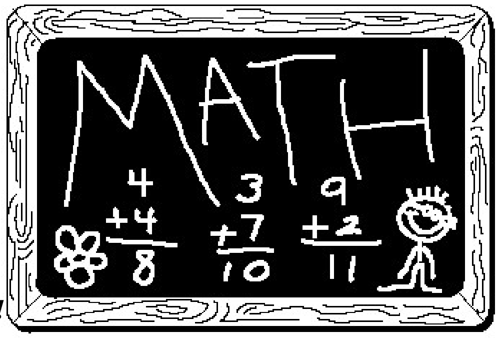
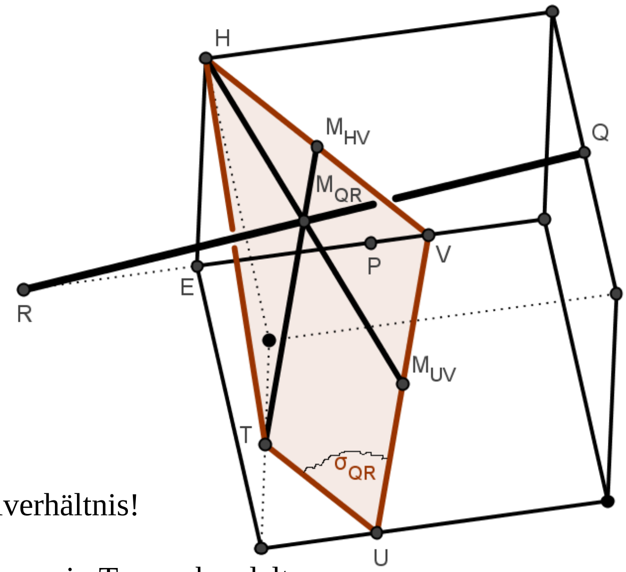
[Zusätzliche] **vermischte Übungsbeispiele für den Realistenteil der 8B** [8A(G)] **sowohl für neuen Stoff der 8. Klasse** [*§4)*] **als auch entsprechende Wiederholungskapitel** [*§1), §2) und §3)*] **im Schuljahr 2011/2012**

*Diese Beispiele sollen durch diverse Stoffgebiete der sechsten, siebenten und achten Klasse (in Grundlagen – Vektorrechnung! – auch der fünften Klasse!) und zwar anhand von Aufgaben, deren "Bausteine" geradezu charakteristisch für **Maturabeispiele** sind.*

ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse sowohl bei der dreistündigen Schularbeit als auch bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der dreistündigen Schularbeit resp. der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!



§1) Analytische Raumgeometrie



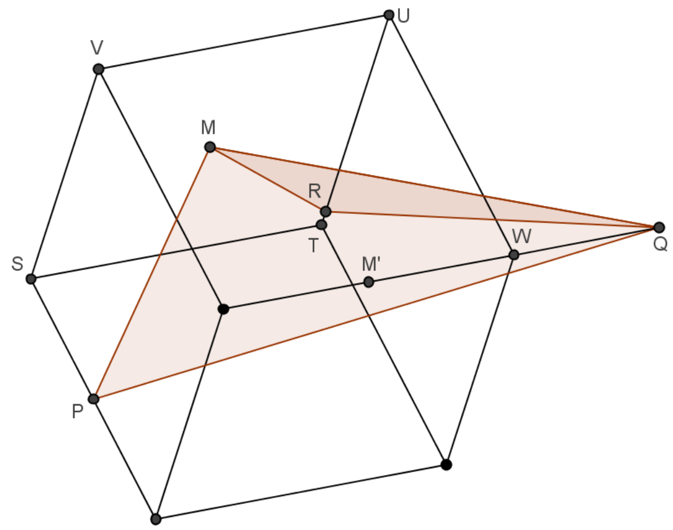
1) In der rechten Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 12 abgebildet. P und Q sind Kantenmittelpunkte, R ist der Spiegelpunkt von P am Würfeleckeckpunkt E, σ_{QR} die Symmetrieebene der Strecke QR.

   a) Wie man zeigen kann, schneidet σ_{QR} nur sechs der zwölf Würfelkanten, wobei im Würfeleckpunkt H drei Schnittpunkte zusammenfallen. Berechne die Koordinaten von T, U und V in einem geeigneten Koordinatensystem und zeige, dass $H \in \sigma_{QR}$ gilt!

