

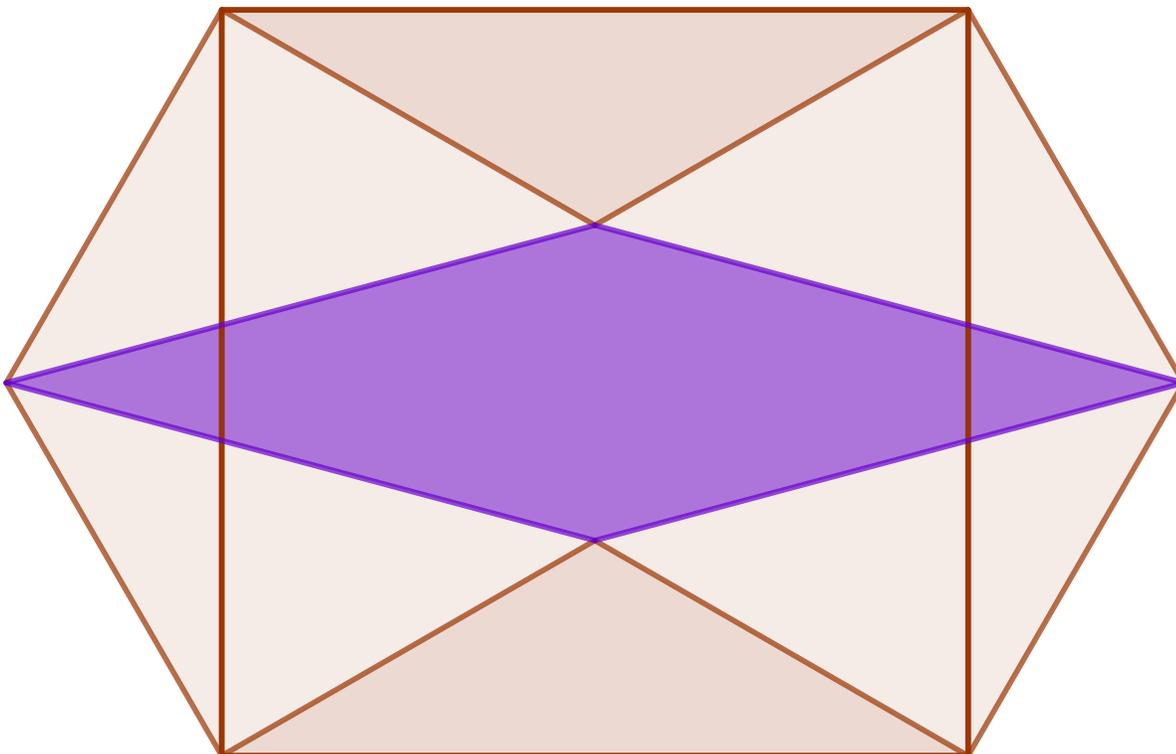


≥ 51. Österreichische Mathematische Olympiade 2020

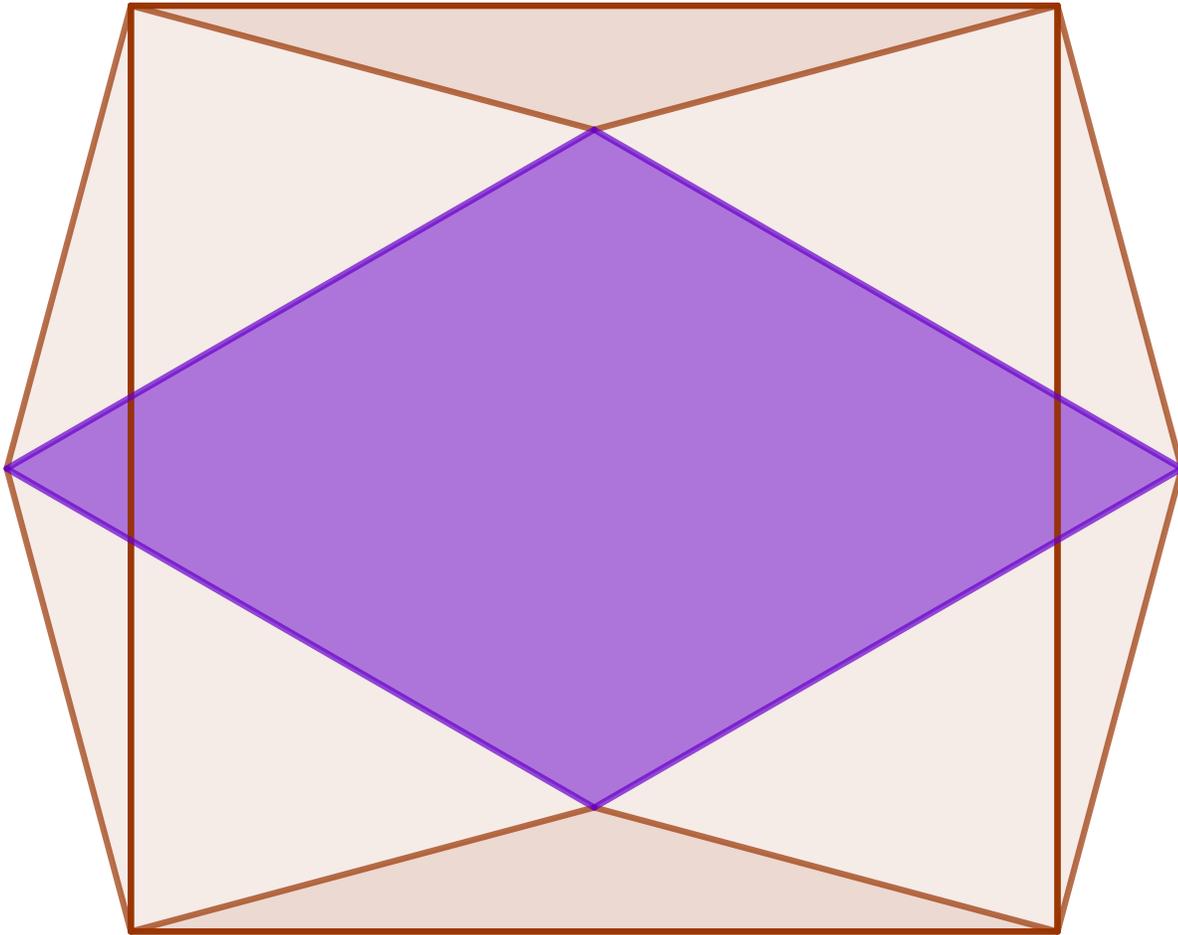
4 abschließende Aufgaben

Kursleiter: Dr. Robert Resel

1. In der unteren Abbildung wurden einem Quadrat auf je zwei gegenüberliegenden Seiten gleichschenklige Dreiecke nach innen bzw. außen aufgesetzt, wobei die Winkel an der Spitze jeweils 120° betragen. Beweise, dass die vier neu entstehenden Eckpunkte der Dreiecke eine Raute generieren, deren Flächeninhalt exakt ein Drittel des Quadratflächeninhalts beträgt und ermittle auch die Maße der Innenwinkel dieser Raute.



2. In der unteren Abbildung wurden einem Quadrat auf je zwei gegenüberliegenden Seiten gleichschenklige Dreiecke nach innen bzw. außen aufgesetzt, wobei die Winkel an der Spitze jeweils 150° betragen. Beweise, dass die vier neu entstehenden Eckpunkte der Dreiecke eine Raute generieren, deren Flächeninhalt weniger als die Hälfte des Quadratflächeninhalts beträgt (Gib den exakten Anteil mit Hilfe der Wurzel aus 3 an.) und ermittle auch die Maße der Innenwinkel dieser Raute.



3. Beweise:
$$\sum_{k=1}^{n^4} \left\lfloor \sqrt[4]{k} \right\rfloor = \frac{n(24n^4 - 15n^3 - 10n^2 + 31)}{30}$$

4. Beweise:
$$\sum_{k=1}^{n^5} \left\lfloor \sqrt[5]{k} \right\rfloor = \frac{n(n+1)(10n^4 - 16n^3 + 11n^2 - 11n + 12)}{12}$$

Gutes Gelingen!

Wien, im August 2019.

Dr. Robert Resel, eh.

