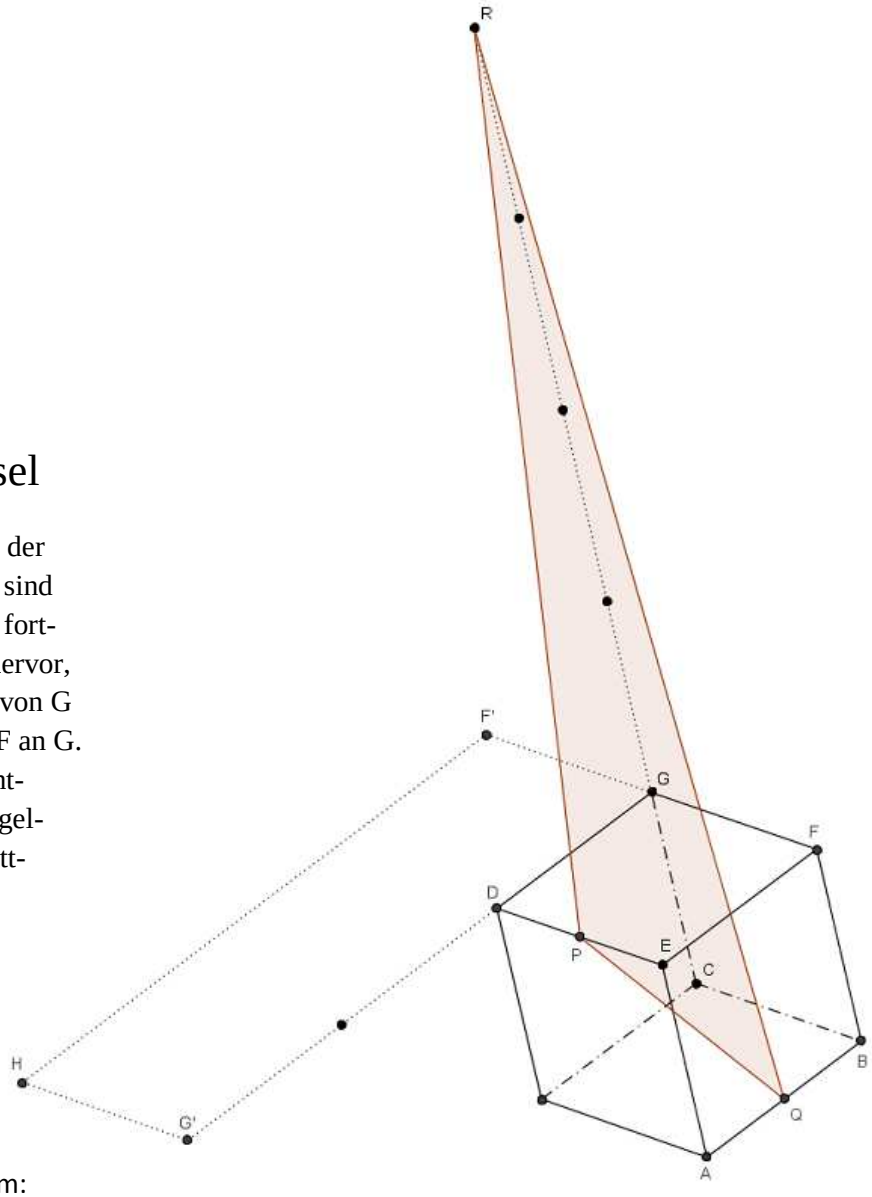
Übungen zur räumlichen analytischen Geometrie

8C(Rg), 2013/14, Dr. R. Resel

1) In der rechten Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 2 abgebildet. P und Q sind Kantenmittelpunkte, R geht durch fortlaufende Spiegelung von C an G hervor, G´ durch fortlaufende Spiegelung von G an D. F´ ist der Spiegelpunkt von F an G. H ist der vierte Eckpunkt des Rechtecks F'GG'H. Zeige, dass der Spiegelpunkt von G an H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ΔPQR ist!