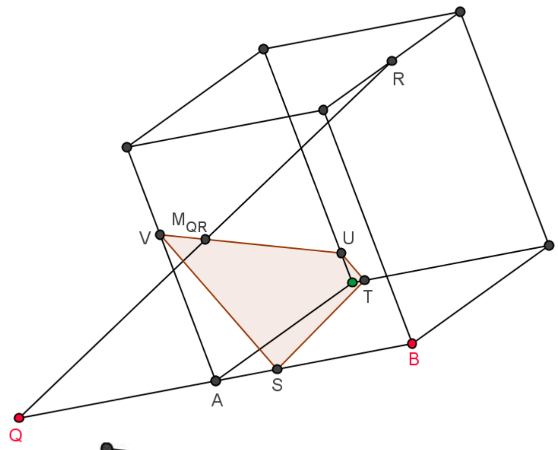
   b) Zeige, dass die Geraden $g_{TM_{HV}}$ und $g_{HM_{UV}}$ einander in M_{QR} schneiden und beschreibe dessen Lage auf den entsprechenden Strecken jeweils durch ein Teilverhältnis!

   c) Begründe, dass es sich beim Schnittviereck HTUV um ein Trapez handelt. Kommentiere das Resultat $\mathcal{A}$=134,7 für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ des Trapezes!

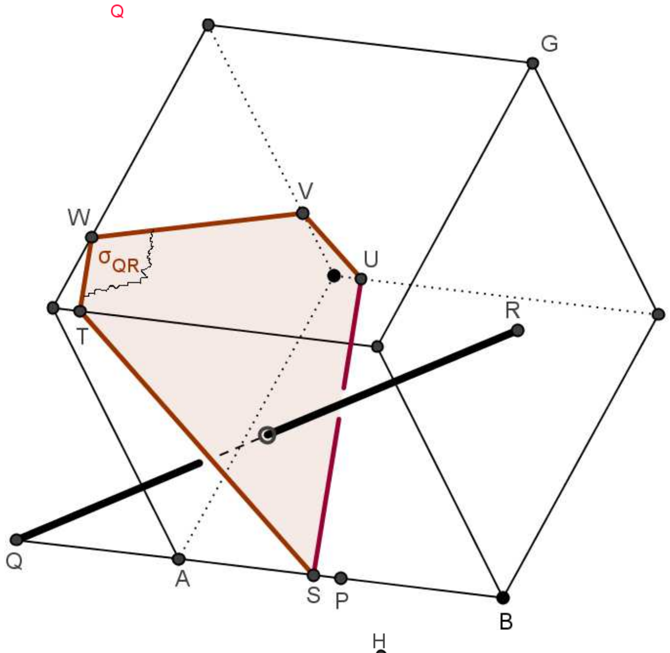
2) P und M´ sind Kantenmittelpunkte, M ist der Flächenmittelpunkt des Quadrats STUV des abgebildeten Würfels (Seitenlänge 16). Q ist der Spiegelpunkt von M´ an der Würfelecke W, R liegt auf der Würfelkante TU, wobei $\overline{RT} = 1$ gilt. Zeige, dass die abgebildeten Dreiecke aufeinander normal stehen und setze deren Flächeninhalte in ein möglichst einfaches ganzzahliges Verhältnis!



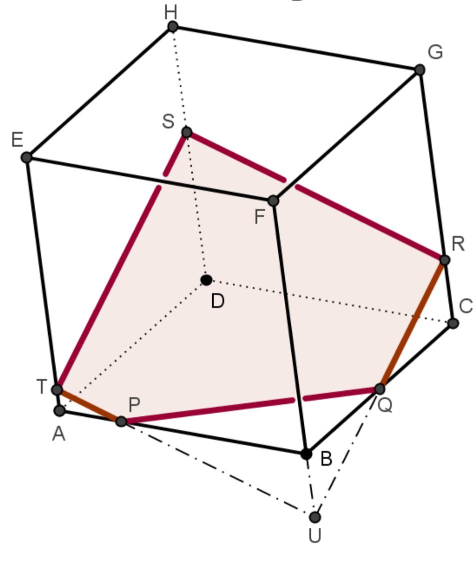
3) Würfel mit Seitenlänge 16:
Q ist der Spiegelpunkt von B an A,
R ist ein Kantenmittelpunkt,
σ_{QR} ist die Symmetrieebene der Strecke QR
Zeige bzgl. des Schnittvierecks:
Es ist ein Trapez.
Der Mittelpunkt der Strecke QR liegt auf dem Schenkel VU (Gib das Teilverhältnis an!).
Ist das Trapez gleichschenklig?
Zeige, dass der Flächeninhalt ziemlich genau 110 beträgt.



