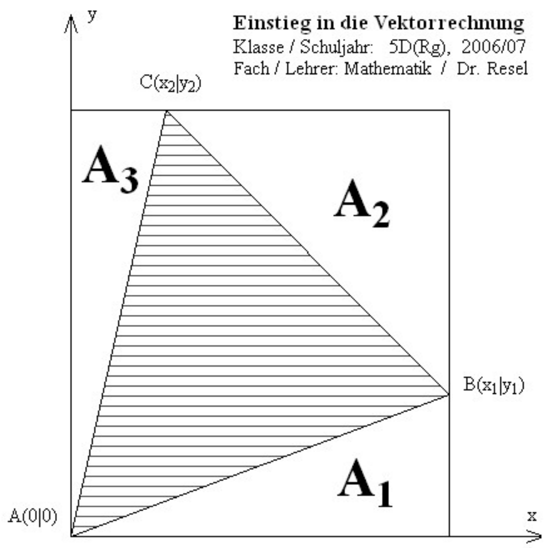
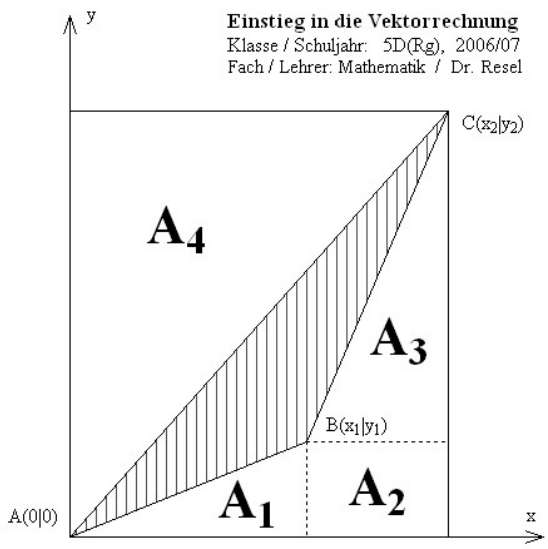
Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Propädeutik (**zum Lehrplanpunkt "Aufstellen von Formeln"**): **Erinnerung an die Unterstufengeometrie**

Diese "*Startseite*" mit propädeutischem Charakter ist nur für den Gebrauch des Lehrers gedacht, wohingegen mit Beginn von Seite 1 das Skriptum (auch) für Schüler bestimmt ist. **Wichtig ist nun in weiterer Folge das (zumindest partielle, falls die folgende Option 2 gewählt wird; aber erst dann, wenn Option 1 im Falle einer möglichen mangelnden Disziplin und/oder Überforderung der Schüler keinen Sinn hat) eigenständige Arbeiten der Schüler, was mit einer sauberen selbst angefertigten Skizze BEIDER(!!) ABBILDUNGEN beginnt und dann je nach Wahl einer der beiden Optionen mit einer klar strukturierten Abfolge der (Teil-)Flächeninhaltsberechnungen fortgesetzt wird.**





- 2 Optionen möglich (wie schon bemerkt: Option 1 jedenfalls probieren!):
  - 1. Option: Schüler, die links bzw. rechts sitzen (von sich aus betrachtet), bearbeiten selbständig die linke bzw. die rechte Figur (Aufgabenstellung folgt!).
  - 2. Option: Lehrer bearbeitet mit Schülern die (etwas schwierigere) rechte Figur und läßt die Schüler hernach selbst die linke Figur bearbeiten.
- **AUFGABENSTELLUNG:** (Lösungsvarianten auf " Seite$\frac{1}{2}$" $\Rightarrow$ (zunächst!) nur für Lehrer!)
  Leite für den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC aus der Abbildung (links oder rechts) eine Flächeninhaltsformel her, welche (klarerweise!) die vier vorkommenden Koordinaten x_1, x_2, y_1 und y_2 enthalten muss.
- Nach erfolgter Herleitung (ggf. unter vorheriger Korrekturen) erfolgt ein INPUT des Lehrers [Seite 1f(f!)], welcher eine mnemotechnische Merkregel für die gewonnene Formel vorstellt, die einen unmittelbaren Einstieg in die Grundbegriffe der Vektorrechnung (Matrix, Vektor, Determinante) ermöglicht.

Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Lösungsvarianten für die beiden Aufgabenstellungen:

- Zur linken Figur:
  - $A_1 = \frac{1}{2} \cdot x_1 y_1$
  - $A_2 = \frac{1}{2} \cdot (x_1 - x_2)(y_2 - y_1)$
  - $A_3 = \frac{1}{2} \cdot x_2 y_2$
  - $A_{\Delta ABC} = x_1 y_2 - (A_1 + A_2 + A_3)$
  - $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2} \cdot (x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_2 - x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2) = \frac{1}{2} \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1)$
  - $\Rightarrow A_{\Delta ABC} = x_1 y_2 - \frac{1}{2} \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1) = x_1 y_2 - \frac{1}{2} \cdot x_1 y_2 - \frac{1}{2} \cdot x_2 y_1 = \frac{1}{2} \cdot x_1 y_2 - \frac{1}{2} \cdot x_2 y_1 = \frac{1}{2} \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1)$
- Zur rechten Figur:
  - $A_1 = \frac{1}{2} \cdot x_1 y_1$
  - $A_2 = (x_2 - x_1) \cdot y_1$
  - $A_3 = \frac{1}{2} \cdot (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$
  - $A_4 = \frac{1}{2} \cdot x_2 y_2$
  - $A_{\Delta ABC} = x_2 y_2 - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$
  - $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2} \cdot (x_1 y_1 + 2x_2 y_1 - 2x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_1 + x_2 y_2) = \frac{1}{2} \cdot (x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - x_1 y_2)$
  - $\Rightarrow A_{\Delta ABC} = x_2 y_2 - \frac{1}{2} \cdot (x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - x_1 y_2) = x_2 y_2 - \frac{1}{2} \cdot x_2 y_1 - x_2 y_2 + \frac{1}{2} \cdot x_1 y_2 = \frac{1}{2} \cdot x_1 y_2 - \frac{1}{2} \cdot x_2 y_1 = \frac{1}{2} \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1)$

$\boxed{\text{Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie}}$

Dr. R. RESEL, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Einleitung, Motivation, Grundbegriffe

Zuletzt haben wir die Formel $F = \frac{1}{2} \cdot |x_1y_2 - x_2y_1|$ für den Flächeninhalt F des Dreiecks $\Delta ABC[A(x_1|y_1),\ B(x_2|y_2),\ C(0|0)]$ hergeleitet. Diese kann man sich *mnemotechnisch* (vgl. die UÜ "MUT"!) sehr einfach dadurch merken, dass man die vier darin auftretenden Variablen folgendermaßen in einem *rechteckigen Zahlenschema* anordnet: $\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{matrix}$

Dieses bezeichnet man in der Mathematik als $\boxed{\text{MATRIX}}$.

Die obige Matrix − nennen wir sie M − besteht aus zwei $\boxed{\text{Spalten}}$ $\left(\text{erste Spalte } \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\ ,\ \text{zweite Spalte } \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\right)$, zwei $\boxed{\text{Zeilen}}$ $\left(\text{erste Zeile } x_1 \quad x_2\ ,\ \text{zweite Zeile } y_1 \quad y_2\right)$ und zwei $\boxed{\text{Diagonalen}}$ $\left(\boxed{\text{Hauptdiagonale}}\ \begin{matrix} x_1 & \\ & y_2 \end{matrix}\ ,\ \boxed{\text{Nebendiagonale}}\ \begin{matrix} & x_2 \\ y_1 & \end{matrix}\right)$.

