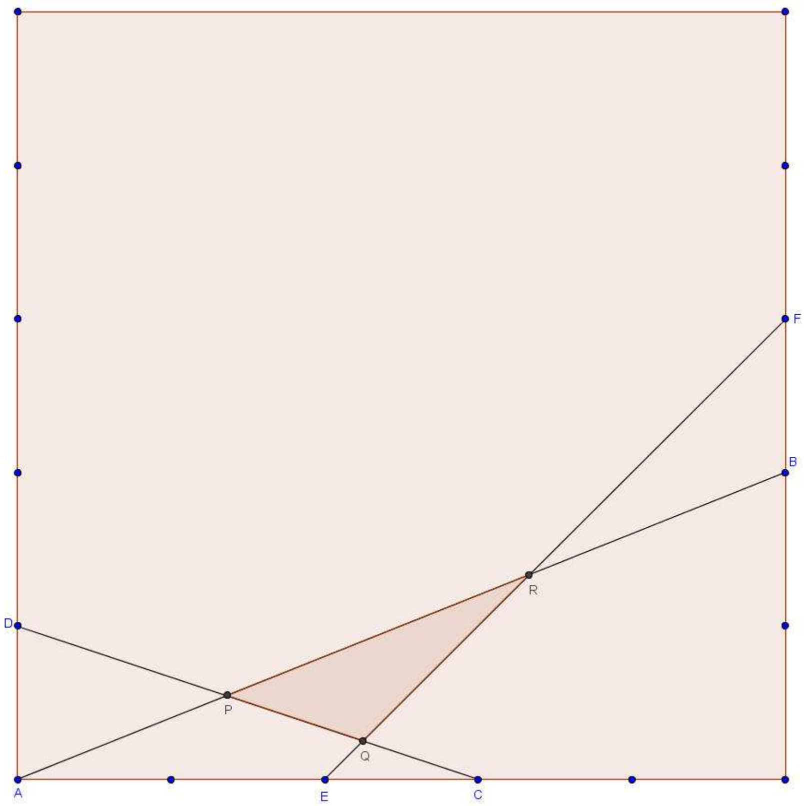
Das rechts unten abgebildete Quadrat weist eine Seitenlänge von 20 auf. B, C, E und F entstehen durch Kantenviertelung. Zeige, dass das Dreieck ∆PQR exakt 5/32 des Quadrats einnimmt.



Das links oben abgebildete Quadrat weist eine Seitenlänge von 90 auf. B, C, D und F entstehen durch Kantendrittelung. Zeige, dass das Dreieck ∆PQR weniger als 1% des Quadrats einnimmt und gib den exakten Anteil als gekürzten Bruch an!

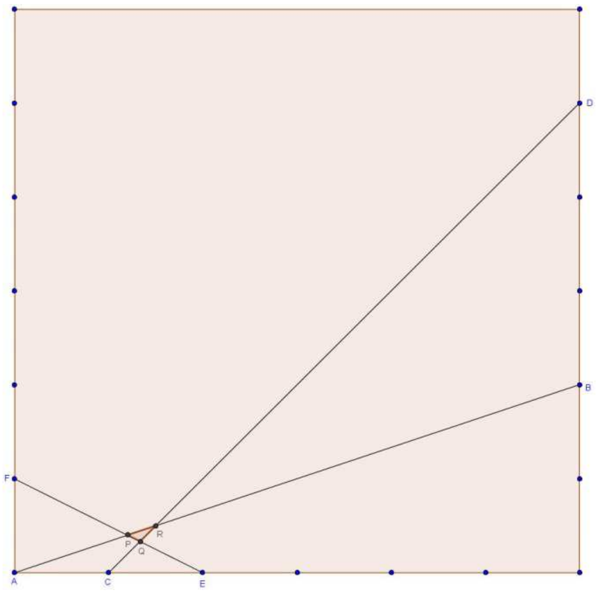


Das links unten abgebildete Quadrat weist eine Seitenlänge von 660 auf. B, C, D, E und F entstehen durch Kantenfünftelung. Zeige, dass das Dreieck ∆PQR mehr als 1/40, aber weniger als 1/39 des Quadrats einnimmt!

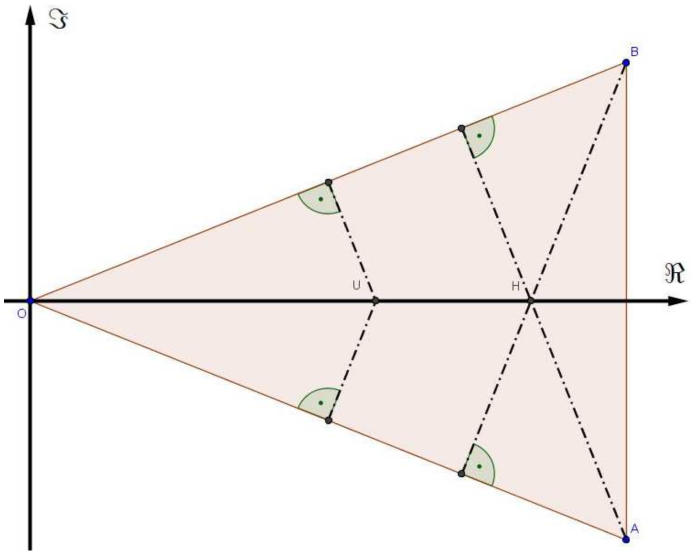


Das rechts unten abgebildete Quadrat weist eine Seitenlänge von 180 auf. B, C, D, E Und F entstehen durch Kantensechstelung. Zeige, dass

das Dreieck ∆PQR weniger als ein halbes Promille des Quadrats einnimmt und gib den exakten Anteil als gekürzten Bruch an!