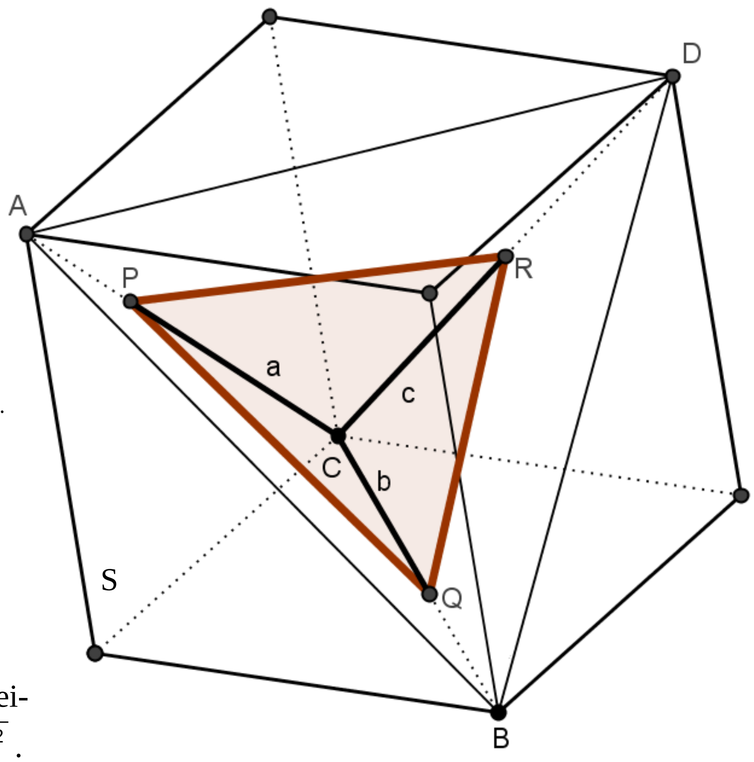
4) Würfel mit Seitenlänge 24:
P ist der Mittelpunkt der Kante AB.
R ist der Mittelpunkt der Diagonale BG.
Q ist der Spiegelpunkt von P an A.
σ_{QR} ist die Symmetrieebene der Strecke QR.
Zeige bzgl. des Schnittfünfecks:
Flächeninhalt ca. 16477/36



5) Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 24): Q=M_{BC}
P und R entstehen durch Kantenviertelung, wobei P bzw. R von A bzw. C aus betrachtet der jeweils erste Teilungspunkt ist. Ermittle in einem selbst zu wählenden geeigneten Koordinatensystem die Lage der Schnittpunkte S und T der durch P, Q und R aufgespannten Ebene mit den Kanten DH und AE und berechne ferner den Flächeninhalt des Schnittfünfecks PQRST dieser Ebene mit dem Würfel. Ist das Parallelogramm RSTU gar eine Raute oder Quadrat? Begründe, warum U auf der Gerade durch B und F liegen muss und berechne den Flächeninhalt des Fünfecks PQRST!



6) Nebenstehend ist aus einem Würfel der Seitenlänge 42 ein regelmäßiges Tetraeder ABCD abgeleitet worden. R ist der Mittelpunkt der Kante CD, P entsteht durch Drittelung der Kante CA, wobei P von A aus betrachtet der erste Teilungspunkt ist. Bestätige anhand dieser speziellen Anordnung die folgenden Sätze:



Ist b das halbe harmonische Mittel von a und c, dann gilt:

Satz 1. Die Ebene ε_{PQR} steht auf die Ebene ε_{CSB} normal.

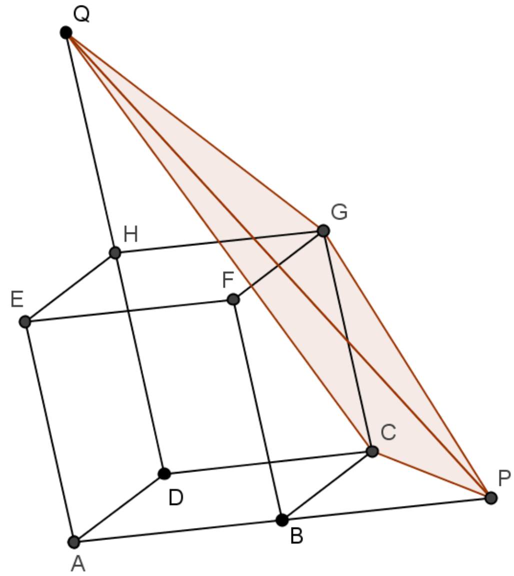
Satz 2. $\overline{QR} : \overline{QP} = c : a$