M enthält also in der ersten bzw. zweiten Spalte die Koordinaten von A bzw. B, und dies **nicht** in beliebiger Reihenfolge, da sich in der ersten Zeile die $x-$ und in der zweiten Zeile die $y-$Koordinaten von A und B befinden.

Es ist in der Mathematik üblich, eine Matrix (gegenüber anderen Rechenobjekten) durch Klammern abzugrenzen, weshalb wir im Folgenden $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ schreiben. Betrachten wir die Spalten voneinander getrennt, so setzen wir auch diese in Klammern und bezeichnen dann sowohl $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ als $\boxed{\text{VEKTOR}}$ (genauer: "Spaltenvektor", ebenso wären $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ "Zeilenvektoren", womit wir uns in der Schulmathematik aber nicht weiter beschäftigen werden!). x_1 und y_1 nennt man dabei die $\boxed{\text{Komponenten}}$ des Vektors $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Mit diesen $\boxed{\text{neuen technischen Begriffen}}$ an der Hand definieren wir nun den für uns noch sehr wichtigen (in weiterer Folge auch für das Lösen von linearen Gleichungssystemen!) fundamentalen Begriff der $\boxed{\text{DETERMINANTE einer Matrix}}$:

$\boxed{\text{DEFINITION.}}$ Unter der Determinante $\det M$ der Matrix $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ verstehen wir die durch $\det M := x_1y_2 - x_2y_1$ definierte **Zahl**.

$\boxed{\text{BEMERKUNG.}}$ Merkregel zur Berechnung der Determinante einer zweireihigen und zweispaltigen Matrix (kurz: "2x2-Matrix"): *Produkt der Elemente der Hauptdiagonale vermindert um das Produkt der Elemente der Nebendiagonale*

Bevor wir den Determinantenbegriff nun (vorläufig nur) auf die eingangs angeführte Flächeninhaltsformel anwenden, benötigen wir noch eine (erste) erweiterte Betrachtungsweise des Vektorbegriffs:

Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Wir haben bereits bemerkt, dass die Reihenfolge der Koordinaten des Punkts $A(x_1|y_1)$ bzw. $B(x_2|y_2)$ für den ersten bzw. zweiten Spaltenvektor der Matrix M eine wesentliche Rolle spielt. Dies zeigt sich jetzt nach der Definition der Determinante umsomehr, weil eine Vertauschung der Koordinaten auch die Determinante ändert. Berechtigt kann man daher also sagen:

Ein Vektor ist ein **geordnetes Zahlenpaar** [Vorläufig! Da wir in der 5. Klasse nur die ebene, also *zwei*dimensionale Vektorrechnung behandeln, reicht ein (eben aus *zwei* Zahlen bestehendes) geordnetes Zahlen*paar*.]. Der Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ "entspricht" gewissermaßen dem Punkt $A(x_1|y_1)$, wir nennen ihn entsprechend den Ortsvektor des Punkts A, wofür die Schreibweise $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ üblich ist. Dabei steht O für den Koordinatenursprung. Der Ortsvektor *eines Punktes* führt also vom Koordinatenursprung zu *diesem Punkt*. Der gesetzte Pfeil zielt bereits auf die *geometrische Interpretation* eines Vektors ab, auf die wir nach folgendem Satz (und den ihm anschließenden Bemerkungen) näher eingehen werden:

Satz. Es sei M jene Matrix, deren Spalten aus den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zweier Punkte A und B bestehen. Dann vermittelt die Formel $F = \frac{1}{2} \cdot |\det M|$ den Flächeninhalt F des Dreiecks ΔOAB, wobei O den Koordinatenurpsrung bezeichnet.

Bemerkung 1. Da die Matrix M die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (in dieser Reihenfolge![1]) enthält, schreibt man anstelle von $\det M$ auch desöfteren $\det(\vec{a}, \vec{b})$.

Bemerkung 2. Die Betragsstriche wurden (aus dem gleichen Grund wie in der Herleitung dieser Formel) deshalb gesetzt, weil die Determinante einer Matrix sowohl positiv als auch negativ sein kann!

Bemerkung 3. Gilt $\det M{=}0$, bedeutet dies automatisch auch $F = 0$. Diese *algebraische Eigenschaft* hat dann automatisch (nebst $F = 0$) die *geometrische Konsequenz*, dass B auf der Geraden durch O und A (von nun an vereinbarte Kurzschreibweise dafür: g_{OA}) bzw. A auf g_{OB} liegt, also prägnanter formuliert: *Gilt* $\det M = 0$, *dann liegen* O, A *und* B *auf einer Geraden.*

Bemerkung 4. Die sich nun unmittelbar aufdrängende Frage ist jetzt, wie man bei der Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks vorgeht, von dem **keiner der drei Eckpunkte** der Koordinatenursprung ist. Um dies und auch die geometrische Konsequenz aus der vorherigen Bemerkung 3 zu klären bzw. aufzuhellen, tauchen wir sogleich tiefer in die Begriffs- und Ideenwelt der Vektorrechnung ein:

[1] Vertauscht man die Reihenfolge von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante. Was es mit dem Vorzeichen des Flächeninhalts auf sich hat, folgt an einer späteren Stelle, an der unser Wissensstand noch reichhaltiger sein wird als dies momentan der Fall ist!

Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Dazu betrachten wir Abbildung 1 zusammen mit den eingezeichneten Ortsvektoren $\overrightarrow{OA} =: \vec{a}$ und $\overrightarrow{OB} =: \vec{b}$ der Punkte A und B und verbinden damit folgende (naive) Grundvorstellung: Die $x-$ bzw. $y-$Komponente von $\vec{a}$ läßt bei einem genaueren Blick auf