Aufgaben 2) bis 7):
Wandle die angegebene Parameterdarstellung der Ebene in eine Normalvektorform um:

2.
$$\varepsilon:\ X=\begin{pmatrix}8\\5\\-10\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-7\end{pmatrix}$$

3.
$$\varepsilon:\ X=\begin{pmatrix}2\\18\\-10\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$$

4.
$$\varepsilon:\ X=\begin{pmatrix}13\\4\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-6\end{pmatrix}$$

5.
$$\varepsilon:\ X=\begin{pmatrix}5\\-3\\10\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\9\\7\end{pmatrix}$$

6.
$$\varepsilon:\ X=\begin{pmatrix}1\\15\\6\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\\4\end{pmatrix}$$

7.
$$\varepsilon:\ X=\begin{pmatrix}13\\27\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}5\\6\\1\end{pmatrix}$$

Aufgaben 8) bis 13): Berechne die Koordinaten der Spurpunkte der Ebenen aus den Aufgaben 2 bis 8, und zwar sowohl mit als auch ohne Verwendung der Resultate dieser Aufgabenstellungen!

Aufgaben 14) bis 19): Ermittle jeweils eine Parameterdarstellung der Schnittgerade s der Ebenen ε_1 und ε_2:

14) ε_1: x+9y+3z=33, ε_2: x+4y+z=13

15) ε_1: 3x+y+2z=20, ε_2: 5x+3y–2z=28

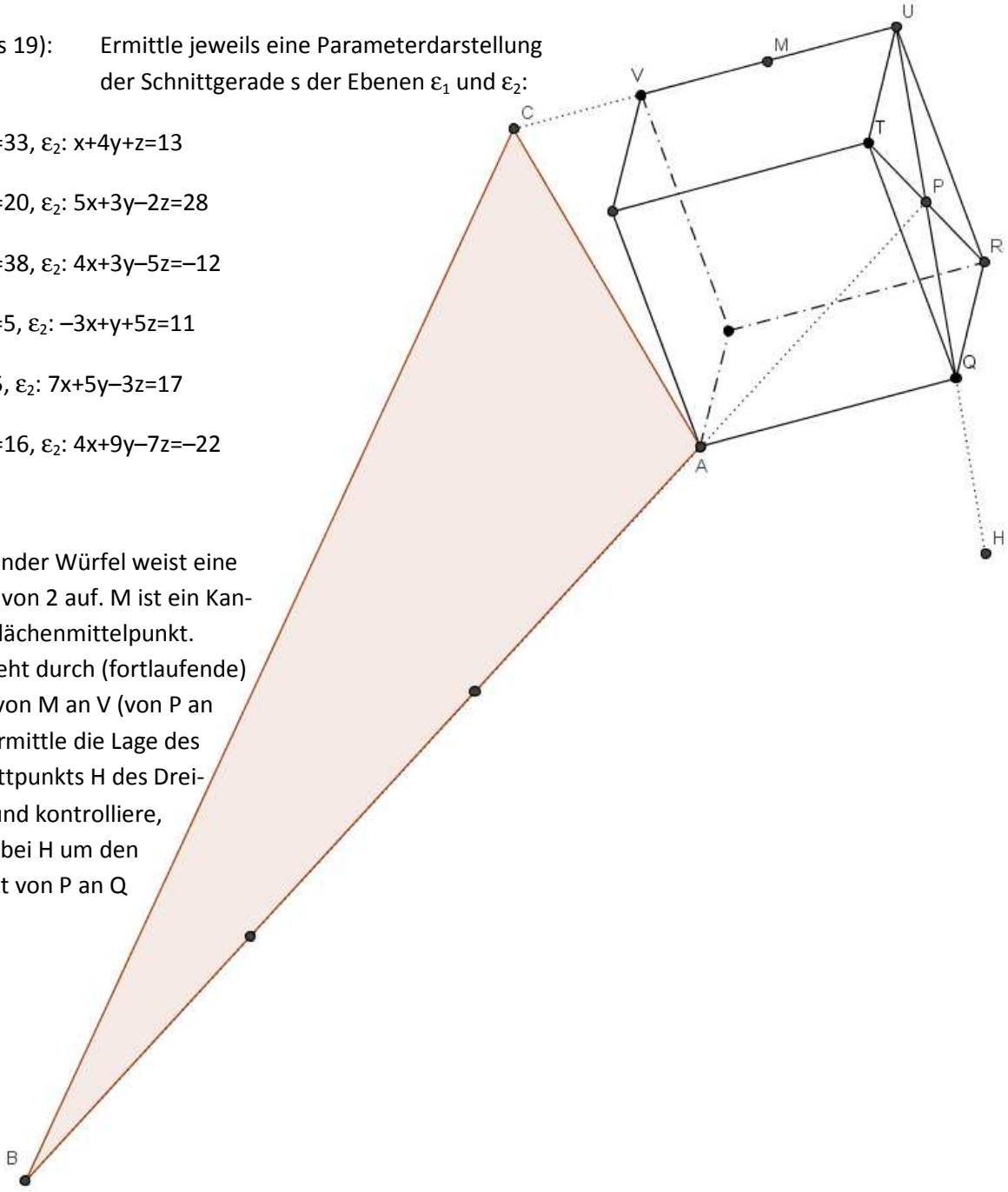
16) ε_1: 2x+y+3z=38, ε_2: 4x+3y–5z=–12

17) ε_1: –x+y+2z=5, ε_2: –3x+y+5z=11

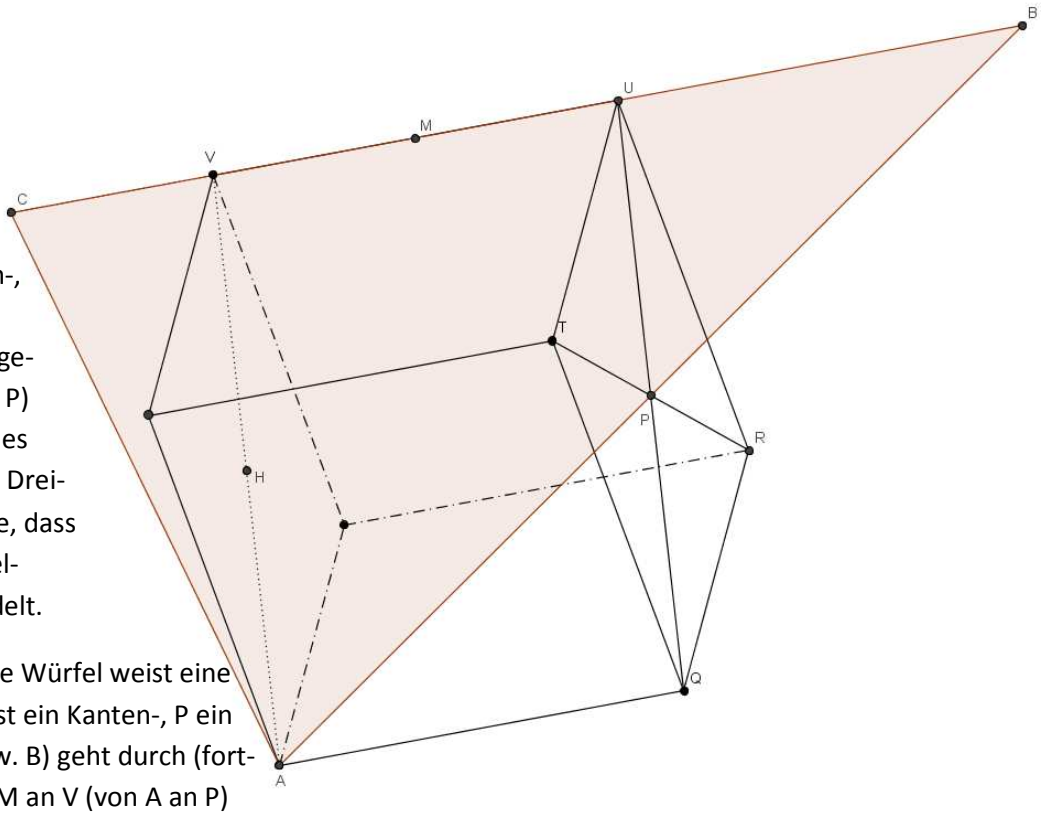
18) ε_1: 3x+y+z=5, ε_2: 7x+5y–3z=17

19) ε_1: 2x+3y+z=16, ε_2: 4x+9y–7z=–22

20) Nebenstehender Würfel weist eine Seitenlänge von 2 auf. M ist ein Kanten-, P ein Flächenmittelpunkt. C (bzw. B) geht durch (fortlaufende) Spiegelung von M an V (von P an A) hervor. Ermittle die Lage des Höhenschnittpunkts H des Dreiecks ΔABC und kontrolliere, dass es sich bei H um den Spiegelpunkt von P an Q handelt.