Satz 3. $b = \dfrac{c}{1+\frac{\overline{QR}}{\overline{QP}}} = \dfrac{a}{1+\frac{\overline{QP}}{\overline{QR}}}$

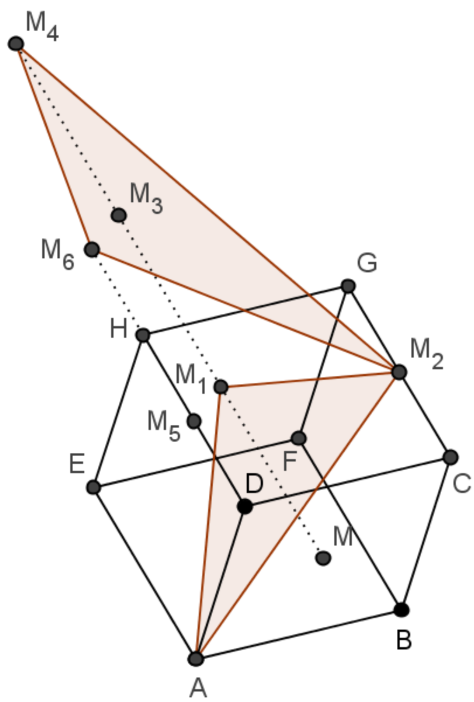
Satz 4. Für den Flächeninhalt μ des Dreiecks ΔPQR gilt $\mu = \frac{b}{2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}$.

Zeige außerdem allgemein, dass die Sätze 2 und 3 zueinander äquivalent sind!

7) Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 2): P bzw. Q entsteht durch Spiegelung der Würfelecke A an B bzw. D an H. Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen ε_{PQC} und ε_{PQG}! Ermittle das Verhältnis $k=\mu:\mu'$, wobei μ bzw. μ' den Flächeninhalt des Dreiecks ΔPQG bzw. ΔPQC bezeichnet und zeige ohne TR, dass $k = \frac{2}{3}\cdot\sin\varphi$ gilt!



8) M bzw. M_1 ist der Mittelpunkt des Quadrats ABCD bzw. EFGH des Würfels ABCDEFGH (Seitenlänge 2), M_2 und M_5 sind Kantenmittelpunkte. M_6 ist der Spiegelpunkt von M_5 an H. M_4 entsteht durch fortlaufende Spiegelung von M a M_1. Ermittle ohne Taschenrechner das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen den Ebenen durch einerseits die Punkte A, M_1 und M_2 und andererseits durch die Punkte M_2, M_4 und M_6!

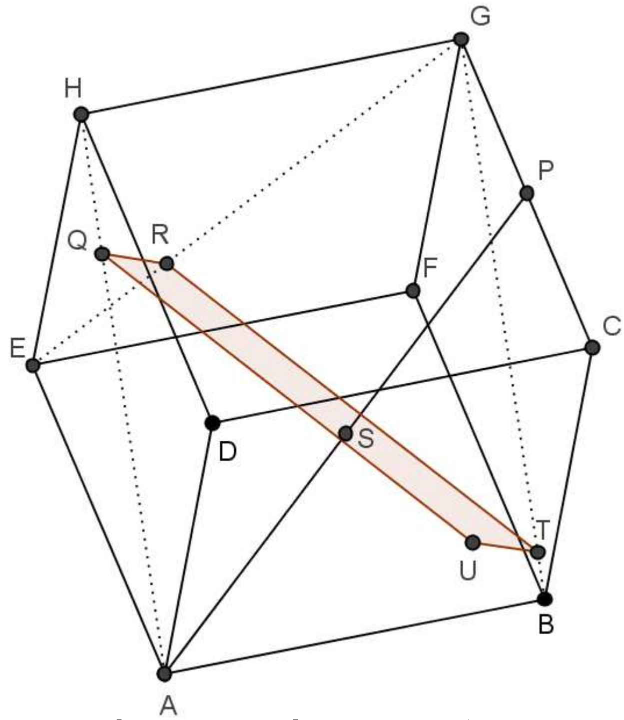


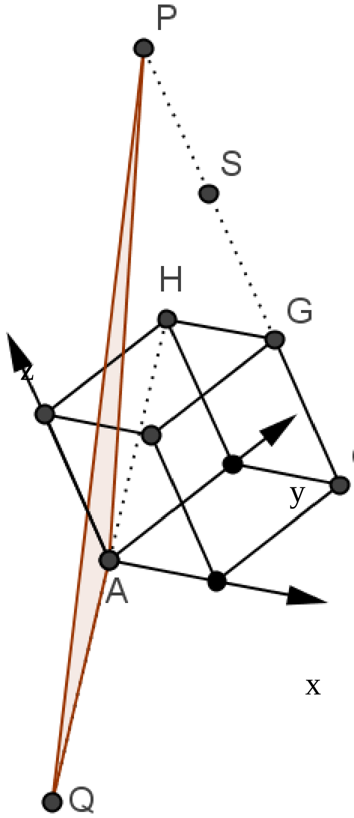
9) Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 48):
P ist der Mittelpunkt der Kante CG.
Die Symmetrieebene der Strecke AP schneidet die Flächendiagonalen AH, EG und BG in den Punkten Q, R und T. Durch U wird das Dreieck QRT zum Parallelogramm QRTU ergänzt.