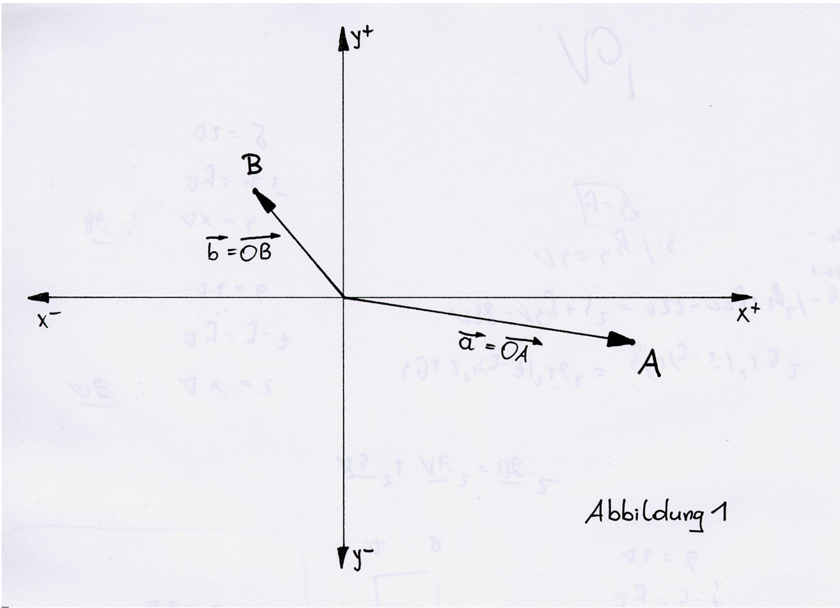


Abbildung 1 folgende *geometrische Interpretation* zu: Sie gibt an, wie weit man von O aus nach links (wenn $x_1 < 0$) oder rechts (wenn $x_1 > 0$) bzw. nach oben (wenn $y_1 > 0$) oder unten (wenn $y_1 > 0$) "wandern" muss, um nach A zu gelangen (Gleiches gilt für $\vec{b}$, B und O!).
So gesehen kann man den Vektor $\vec{a}$ als "Vermittler" einer (Ver-)Schiebung (Fachbegriff: Translation) vom Punkt O zum Punkt A betrachten. Somit steht der zuvor getätigten **algebraischen Definition** eines Vektors als geordnetes Zahlenpaar nun die **geometrische Definition** eines Vektors als (wie die Physiker – für welche die Vektorrechnung von fundamentaler Bedeutung ist, wie du in Ansätzen in der 6. Klasse im Physikunterricht sehen wirst! – zu sagen pflegen) *gerichtete Größe* gegenüber. Bevor wir eine entsprechend saubere mathematische Definition tätigen, bedarf *dies* aber noch einer gehörigen Präzisierung [Merke: Was einem Physiker oder anderen Naturwissenschaftlern bzw. generell: *Anwendern mathematischer Methoden*[2] genügt, reicht dem (um klare Begriffbildungen) bemühten Mathematiker bei weitem nicht!], der wir uns zunächst folgendermaßen (an)nähern:

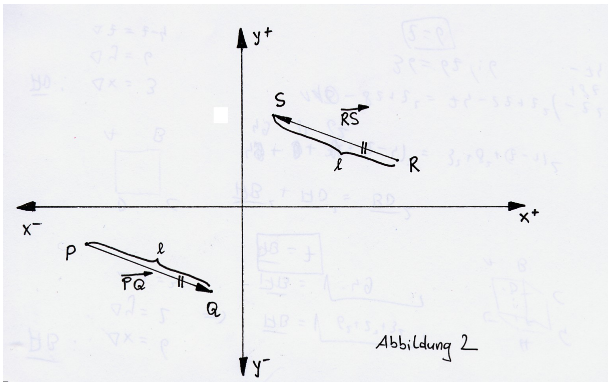
[2] *Diese Gruppe* wird (aufgrund des nachweislichen Erfolgs der Betrachtung der Welt durch die "mathematische Brille") zusehendst größer. Waren es noch vor etwa hundert Jahren vorwiegend die Physiker, Astronomen und Meteorologen (um die wichtigsten zu nennen), welche sich das reiche Instrumentarium der (höheren) Mathematik (wie eben zum Beispiel die Vektorrechnung) zunutze machten, findet man heute Mathematik auch (verstärkt) in den Wirtschaftswissenschaften, der Biologie (zum Beispiel Prognosemodelle für den Verlauf von AIDS), der Medizin(technik, Beispiel: CT!), der Psychologie und v.a.m. Dies erklärt unter anderem auch den hohen Stellenwert der Mathematik im Fächerkanon (so gut wie!) aller (wenn man von abgespeckten Versionen wie "Handelsschule o.ä. absieht) Schultypen sowie in den Studienplänen so zahlreicher Studienrichtungen wie z.B. Soziologie, Kulturtechnik und Wasserwirtschaft, Lebensmitteltechnologie, bildende Kunst etc.!

Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

In Abbildung 1 ist der die Translation von O nach A vermittelnde "Pfeil" (eine mögliche **geometrische Deutung** eines Vektors!) länger als der dem Vektor $\vec{b}$ (welcher die Schiebung von O nach B bewerkstelligt) entsprechende Pfeil, was eine Art Größenvergleich darstellt. Demhingegen zeigt ein Vergleich der Lageänderungen, dass der dem Vektor $\vec{a}$ entsprechende Pfeil nach Südosten, jener dem Vektor $\vec{b}$ entsprechende Pfeil nach Nordwesten zeigt, was einer Art Richtungsvergleich entspricht, womit man insgesamt sagen kann, dass ein Vektor *sowohl eine Größe als auch eine Richtung* hat (*welche* sich in einem durch einen Pfeil darstellen lassen). Der entscheidende Gedankengang ist nun der, dass man nicht nur Translationen vom Ursprung zu einem anderen Punkt, sondern ebenso Schiebungen von einem beliebigen Punkt ausgehend zu einem zweiten Punkt betrachtet und die dadurch entstehenden Pfeile (Bezeichnung für die Translation von P nach Q: $\overrightarrow{PQ}$) miteinander vergleicht. Einleuchtenderweise sind zwei derartige Pfeile (bis auf deren Lage im Koordinatensystem) als identisch anzusehen, wenn sie gleich lang und zueinander parallel sind. Oder (doch nicht?)? Betrachten wir dazu einmal Abbildung 2:

Die Pfeile $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ sind offenbar gleich lang und zueinander parallel, zeigen aber in ver-



schiedene Richtungen, der Mathematiker sagt: "Sie sind unterschiedlich *orientiert.*" Drehen wir also einen der beiden Pfeile um (entweder $\overrightarrow{PQ}$ zu $\overrightarrow{QP}$ oder $\overrightarrow{RS}$ zu $\overrightarrow{SR}$), dann sind die Pfeile als ident anzusehen. Dies motiviert paradigmatisch folgende

DEFINITION: (Geometrische Version des Vektorbegriffs)
Ein Vektor ist die Menge aller gleich langen, parallelen, gleich orientierten Pfeile.

BEMERKUNG 1. Mit dieser Definition haben wir uns (wie schon in den davor angestellten Überlegungen) bereits davon gelöst, nur vom Ursprung ausgehende Schiebevektoren (Fachbegriff: Translationsvektoren) zu betrachten. Wie man mit derartigen (sogenannten ungebundenen) Vektoren rechnet, folgt sogleich.

BEMERKUNG 2. Nach obiger Definition kann man einen Vektor gar nicht zeichnen, weil jeder Pfeil eine ganze "Pfeilklasse" erzeugt, die ja aufgrund der freien Wahl des Ausgangspunktes die ganze Ebene überdecken würde. Einen einzelnen Pfeil aus solch einer Pfeilklasse nennt man dann einen *Repräsentanten* des Vektors.

