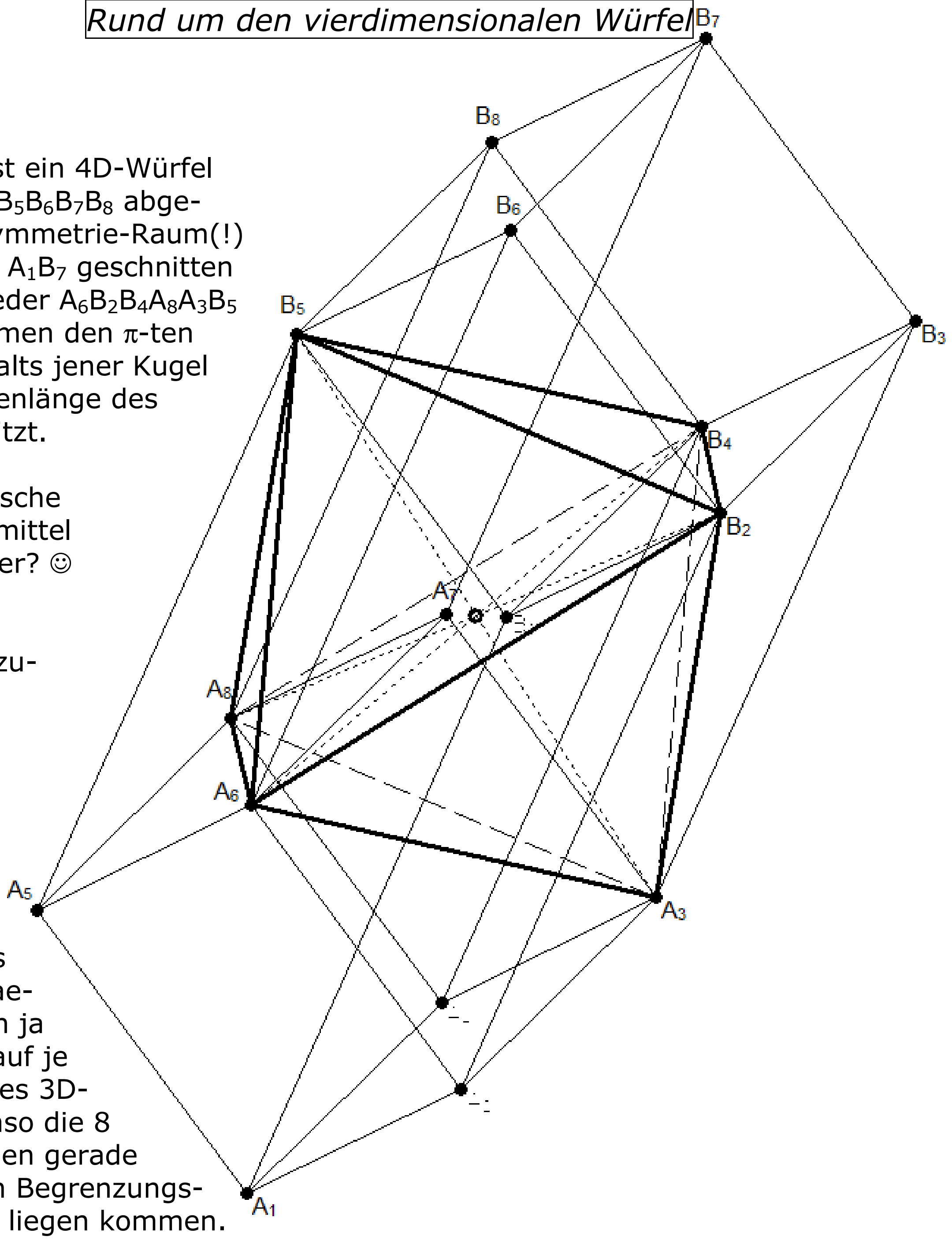
Rund um den vierdimensionalen Würfel



In nebenstehender Figur ist ein 4D-Würfel $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8$ abgebildet, welcher mit dem Symmetrie-Raum(!) σ der Hyperraumdiagonale A_1B_7 geschnitten wird, was das Schnittoktaeder $A_6B_2B_4A_8A_3B_5$ generiert, dessen 3D-Volumen den π-ten Bruchteil des 3D-Rauminhalts jener Kugel ausmacht, welche die Seitenlänge des 4D-Würfels als Radius besitzt.

Schwer (bzw. ohne analytische und Kombinatorische Hilfsmittel gar nicht) vorzustellen, oder? ☺

Wenn wir eine Dimension zurückschalten und stattdessen die Symmetrieebene einer Würfelraumdiagonale mit dem Würfel schneiden, erhalten wir ein regelmäßiges Sechseck, womit bereits ein gewisses niedrigerdimensionales Analogon zum obigen Oktaeder gefunden wäre, da sich ja die sechs Sechseckseiten auf je einer Begrenzungsfläche des 3D-Würfels befinden und ebenso die 8 Oktaederbegrenzungsflächen gerade in den 8 dreidimensionalen Begrenzungswürfeln des 4D-Würfels zu liegen kommen.

Dies wirft andererseits freilich sofort die Frage auf, welches vierdimensionale Polytop sich als Schnitt eines 5D-Würfels mit dem vierdimensionalen Symmetrieraum einer seiner 5D-Raumdiaogonalen ergibt … ☺

Doch dazu gilt es erst einmal, bestimmte lineare Phänomene der vierdimensionalen Geometrie genauer zu studieren, z.B.(!) wie man im $\mathbb{R}^4$ einen Punkt um eine Ebene(!!) dreht ($\rightarrow$ next page)!

Rund um den vierdimensionalen Würfel

In nebenstehender Figur ist ein 4D-Würfel $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8$ der Seitenlänge 6 zusammen mit den Flächendiagonalen A_1A_6 und B_2B_7 abgebildet, welche durch eine Drehung um eine Ebene(!) aufeinander abgebildet werden sollen. In der Figur ist nur die Verbindungsstrecke der Bahnkreismittelpunkte als **Drehachse** (zusammen mit den entsprechend gefärbten Bahnkreisradien) eingezeichnet.

Ermittle eine Parameterdarstellung der Drehebene (als Schnittebene der Symmetrieräume der Strecken A_1B_2 und A_6B_7) sowie je eine Binormalvektorform der zur Drehebene jeweils orthogonalen Ebenen, in denen die Drehung jeweils stattfindet, zeige, dass alle *vier(!)* Drehradien gleich groß sind, dass der Drehwinkel exakt 120° misst und dass der *gemeinsame Drehradius* sich zum Drehachsenabschnitt zwischen den Bahnkreismittelpunkten wie sin45° (oder cos45°) verhält.