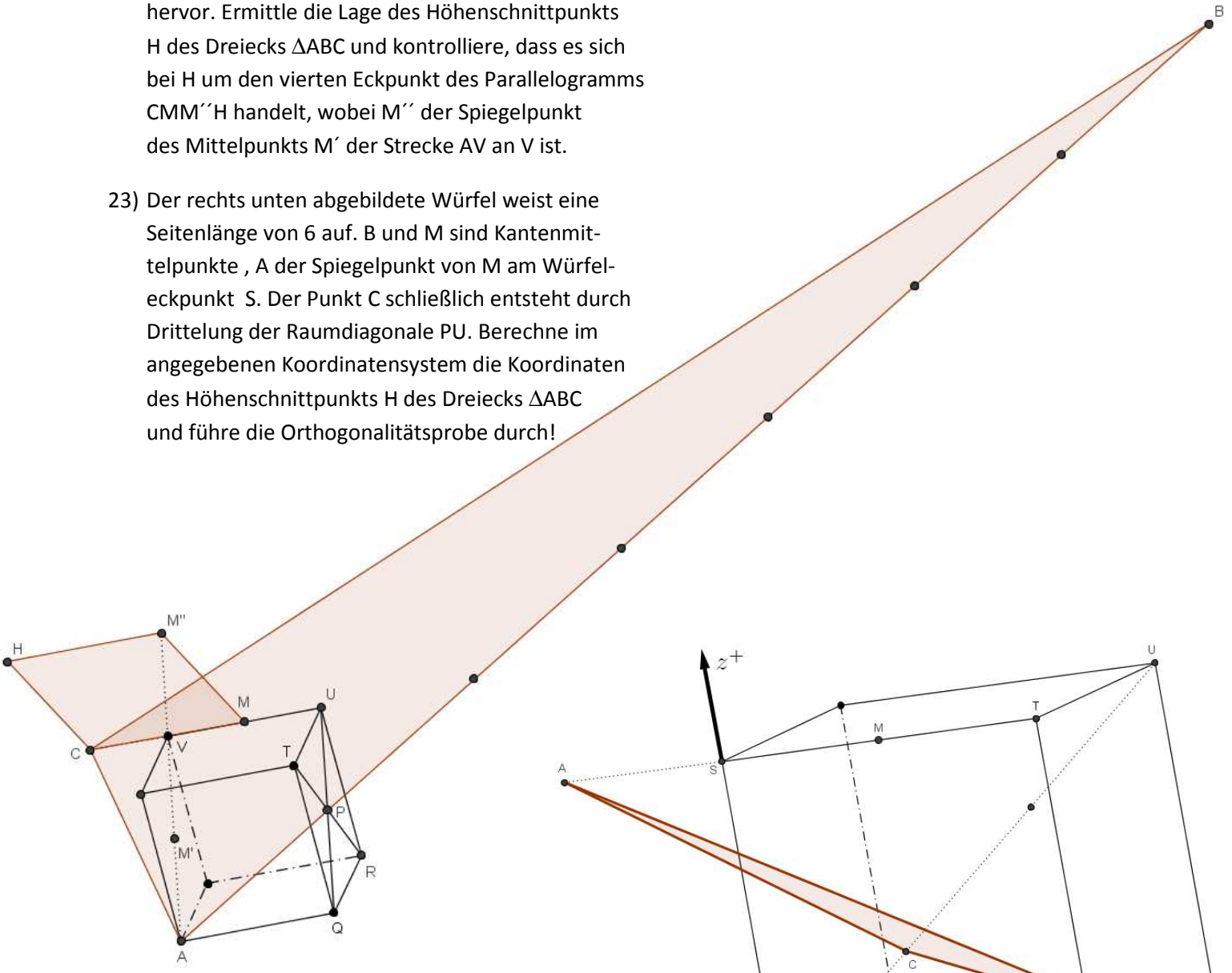


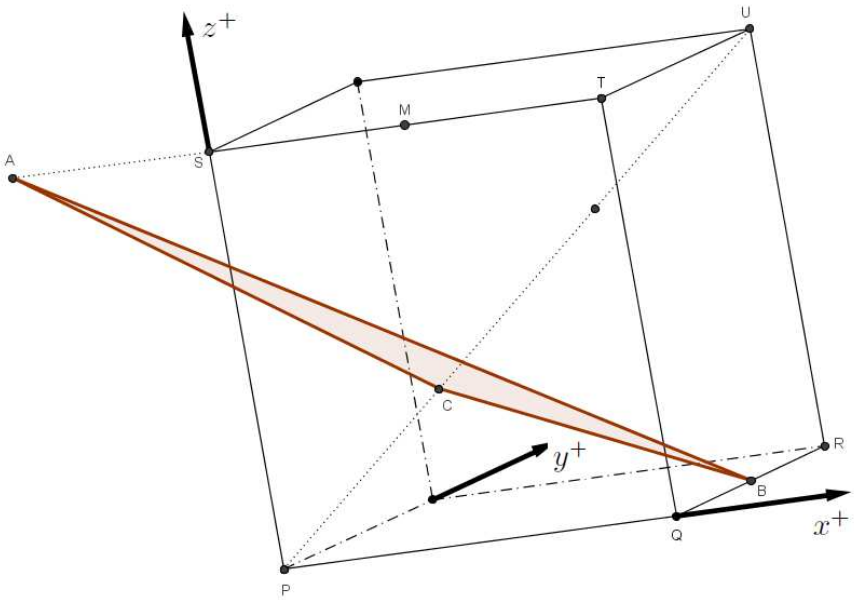
21) Nebenstehender Würfel weist eine Seitenlänge von 2 auf. M ist ein Kanten-, P ein Flächenmittelpunkt. C (bzw. B) geht durch Spiegelung von M an V (von A an P) hervor. Ermittle die Lage des Höhenschnittpunkts H des Dreiecks ΔABC und kontrolliere, dass es sich bei H um den Mittelpunkt der Strecke AV handelt.