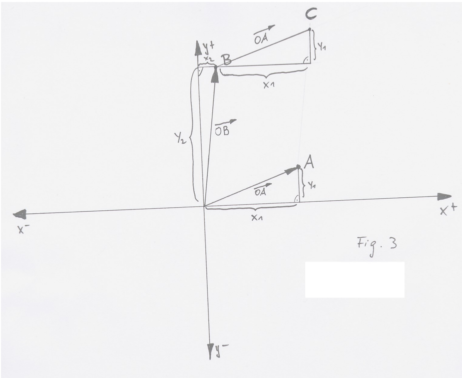
Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Nachdem die Grundbegriffe soweit geklärt sind, widmen wir uns jetzt dem tatsächlichen

Rechnen mit Vektoren

Wir wissen bereits: Wenn wir dem Punkt $A(x_1|y_1)$ den Ortsvektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ zuordnen und mit $\vec{a}$ abkürzen, dann vermittelt $\vec{a}$ die Translation von $O(0|0)$ nach A. Hier braucht nichts mehr berechnet zu werden, da die Koordinaten von A ja bereits vorhanden sind. Jedoch motiviert dies bereits die Schreibweise $A = O + \overrightarrow{OA}$, wobei das Zeichen " + " hier zunächst nur bedeuten soll, dass man in O den Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ anhängt. Wie sich in Kürze heraustellen wird, *vermittelt jenes " + " aber in der Tat eine spezielle (für uns neue) Art der Addition*! *Dadurch* rechtfertigt sich die "Identität" $A = \overrightarrow{OA}$, da ja O (Koordinatenursprung!) hier die gleiche Stellung einnimmt als die Zahl 0 (Nullpunkt auf der Zahlengerade!) bei der Addition reeller Zahlen! Beziehen wir jetzt noch einen zweiten



Punkt $B(x_2|y_2)$ in unsere Überlegungen mitein, den wir uns starr (durch die entsprechende Verbindungsstrecke) mit O verbunden vorstellen mögen und den wir uns zusammen mit O (und der Verbindungsstrecke) mitverschoben denken, so geht B im Zuge dieser Translation in den Punkt C über.

C wäre aber auch entstanden, indem wir O zunächst durch den Ortsvektor $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ einer Translation (nämlich jener von O nach B) unterworfen hätten, und den verschobenen Punkt B hernach noch durch $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ein weiteres Mal translatiert hätten. In Anlehnung an obige Schreibweise bzw. "Identität" ergibt sich also

$$C = B + A \quad (*).$$

Spätestens nach Betrachtung der in Fig. 3 eingezeichneten kleinen Dreiecke ist jetzt auch endgültig klar, was mit dem ominösen " + " gemeint ist, nämlich einfach

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{pmatrix}},$$

womit wir die **VEKTORADDITION** definiert hätten.

Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. RESEL, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Da $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{BC}$ aber Repäsentanten ein und desselben Vektors sind und (∗) die "Identität" vergessend ausgeschrieben

$$C = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$$

lautet, kann man damit ebenso

$$C = B + \overrightarrow{BC} \quad \text{(I)}$$

schreiben, woraus durch beidseitige **VEKTORSUBTRAKTION**

$$\text{– definiert durch } \boxed{\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - x_4 \\ y_3 - y_4 \end{pmatrix}}\text{! –}$$

von B

$$\overrightarrow{BC} = C - B \quad \text{(II)}$$

folgt.

Halten wir jetzt einmal für einen Moment inne und betrachten (I) und (II) näher, da diese beiden "Vektorgleichungen" für uns noch sehr wichtig sein werden:

(I) bedeutet, dass man von B nach C gelangt, indem man den Vektor $\overrightarrow{BC}$ im Punkt B anhängt, wobei die rechnerische Entsprechung des Anhängens die Addition des Ortsvektors von B mit dem Vektor $\overrightarrow{BC}$ bedeutet.

(II) sagt aus, dass man den für die Verschiebung von B nach C notwendigen Translationsvektor $\overrightarrow{BC}$ als Resultat der Vektorsubtraktion $C - B$ erhält. Daraus ergibt sich die (in modernen Zeiten als solche formulierte!) SMS-REGEL: Spitze minus Schaft!

Ohne die für uns neuen Rechenoperationen der Vektoraddition bzw. Vektorsubtraktion gleich auf entsprechende Koordinaten anwenden zu müssen (was aber nach zwei der folgenden Aufgabe anschließenden Bemerkungen sogleich folgen wird!), wenden wir die Regeln (I) und (II) an, um folgende Behauptung zu beweisen:

Die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks bilden stets ein Parallelogramm.

Zur Lösung dieser Aufgabe benötigen wir aber noch eine weitere elementare Rechenoperation für Vektoren, nämlich die **Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl**, die sich für jede natürliche Zahl n dadurch wie von selbst ergibt, indem wir für den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ die Vektorsumme

$$\underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + ... + \vec{a}}_{\text{n-mal!}}$$

mit $n \cdot \vec{a}$ abkürzen (wie sich ja auch die Multiplikation natürlicher Zahlen als fortlaufende Addition ergibt, denke an deine Volksschulzeit!!), woraus sich wegen

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_a + x_a + x_a + ... + x_a \\ y_a + y_a + y_a + ... + y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot x_a \\ n \cdot y_a \end{pmatrix}}_{\text{Multiplikation als fortlaufende Addition!}}$$

mit

$$\boxed{n \cdot \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot x_a \\ n \cdot y_a \end{pmatrix}}$$

die Definition der **MULTIPLIKATION EINES VEKTORS MIT EINER REELLEN ZAHL** ergibt, welche für natürliche Zahlen motiviert wurde und entsprechend für beliebige ganze (also auch negative!), rationale und irrationale Zahlen eben gerade so definiert ist, wobei zu negativen ganzzahligen bzw. rationalen Faktoren noch folgende Bemerkungen anzubringen sind:

Ist n wieder eine natürliche Zahl, dann gilt für den Ausdruck $(-n) \cdot \overrightarrow{AB}$ wegen der SMS-Regel

$$(-n) \cdot \overrightarrow{AB} = (-n) \cdot (B - A) = n \cdot (A - B) = n \cdot \overrightarrow{BA} \quad (\#).$$

Führen wir jetzt für einen Vektor $\overrightarrow{PQ}$ durch Übergang zum Vektor $\overrightarrow{QP}$ den Begriff des INVERSEN VEKTORS ein und entsinnen uns des Begriffs der Gegenzahl einer ganzen Zahl aus der 3. Klasse, so kann man (#) folgendermaßen geometrisch interpretieren:

Die Multiplikation eines Vektors mit einer negativen ganzen Zahl entspricht der Multiplikation seines inversen Vektors mit der Gegenzahl.

Für die positive rationale Zahl $q = \frac{a}{b}$ bedeutet der **Vektorterm** $W = U + \frac{a}{b} \cdot \overrightarrow{UV}$, dass man die Strecke UV in b gleich lange Teile teilt und dann von U aus (nur) a dieser b Teile weitergeht. Für die negative rationale Zahl $r = -\frac{c}{d}$ (wobei c und d freilich natürliche Zahlen sind!) bedeutet $\left(-\frac{c}{d}\right) \cdot \overrightarrow{RS}$ entsprechend (ebenso wie zuvor bei negativen ganzzahlige Vielfachen!) dasselbe wie $\frac{c}{d} \cdot \overrightarrow{SR}$.

Um mit dem Beweis der letzten Behauptung nun endlich **unserer erste (richtige!) Anwendung der Vektorrechnung auf die Geometrie** in Angriff nehmen zu können[3], leiten wir im Folgenden die Formel

$$M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$$

für den Mittelpunkt der Strecke AB („MITTELPUNKTSFORMEL“) her.

