



51. Österreichische Mathematische Olympiade 2020

Sieben (bzw. 24) Aufgaben zum Thema "Zahlentheorie"

Kursleiter: Dr. Robert Resel

1. Beweise, dass 60% der Ziffern des dekadischen Zahlensystems als Einerziffer für Quadratzahlen in Frage kommen!
2. Beweise: Quadratzahlen lassen bei Division durch 3 nie den Rest 2.
3. Beweise: Quadratzahlen lassen bei Division durch 6 nie den Reste 2 oder 5.
4. Die Zahlen p und q bilden ein Primzahlzwillingspaar (d.h. zwei Primzahlen, die sich um genau 2 unterscheiden) mit $3 < p < q$. Zeige, dass das arithmetische Mittel dieser beiden Primzahlen durch 6 teilbar ist und dass das um 1 vergrößerte Produkt der beiden Primzahlen durch 36 teilbar ist.
5. Beweise: $3 \mid n + (n + 1) + \dots + 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
6. Beweise: Ist p eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl, dann gilt $24 \mid p^2 - 1$.
7. Aus den ersten 15 natürlichen Zahlen (ohne der 0) sind zwei Zahlen derart auszuwählen, dass deren Produkt der Summe der 13 verbleibenden Zahlen gleicht. Ist das möglich (Beweis!)?

Weitere 17 Aufgaben:

- Aufgabe 2 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 3 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 6 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 10 aus den 48 vermischten Aufgaben

- Aufgabe 13 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 14 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 15 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 16 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 20 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 24 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 27 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 28 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 32 oder 34 (die andere zum eigenständigen Üben!) aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 33 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 36 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 46 aus den 48 vermischten Aufgaben
- Aufgabe 48 aus den 48 vermischten Aufgaben

Gutes Gelingen!

Wien, im Juli 2019.

Dr. Robert Resel, eh.