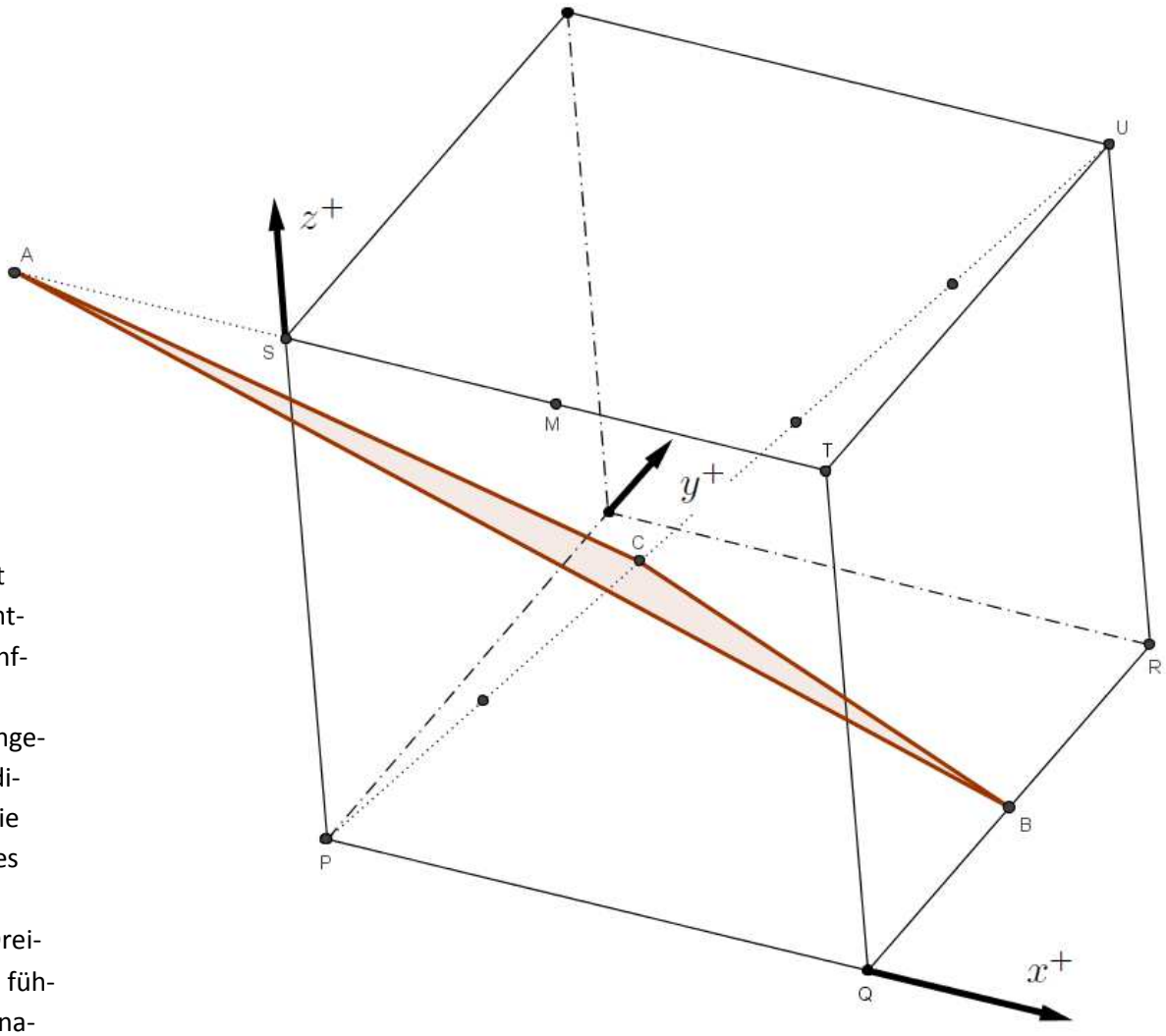
22) Der links unten abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 2 auf. M ist ein Kanten-, P ein Flächenmittelpunkt. C (bzw. B) geht durch (fortlaufende) Spiegelung von M an V (von A an P) hervor. Ermittle die Lage des Höhenschnittpunkts H des Dreiecks ΔABC und kontrolliere, dass es sich bei H um den vierten Eckpunkt des Parallelogramms CMM´´H handelt, wobei M´´ der Spiegelpunkt des Mittelpunkts M´ der Strecke AV an V ist.

23) Der rechts unten abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 6 auf. B und M sind Kantenmittelpunkte , A der Spiegelpunkt von M am Würfeleckpunkt S. Der Punkt C schließlich entsteht durch Drittelung der Raumdiagonale PU. Berechne im angegebenen Koordinatensystem die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H des Dreiecks ΔABC und führe die Orthogonalitätsprobe durch!