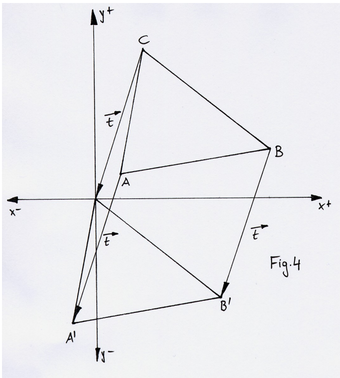
[3]Gleichzeitig ist dies für uns die Feuertaufe der sogenannten *Analytischen Geometrie*, da wir nunmehr erstmalig nicht durch sich direkt auf das geometrische Objekt beziehende Überlegungen [welche sich Winkeln, Längen, u.U. (to whom it concerns: Vorbereitungskurs für die Mathematikolympiade!) dem Pythagoreischen Lehrsatz, dem Strahlensatz oder dem Peripheriewinkelsatz bedient] zu Schlüssen gelangen, sondern durch Berechnungen (im Moment direkt mit Vektoren), was eben eine andere Art der **Herangehensweise an geometrische Problemstellungen** bedeutet, **welche** wir “**analytisch**“ (im Gegensatz zur “**synthetischen**“ Methode, welche eben wie gesagt direkt mit den geometrischen Objekten operiert, was für die Geometrie in der **Unterstufe** charakteristisch ist) nennen und für die **Oberstufe** maßgeblich ist!

Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Nach dem erfolgreichen Einsatz unseres bislang erworbenen Instrumentariums aus der Vektorrechnung zur Lösung der letzten Behauptung fügen wir noch die Bemerkung hinzu, dass unsere allgemein angestellten analytischen Überlegungen keinerlei Koordinaten benutzt haben und somit nicht nur in der Ebene (in der wie uns an und für sich in der 5. Klasse[4] bewegen werden), sondern auch im Raum gelten. Dies soll bedeuten, dass das Viereck auch räumlich gesehen werden kann, also als dreiseitige Pyramide und die vier "Seiten" als vier der sechs Pyramidenkanten.[5]

Jetzt sind wir (endlich!) so weit in der Vektorrechnung vorgedrungen, dass wir die in Bemerkung 4 auf Seite 2 aufgeworfene Frage beantworten können, wozu wir Fig. 4 betrachten: Um den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC zu berechnen, translatieren wir das Dreieck



derart, dass einer drei Eckpunkte im Koordinatenursprung zu liegen kommt, wählen wir etwa C. **(Die A bzw. B benutzende Variante war Hausübung!!)**

Da sich der Flächeninhalt bei der Verschiebung nicht ändert (Der Mathematiker bezeichnet diese Eigenschaft des Flächeninhalts als "*Translationsinvarianz*"!), gilt

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \mathcal{A}_{\Delta A-C,B-C,O}.$$

Auf das Dreieck mit den Eckpunkten $A-C$, $B-C$ und O können wir aber den Satz von Seite 2 anwenden und erhalten schließlich durch Rückwärtslesen der SMS-Regel den fundamentalen

Satz. Für den Flächeninhalt $\mathcal{A}_{\Delta ABC}$ eines Dreiecks ΔABC gilt die Flächeninhaltsformel

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \det\left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right).$$

[4] Elemente der *Analytischen Raumgeometrie* werden uns über weite Teile des ersten Semesters der 6. Klasse in einem fast(!) eigens dafür konzipierten mathematischen Basismodul gehörig auf Trab halten, versprochen!

[5] In der 6. Klasse (vgl. letzte Fußnote!) werden wir erkennen, dass *so manche* Gesetze der ebenen analytischen Geometrie (fast!) Eins zu Eins auf die räumliche analytische Geometrie übertragbar sind. *Jedoch* birgt der Raum (im Gegensatz zur Ebene!) noch so manche Überraschungen in sich! Als Denkanstoß hiezu sei etwa bemerkt, dass in der Ebene zwei Geraden, die keinen gemeinsamen Punkt haben, zwangsweise zueinander parallel verlaufen. Im Raum jedoch .... (Bis 2007/08!!)

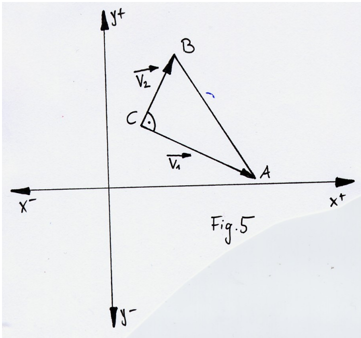
Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Bemerkung. Aus der **umseitig bemerkten Hausübung** lassen sich noch zwei weitere (der Formel aus dem letzten Satz gleichwertige) Darstellungen für $\mathcal{A}_{\Delta ABC}$ herleiten (Füge sie selbst hinzu!)!

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \qquad\qquad\qquad , \ \mathcal{A}_{\Delta ABC} =$$

Nun gibt es aber für den Fall eines rechtwinkligen Dreiecks noch eine andere Möglichkeit zur Berechnung seines Flächeninhalts, welche uns einerseits zu einer Größe führen wird, die man jedem Vektor alleine zuordnen kann und uns andererseits durch Vergleich mit der Berechnungsformel des letzten Satzes den Weg zu einer weitere Größe ebnen wird, welche für je zwei Vektoren berechnet werden kann, wozu wir Fig. 5 betrachten: Die Vektoren $\vec{v_1}$



und $\vec{v_2}$ haben ihren gemeinsamen Schaft im Scheitel C des rechten Winkels des Dreiecks ΔABC. Für den Flächeninhalt $\mathcal{A}_{\Delta ABC}$ gilt dann bekanntlich die (im Gegensatz zum letzten Satz elementare!) Flächeninhaltsformel

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CB} \qquad \text{(Wortformel: halbes Kathetenprodukt!)}\,.$$

Da $\overline{CA}$ mit dem Vektor $\vec{v_1}$ (ebenso: $\overline{CB}$ mit dem Vektor $\vec{v_2}$) zusammenhängt ($\overline{CA}$ gibt ja die Länge jedes Repräsentantenpfeils des Vektors $\vec{v_1}$ an!), scheint aufgrund des Lehrsatzes des Pythagoras

– Angewandt auf den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ergibt sich etwa $\overline{CB}^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2$. –

folgende Definition sinnvoll:

Definition. Unter dem $\boxed{\text{Betrag } |\vec{v}|}$ eines $\boxed{\text{Vektors } \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}$ versteht man die $\boxed{\text{reelle Zahl } |\vec{v}| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}}$.

Für den Betrag eines Vektors gilt ein ganz wichtiges Rechengesetz, welches sich unter Beachtung der für das Rechnen mit Wurzeln grundlegenden Regeln $\boxed{\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$ und $\boxed{\sqrt{a^2} = a}$ ($a > 0$ und $b > 0$ jeweils vorausgesetzt!) leicht beweisen. Du findest es im Lehrbuch auf S. 194. Es ist für das rechnerische Abtragen von Strecken [hier: analytische versus konstruktive (Lineal und Zirkel!) Vorgehensweise!!] sehr wichtig, was für uns aber erst relevant wird, wenn wir bei der zuvor angekündigten zweiten Größe angelangt sein werden, welche man je zwei Vektoren zuordnen kann, wozu wir genau jetzt kommen:

Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Orthogonalität von Vektoren; Skalarprodukt & Normalvektoren

Die Vektoren $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ stehen genau dann aufeinander normal, wenn $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}| = \frac{1}{2} \cdot |\det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})|$ bzw. $|\overrightarrow{v_1}|^2 \cdot |\overrightarrow{v_2}|^2 = \det^2(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ gilt. Rechnen wir dies aus:

$$(x_1^2+y_1^2)\cdot(x_2^2+y_2^2) = (x_1y_2-x_2y_1)^2 \Leftrightarrow x_1^2x_2^2+x_2^2y_1^2+x_1^2y_2^2+y_1^2y_2^2 = x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2} = 0$$