Bilden die Bildpunkte H und U der reellen Lösungen $x_{1,2}$ einer normierten algebraischen Gleichung vierten Grades mit reellen Koeffizienten in der GAUSSschen Zahlenebene den Höhenschnitt- und Umkreismittelpunkt jenes Dreiecks, dessen Eckpunkte der Ursprung sowie die Bildpunkte A und B der konjugiert-komplexen Lösungen $x_{3,4}$ sind, so gilt ...



... $a_3 = \frac{\mathcal{H}(x_3,x_4)}{2} - 2 \cdot (x_3 + x_4)$, wobei $\mathcal{H}(u, v)$ das harmonische Mittel von u und v bezeichnet.
Verifiziere dies anhand der konkreten Gleichung

$$x^4 - 31x^3 + 364x^2 - 1890x + a_0 = 0$$

für $x_3 = 9 - 3i$ (Bestätige $a_0 = 3600$.)!

$a_2 = x_1x_2 + (x_3 + x_4)^2$.
Verifiziere dies anhand der konkreten Gleichung

$$x^4 - 27x^3 + 286x^2 - 1360x + a_0 = 0$$

für $x_3 = 8 + 4i$ (Bestätige $a_0 = 2400$.)!

$a_1 = -(2x_1 + x_2)x_3x_4$.
Verifiziere dies anhand der konkreten Gleichung

$$x^4 - 59x^3 + 1426x^2 - 15444x + a_0 = 0$$

$x_1 + 2x_2 = x_3 + x_4$.
Verifiziere dies anhand der konkreten Gleichung

$$x^4 - 103x^3 + 4446x^2 - 84800x + a_0 = 0$$

für $x_3 = 32 + 24i$ (Bestätige $a_0 = 560000$.)!

$a_0 = \frac{x_1 x_3^2 x_4^2}{x_3+x_4}$ $(*)$.
Verifiziere dies anhand der konkreten Gleichung

$$x^4 - 87x^3 + 2812x^2 - 39650x + a_0 = 0$$

für $x_3 = 25 - 5i$ [Bestätige $a_0 = 202800$ zunächst ohne Verwendung von $(*)$!]!

$a_3 = -2x_1 - 3x_2$.
Verifiziere dies anhand der konkreten Gleichung

$$x^4 - 83x^3 + 2772x^2 - 41650x + a_0 = 0$$

für $x_3 = 25 + 15i$ (Bestätige $a_0 = 231200$.)!

... $a_2 = (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4 + \mathcal{H}(x_3, x_4))$, wobei $\mathcal{H}(u, v)$ das harmonische Mittel von u und v bezeichnet.
Verifiziere dies anhand der konkreten Gleichung

$$x^4 - 111x^3 + 4606x^2 - 83776x + a_0 = 0$$

für $x_3 = 32 - 8i$ (Bestätige $a_0 = 554880$.)!

... $\frac{x_1 x_2}{x_3 x_4} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\Im^2({}_3x_4)}{\Re^2({}_3x_4)}\right)$, wobei $\Re(w)$ bzw. $\Im(w)$ den Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Zahl w bezeichnet.
Verifiziere dies anhand der konkreten Gleichung

$$x^4 - 171x^3 + 11218x^2 - 327700x + a_0 = 0$$

für $x_3 = 50 + 20i$ (Bestätige $a_0 = 3532200$.)!

Challenge I: Beweise allgemein, dass $x_1 = \frac{\Re({}_3x_4{}^2)}{\Re({}_3x_4)}$ gilt!

Challenge II: Beweise allgemein, dass $U = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{H}(A, B)$ gilt, wobei U der reellen Lösung x_2 sowie A und B dem konjugiert-komplexen Lösungspaar ${}_3x_4$ entspricht.