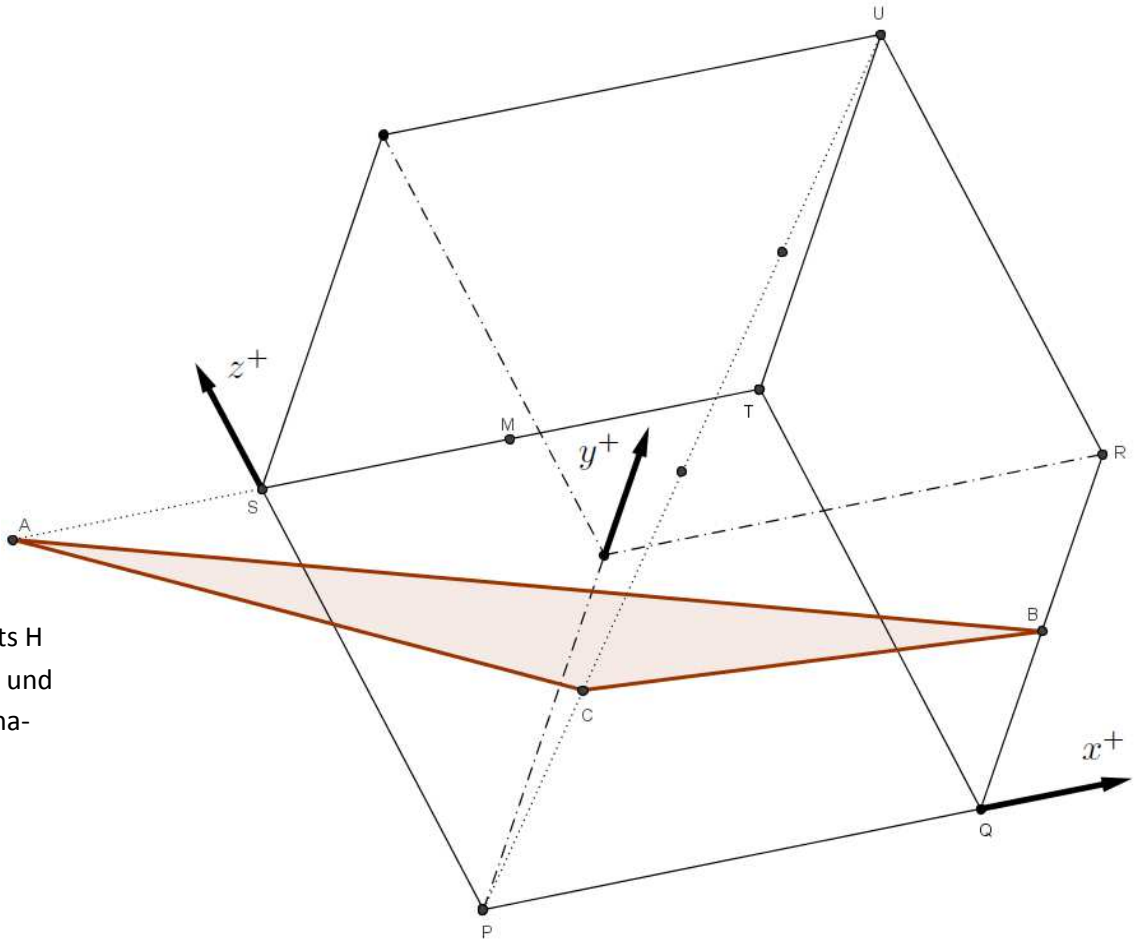




24) Der rechts abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 130 auf. B und M sind Kantenmittelpunkte , A der Spiegelpunkt von M an S. Der Punkt C schließlich entsteht durch Fünftelung von PU. Berechne im angegebenen Koordinatensystem die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H des Dreiecks ΔABC und führe die Orthogonalitätsprobe durch!