Im eingerahmten Ausdruck erkennt man nun das Quadrat des Terms $x_1x_2 + y_1y_2$, womit die Vektoren $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ also genau dann aufeinander normal stehen, wenn dieser Term verschwindet. Aufgrund ebenjener "Machtposition" dieses Terms hat man ihn in der Mathematik mit einem eigenen Begriff ausgestattet, was wir in folgender Definition festhalten:

Definition. Unter dem **Skalarprodukt** der Vektoren $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ versteht man die **Zahl** $x_1x_2 + y_1y_2$. Für das Skalarprodukt ist auch die Schreibweise $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$ üblich, womit diese Definition in prägnanter Weise auch so geschrieben werden kann: $\boxed{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} := x_1x_2 + y_1y_2}$

Bemerkung. Die Bezeichnung "Skalarprodukt" rührt vom griechischen Wort *skalar* (bedeutet so viel wie "Zahl") her und soll damit verdeutlichen, dass das Ergebnis dieses "Produkts" zweier Vektoren nicht wieder ein Vektor, sondern eben eine Zahl ist. (Insofern ist die Bezeichnung "Produkt" eigentlich nicht wirklich angebracht, dennoch werden wir dabei bleiben!)

Aus den zuletzt angestellten Überlegungen ergibt sich nun unmittelbar folgender fundamentale Satz der (ebenen) Vektorrechnung, welcher [da in der Mathematik anstelle von "Zwei Vektoren stehen aufeinander normal." (auch) die Sprechweise "Zwei Vektoren stehen aufeinander orthogonal." üblich ist] auch als "Orthogonalitätskriterium" bezeichnet wird.

Satz. Zwei Vektoren stehen genau dann aufeinander normal, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet, symbolisch: $\boxed{\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0}$

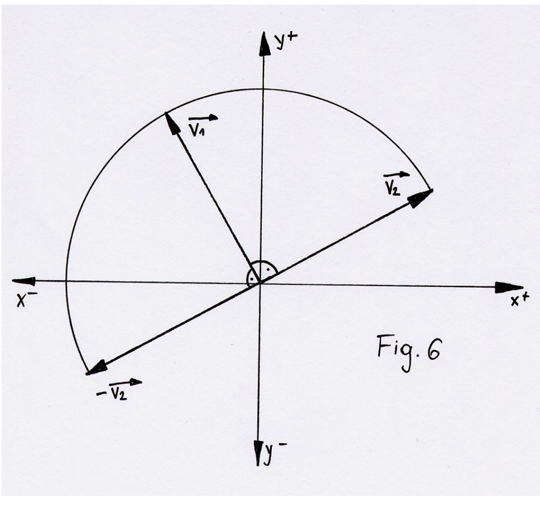
Eine wichtige Anwendung dieses Satzes betrifft die (rechnerische) Konstruktion eines Normalvektors eines vorgegebenen Vektors:

Gehen wir beispielsweise vom Vektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ aus und stellen uns die Aufgabe, die Komponenten *eines Vektors* $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zu berechnen, der auf $\overrightarrow{v_1}$ orthogonal steht. Man nennt *diesen* dann (einen) Normalvektor von $\overrightarrow{v_1}$.

Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Wir wissen, dass diesfalls $\boxed{x_1x_2 + y_1y_2 = 0}$ gelten muss. Dies ist eine Gleichung in zwei Unbekannten (nämlich x_2 und y_2). Da es zu $\overrightarrow{v_1}$ unendlich viele Normalvektoren gibt (Schließlich ist jedes Vielfache eines Normalvektors von $\overrightarrow{v_1}$ wieder ein Normalvektor von $\overrightarrow{v_1}$. *Begründe dies!*), können wir eine Unbekannte frei wählen. Um die linke Seite der eingerahmten Gleichung durch Herausheben vereinfachen zu können, wählen wir einfach $\boxed{x_2 = y_1}$. Dann erhalten wir $x_1y_1 + y_1y_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1(x_1 + y_2) = 0$. Da $y_1 \neq 0$ angenommen werden kann [Schließlich kann man (rein anschaulich sogar ohne Kenntnis des Orthogonalitätskriteriums!) mit $\begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}$ − wobei hier y_2 beliebig gewählt werden kann − sofort alle Normalvektoren des Vektors $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ angeben!], folgt damit wegen des *Produkt-Nullsatzes* (*Dieser* beschreibt den − für uns offensichtlichen − Sachverhalt, dass ein Produkt nur dann 0 ergeben kann, wenn zumindest einer der beteiligten Faktoren selbst 0 ist.) zwingenderweise die Gleichung $x_1 + y_2 = 0$, aus der $\boxed{y_2 = -x_1}$ folgt. Insgesamt erhalten wir also mit $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ *einen Normalvektor* (*Alle Normalvektoren* ergeben sich aus sämtlichen Vielfachen des Vektors $\overrightarrow{v_2}$!) des Vektors $\overrightarrow{v_1}$. Wollen wir uns dies geometrisch veranschaulichen, so müssen wir beachten, dass es für die Komponenten von $\overrightarrow{v_1}$ ier verschiedene Vorzeichenkombinationen $\left[\begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}\right]$ gibt, von denen wir nun eine betrachten. **(Die anderen drei waren Hausübung!)**
Da $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ gleichen Betrag haben, kann man die letzte Abbildung demnach folgender-



maßen interpretieren: $\overrightarrow{v_2}$ erhält man, indem man $\overrightarrow{v_1}$ um 90° im Uhrzeigersinn um den Ursprung (bzw. wenn $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ keine Ortsvektoren sind: um den gemeinsamen Schaft)dreht. **(Auch die anderen drei Fälle liefern das gleiche Ergebnis!)** Trägt man nun auch noch den zu $\overrightarrow{v_2}$ inversen Vektor $\left[\begin{pmatrix} y_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}\right]$ in alle vier Zeichnungen ein, so lautet die entsprechende Interpretation wie oben, nur dass jetzt eben gegen den Uhrzeigersinn gedreht wird.

Fassen wir dies zusammen in folgendem

Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

$\boxed{\text{Satz.}}$ Dreht man den Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ um 90° im Uhrzeigersinn um seinen Schaft, so erhält man den Vektor $\begin{pmatrix} y_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$. Dreht man den Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ um 90° gegen den Uhrzeigersinn um seinen Schaft, so erhält man den Vektor $\begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

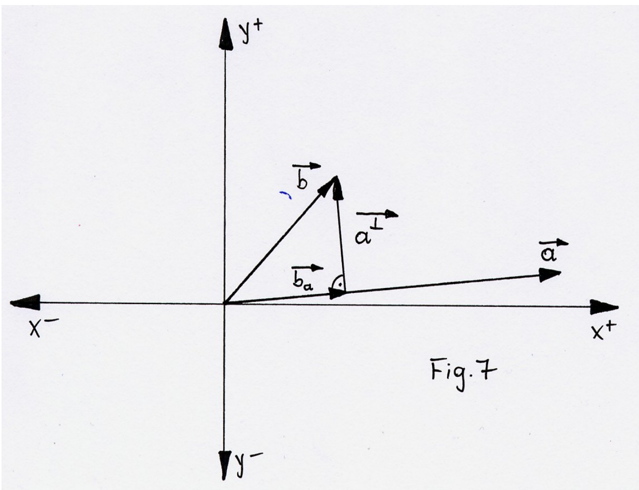
$\boxed{\text{Bemerkung.}}$ Eine mnemotechnische Merkregel des letzten Satzes lautet etwa so:
Nach Vertauschen der Komponenten

[Aus $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ wird der “Übergangsvektor“ $\begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$, welcher aber – noch – kein Normalvektor von $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ist.]

wechselt man im Übergangsvektor beim Drehen mit der $\boxed{\text{U}}$hr in der $\boxed{\text{u}}$nteren Komponente das Vorzeichen (Dreht man andersrum, dann wechselt man eben in der oberen Komponente das Vorzeichen!).

Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts

Für das Skalarprodukt gelten (ähnlich wie für die Multiplikation reeller Zahlen, was andererseits doch wieder für die Bezeichnung “Produkt“ spricht) bestimmte Rechenregeln, welche du im Lehrbuch findest (Kap. 16.2, S. 211f.). Für die im Folgenden von uns herzuleitende geometrische Eigenschaft des Skalarprodukts benötigen wir speziell (1) und (3) vom ersten Satz auf S. 212 sowie (2) aus dem zweiten Satz auf S. 212.
Gemäß obiger Abbildung können wir zur Berechnung des Skalarprodukts der beiden Vek-



toren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Vektor $\vec{b}$ als Summe zweier Vektoren darstellen, von denen einer parallel zu $\vec{a}$ [Symbol: $\overrightarrow{b_a}$; Bezeichnung: $\boxed{\text{vektorielle Projektion}}$ des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$] und der andere orthogonal zu $\vec{a}$ [Symbol: $\overrightarrow{a^\perp}$; Beachte aber, dass $\overrightarrow{a^\perp}$ nicht die gleiche Länge wie $\vec{a}$ haben muss!] verläuft.

Dabei ist zu beachten, dass $\overrightarrow{b_a}$ in der Form $\boxed{\overrightarrow{b_a} = r \cdot \vec{a}}$ geschrieben werden kann, wobei r je nachdem, ob $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen spitzen, rechten oder stumpfen Winkel einschließen, positiv, 0 oder negativ ist.

In den folgenden Umformungsschritten bezieht sich jede Abkürzung unter einem "="-Zeichen jeweils auf jene Rechenregel, die angewendet wird, um vom Vektorterm links des"="-Zeichens zum Vektorterm rechts des "="-Zeichens zu gelangen.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot \left(\overrightarrow{b_a} + \overrightarrow{a^{\perp}}\right) \underbrace{=}_{(1)} \vec{a} \cdot \overrightarrow{b_a} + \underbrace{\vec{a} \cdot \overrightarrow{a^{\perp}}}_{0} = \vec{a} \cdot (r \cdot \vec{a}) \underbrace{=}_{(3)} r \cdot \vec{a}^2 \underbrace{=}_{(2)} r \cdot |\vec{a}|^2 = r \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{a}|$$

Soweit, so gut! Entsinnen wir uns jetzt der Rechenregel $|r \cdot \vec{v}| = |r| \cdot |\vec{v}|$ und beachten obigen **fett gedruckten Sachverhalt**, so gewinnen wir daraus folgende für uns in Kürze noch überaus wichtige Einsicht, die wir formulieren in nachstehendem

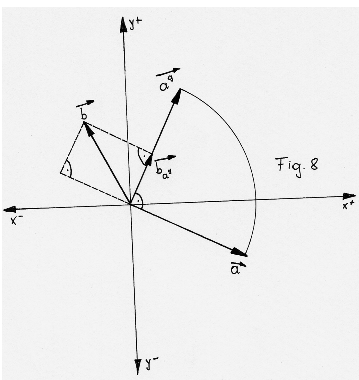
$\boxed{\text{Satz.}}$ Geometrische Bedeutung des Skalarprodukts:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b_a}\right| \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{c} \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \text{ spitz} \\ \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^\circ \\ \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \text{ stumpf} \end{array} \right\}$$

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ Wegen SP1 (Lehrbuch S. 211) kann man statt $|\vec{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b_a}\right|$ ebenso $\left|\vec{b}\right| \cdot |\overrightarrow{a_b}|$ schreiben!

$\boxed{\text{Bemerkung 2.}}$ Ignoriert man zwecks Berechnung des Betrags von $\overrightarrow{b_a}$ die Vorzeichen in der Gleichung des letzten Satzes, so ergibt sich daraus der erste Satz im Lehrbuch auf S. 221!

Jetzt sind wir mit unserem momentanen Wissensstand an einer Stelle der Vektorrechnung angelangt, an der wir dazu imstande sind, das Geheimnis über das Vorzeichen des über die Determinantenformel (welche uns ja zur Vektorrechnung geführt hat) berechneten Dreiecksflächeninhalts zu lüften, und zwar wie folgt (vgl. Fig. 8!):



Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Läßt sich der Vektor $\vec{a}$ "am schnellsten" gegen den Uhrzeigersinn in den Vektor $\vec{b}$ drehen, so schließt der um 90° gegen der Uhrzeigersinn gedrehte Vektor $\vec{a}$ (nennen wir ihn $\overrightarrow{a^g}$) mit $\vec{b}$ stets einen spitzen Winkel ein, was für das Skalarprodukt $\overrightarrow{a^g} \cdot \vec{b}$ ein positives Vorzeichen zur Folge hat. Koordinatisieren wir $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, so ergibt sich zunächst $\overrightarrow{a^g} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Da nun aber die vektorielle Projektion $\overrightarrow{b_{a^g}}$ dem Betrage nach genau der Höhe des Dreiecks $\Delta OAB[O(0|0),\ A(x_1|y_1),\ B(x_2|y_2)]$ auf die Seite OA entspricht, gilt für den Flächeninhalt F des Dreiecks somit $F = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b_{a^g}}\right|$. Wegen $\overrightarrow{a^g} \cdot \vec{b} = \underbrace{\left|\overrightarrow{a^g}\right|}_{=|\vec{a}|\cdot\left|\overrightarrow{b_{a^g}}\right|}$ [Der "Korrekturfaktor" (aus dem Satz über die geometrische Bedeutung des Skalarprodukts) lautet ja wegen des spitzen Winkels zwischen $\overrightarrow{a^g}$ und $\vec{b}$ gerade 1!] und $\overrightarrow{a^g} \cdot \vec{b} = -x_2y_1 + x_1y_2 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) > 0$ ergibt sich somit, dass die Determinantenformel also für den Fall, dass $\vec{a}$ "am schnellsten" **gegen den Uhrzeigersinn** in den Vektor $\vec{b}$ gedreht werden kann, einen **positiven Flächeninhalt** liefert.

Mit einer analogen Überlegung kommt man zum Resultat, dass bei der "schnellsten" Drehung des Vektors $\vec{a}$ in den Vektor $\vec{b}$ **mit dem Uhrzeigersinn** der durch die halbe Determinante $\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ berechnete Dreiecksflächeninhalt wegen $\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) < 0$ **negativ** ist.

Fassen wir dies zusammen in folgendem

$\boxed{\text{Satz.}}$ Der durch die Formel $F = \frac{1}{2} \cdot \det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ vermittelte Flächeninhalt F des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks hat für den Fall, dass $\vec{a}$ am "schnellsten" mit bzw. *entgegen* dem Uhrzeigersinn in $\vec{b}$ gedreht werden kann, negatives bzw. *positives* Vorzeichen.