Parallelaufgaben zu den Raumgeometrieaufgaben 2 bis 7 bzw. 8 bis 13 (ergo 25. und 26. bzw. 27. und 28. zusätzliche Aufgabe):

$$\varepsilon: \; X = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

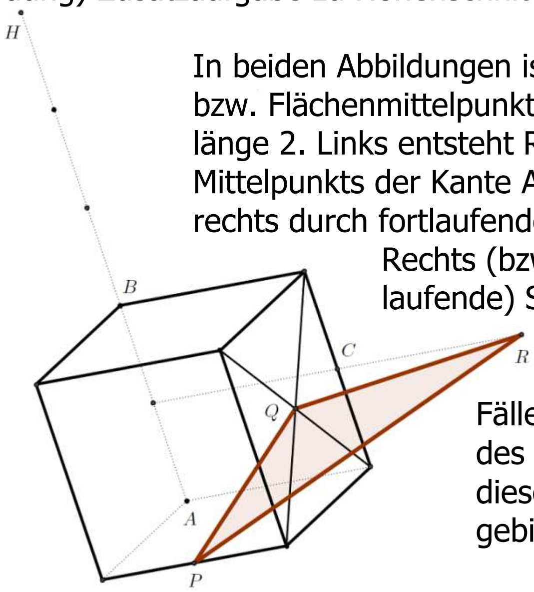
$$\varepsilon: \; X = \begin{pmatrix} 25 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

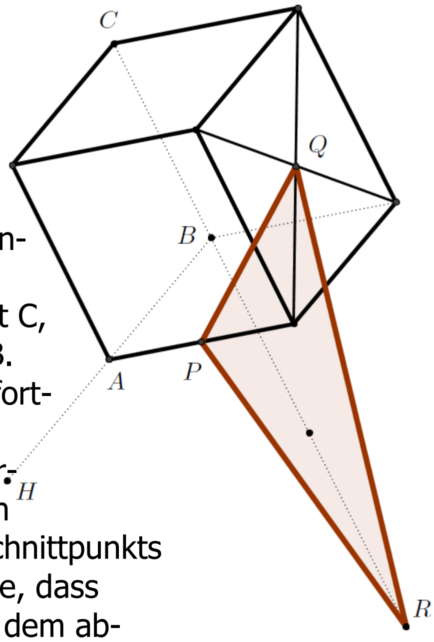
Parallelaufgaben zu den Raumgeometrieaufgaben
14 bis 19 (ergo 29. und 30. zusätzliche Aufgabe):

$$\varepsilon_1 : \quad -6x + 7y + 8z = 34, \quad \varepsilon_2 : \quad -8x + 11y + 14z = 52$$

$$\varepsilon_2 : \quad -4x - y + 3z = 13, \quad \varepsilon_2 : \quad x + 5y - 8z = -23$$

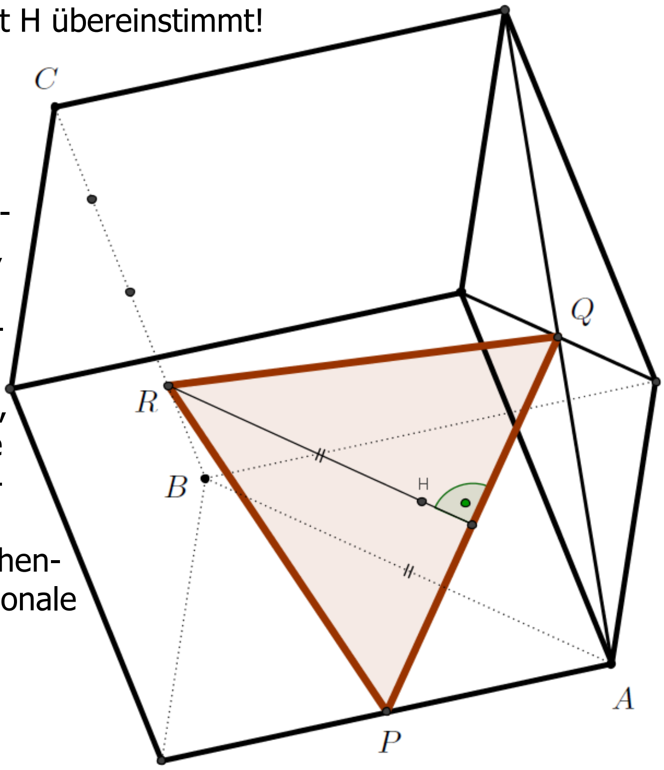
31. (linke Abbildung) und 32. (rechte Abbildung) Zusatzaufgabe zu Höhenschnittpunkten:





In beiden Abbildungen ist P bzw. Q ein Kanten- bzw. Flächenmittelpunkt eines Würfels der Seitenlänge 2. Links entsteht R durch Spiegelung des Mittelpunkts der Kante AB am Kantenmittelpunkt C, rechts durch fortlaufende Spiegelung von C an B. Rechts (bzw. links) geht H durch (fortlaufende) Spiegelung von B an A (bzw. von A an B) hervor. Ermittle in beiden Fällen die Lage des Höhenschnittpunkts des Dreiecks ΔPQR und zeige, dass dieser in der Tat jeweils mit dem abgebildeten Punkt H übereinstimmt!

33. Aufgabe: In der rechten Figur ist ein Würfel der Kantenlänge 8 abgebildet. P bzw. Q ist ein Kanten- bzw. Flächenmittelpunkt, R entsteht durch Viertelung der Kante AB. Ermittle die Lage des Höhenschnittpunkts H des Dreiecks ΔPQR und zeige, dass die eingezeichnete Höhe zur Diagonale AB parallel verläuft. In welchem Verhältnis stehen die entsprechende Höhenlänge und die Länge der Diagonale AB zueinander?



Wien, im Jänner 2014.

Dr. Robert Resel, eh.