25) Der rechts abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 20 auf. B und M sind Kantenmittelpunkte , A der Spiegelpunkt von M an S. Der Punkt C schließlich entsteht durch Viertelung von PU. Berechne im angegebenen Koordinatensystem die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H des Dreiecks ΔABC und führe die Orthogonalitätsprobe durch!



26) bis 56): Diese Aufgaben befinden sich auf www.matheprof.at, und zwar:

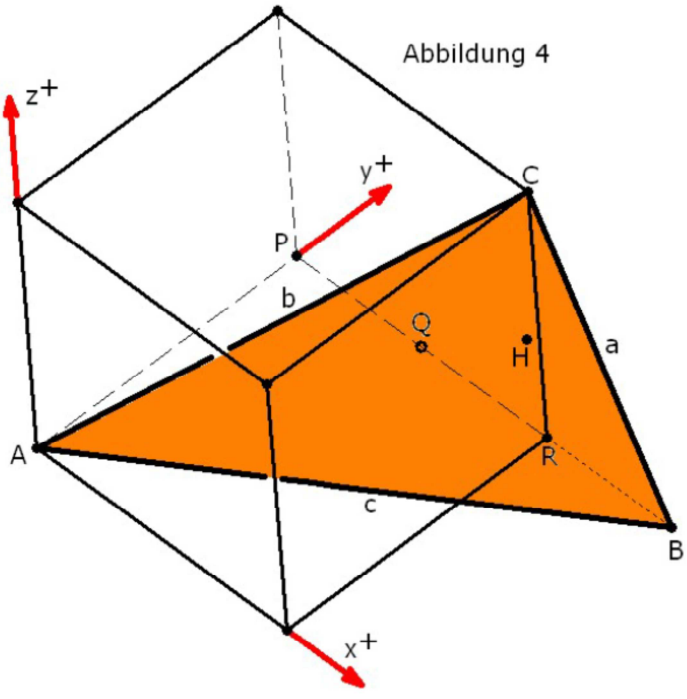
- ✓ Unter http://matheprof.at/8BrgUebersicht.html
  - Die folgenden zwölf Aufgaben aus den "76 vermischten Übungsaufgaben": 10 bis 20 sowie 23
  - Die folgenden sechs Aufgaben aus den "32 vermischten Übungsaufgaben": 9a sowie 10 bis 14
  - Die vier Aufgaben auf der Mainsite mit Lösungen (grünes und hellblaues Dreieck)
- ✓ Unter http://matheprof.at/8A201213R3.htm
  Die folgenden vier Aufgaben aus den "31 weiteren Aufgaben": 28 bis 31
- ✓ Unter http://matheprof.at/6AUebersicht.html
  - Die folgenden beiden Aufgaben aus den "ersten 33 von insgesamt 66 Übungsaufgaben für die 2. Schularbeit": 24 und 25
  - Die folgenden drei Aufgaben aus den "letzten 33 der insgesamt 66 Übungsaufgaben für die 2. Schularbeit: 64 bis 66
  - Bem.: Beide Files vom 3. 12. 2010 !

Wien, im Juli 2013. Dr. R. Resel, e. h.

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

P. S. : Aufgabe 57 aus einer Schularbeit vom Dezember 2010:

Klasse: 6A(G) **22. 12. 2010**

2. Schularbeit (zweistündig)

4. In Abbildung 4 siehst du einen Würfel der Kantenlänge 28 zusammen mit dem Mittelpunkt Q der Würfelkante PR sowie dem Spiegelpunkt B von Q an R. Berechne die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H des Dreiecks ΔABC, achte auf die symbolische Erklärung der einzelnen Schritte, führe auch die Probe durch und zeige für dieses besondere Dreieck die Gültigkeit der bemerkenswerten Gleichung $a^4 + b^4 = c^4$, und zwar ohne Taschenrechner durch geschicktes Herausheben (der 14)! **16P.**