$\boxed{\text{Bemerkung.}}$ Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegenseitige Vielfache, so liefert die Drehung von $\vec{a}$ um 90° ebenso einen Normalvektor von $\vec{b}$, woraus wegen $\overrightarrow{a^g} \cdot \vec{b} = \det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ und $\overrightarrow{a^g} \cdot \vec{b} = 0$ bzw. $\overrightarrow{a^u} \cdot \vec{b} = \det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ und $\overrightarrow{a^u} \cdot \vec{b} = 0$ schließlich (wie auch anschaulich nicht anders zu erwarten!) $\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$ folgt.

Im Gegensatz zum letzten Abschnitt über das Vorzeichen der Determinante (welcher - wenn überhaupt - erst im Frühling behandelt wird) befindet sich die $\boxed{\text{dennoch sehr wichtige}}$ **Normalvektorform der Geradengleichung** nicht im Skriptum (Zu beherrschen ist sie aber auf jeden Fall!!), es folgt nun die auch noch für die 2. Schularbeit wesentliche $\boxed{\text{Cramersche Regel}}$ zur Lösung linearer Gleichungssysteme, welche wir unter Verwendung zweier der bislang erworbenen Begriffe aus der Vektorrechnung ableiten werden.

Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. Resel, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Schreiben wir das lineare Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{c} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\}$ in vektorieller Form an, so lautet es $\begin{pmatrix} ax+by \\ dx+ey \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ bzw. $x \cdot \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$. Bilden wir das skalare Produkt beider Seiten der letzten Vektorgleichung einmal mit einem Normalvektor des Vektors $\begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix}$ und ein anderes Mal mit einem Normalvektor des Vektors $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$, so

erhalten wir im ersten Fall $x \cdot \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ -b \end{pmatrix}$ bzw. $\boxed{x = \dfrac{\det\begin{pmatrix} c & b \\ f & e \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}}}$

und im zweiten Fall $y \cdot \begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d \\ a \end{pmatrix}$ bzw. $\boxed{y = \dfrac{\det\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}}}$.

Dies formulieren wir nun in folgendem

Satz. (Cramersche Regel zur Lösung eines linearen Gleichungssystems).
Ordnet man dem linearen Gleichungssystem $\boxed{\left\{\begin{array}{c} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\} (*)}$ seine *Koeffizientenmatrix* $\boxed{K = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}}$, sowie die Matrizen $\boxed{K_x = \begin{pmatrix} c & b \\ f & e \end{pmatrix}}$ und $\boxed{K_y = \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix}}$ zu,

so ist die Lösung $(x|y)$ im Fall $\det K \neq 0$ durch $\boxed{(x|y) = \left(\frac{\det K_x}{\det K} \middle| \frac{\det K_y}{\det K}\right)}$ gegeben.

Bemerkung. Da die Komponenten des linken bzw. rechten Spaltenvektors von K (also $\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} b \\ e \end{pmatrix}$!) gerade den Koeffizienten von x bzw. y in $(*)$ entsprechen, sprechen wir statt der beiden Spaltenvektoren auch von der $x-$ bzw. der $y-$Spalte. Ebenso taufen wir den an und für sich als "Störvektor" bezeichneten Vektor $\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ der rechten Seite von $(*)$ in "Störspalte" um und haben somit folgende **mnemotechnische Merkhilfe** für die Regel von Cramer:

- Sowohl in der Lösungsformel für x als auch für y steht im Nenner die Determinante der Koeffizientenmatrix.
- Im Zähler der Lösungsformel für x bzw. y befindet sich dann die Determinante jener Matrix K_x bzw. K_y, die man erhält, wenn man in K die $x-$ bzw. $y-$Spalte durch die Störspalte ersetzt.

Auf der folgenden letzten Seite dieses Skriptums zur Vektorrechnung im Wintersemester (Im Sommersemester werden wir in einem kürzeren Kapitel des Anwendungskapitels *Analytische Geometrie* der Vektorrechnung noch einige Vertiefungen durchnehmen!) wird noch auf die Bedeutung der Forderung $\det K \neq 0$ in der Regel von Cramer eingegangen und vor allem überlegt, was passiert, wenn diese Forderung nicht erfüllt ist!

Vektorrechnung und ebene analytische Geometrie

Dr. R. RESEL, GRgORg Wien XXII, Heustadelgasse 4, 1220 Wien

Aus der numehr schon vertrauten Formel "Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen vermindert um das Produkt der Elemente der Nebendiagonalen" zur Berechnung der Determinante einer zweizeiligen und zweireihigen Matrix (kurz: "2x2-Matrix") folgt insbesondere, dass das Vertauschen der Nebendiagonalelemente einer Matrix [Die in dieser Weise aus der Matrix K hervorgehende Matrix wird "Transponierte" von K genannt und als K^t angeschrieben. Die Hochzahl hat hiebei aber nichts mit der $\mathrm{t}^{\mathrm{ten}}$ Potenz der Matrix K zu tun - was immer dies auch bedeuten soll; schließlich haben wir nichts über das Multiplizieren von Matrizen (Mehrzahl von Matrix!) gelernt, was allenfalls in einem Wahlmodul behandelt werden wird!] ihre Determinante nicht ändert, woraus sich folgende wichtige Konsequenz ergibt:

Aus $\det \overbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}}^{K} = 0$ folgt auch $\det \overbrace{\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix}}^{K^t} = 0$, was – wir wir bereits wissen – bedeutet, dass die **Spaltenvektoren** von K^t gegenseitige Vielfache sind. Ebenjene sind aber gerade die Normalvektoren der durch die beiden Gleichungen von $(*)$ beschriebenen Geraden, deren Schnittpunkt dem Lösungspaar von $(*)$ entspricht. Da die Normalvektoren der beiden Geraden aber zueinander parallel sind, sind es auch die Geraden zueinander, womit diese entweder zusammenfallend (d.h. sie haben alle Punkte gemeinsam, woraus unendlich viele Lösungen von $(*)$ resultieren) oder echt parallel [d.h. es gibt keine Lösung für $(*)$] sind.

Doch wie erkennt man nun, welcher der beiden Fälle
(zusammenfallend oder echt parallel) tatsächlich vorliegt?

- Nun ja, wenn 0 nur auf **einer** der rechten Seiten der beiden Gleichungen von $(*)$ steht, dann geht eine der beiden Geraden (jene mit der 0 auf der rechten Seite ihrer Gleichung) durch den Ursprung, die andere aber nicht und sie liegen somit echt parallel zueinander.

- Steht auf den rechten Seiten beider Gleichungen 0, dann verlaufen beide Geraden durch den Ursprung und sind somit zusammenfallend.

- Steht auf den rechten Seiten beider Gleichungen eine von 0 verschiedene reelle Zahl, so dividiert man beide Gleichungen durch die jeweilige Zahl der rechten Seite. Dann stimmen die rechten Seiten der Gleichungen überein (weil diese dann jeweils aus der 1 bestehen).
  - Stimmen nach diesen Divisionen auch die linken Seiten überein, dann haben wir idente Geradengleichungen und die beiden Geraden sind somit zusammenfallend.
  - Ist dies nicht der Fall, dann liegen sie echt parallel.