a) Berechne die Koordinaten von Q, R, T, U und vom Durchstoßpunkt der Gerade g_{AP} mit der Symmetrieebene.

b) Ermittle den Flächeninhalt des Parallelogramms QRTU!

c) Bestimme ohne Taschenrechner das Maß des Winkels $\sphericalangle RSQ$!





10) Abbildung links (inkl. eingezeichnetem Koordinatensystem):

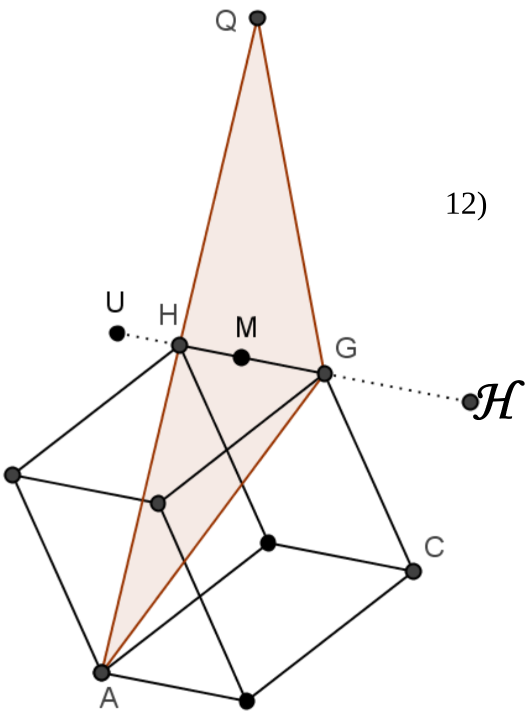
Berechne die Koordinaten des Höhenschnittpunkts $\mathcal{H}$ sowie des Umkreismittelpunkts U (inkl. Umkreisradius R) des Dreiecks ΔAPQ. Dabei entsteht P durch fortlaufende Spiegelung von C an G und Q ist der Spiegelpunkt von H an A. Der Würfel weist eine Kantenlänge von 2 auf.
[Lsg.: H(–8|12|–4), U(5|–6|4), $R=\sqrt{77}$]

11) Abbildung links unten (Würfel der Seitenlänge 2):
Q entsteht durch Spiegelung von A an H.

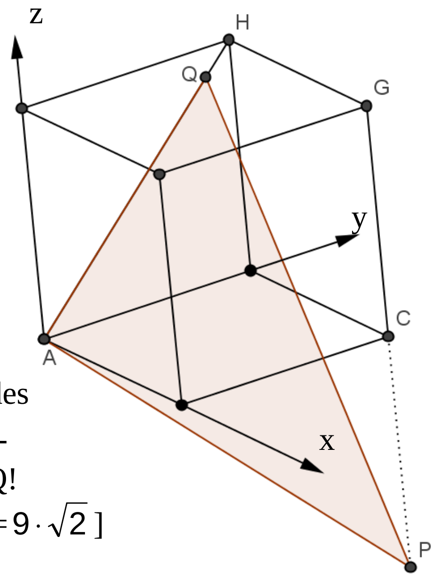
a) Zeige, dass das Dreieck ΔAGQ gleichschenklig ist.

b) Begründe, warum die EULERsche Gerade des Dreiecks ΔAGQ daher mit der Würfelkante GH zusammenfällt!

c) Ermittle im Sinne von b) die Lage des Höhenschnittpunkts $\mathcal{H}$ sowie des Umkreismittelpunkts U (inkl. Umkreisradius R) des Dreiecks ΔAGQ und bestätige sowohl, dass $\mathcal{H}$ der Spiegelpunkt von H an G als auch, dass U der Spiegelpunkt des Kantemittelpunkts M an H ist.



12) Abbildung rechts (Würfel mit der Kantenlänge 8):
P ist der Spiegelpunkt von G an C, Q entsteht durch Achtelung der Flächendiagonale AH, wobei Q von H aus betrachtet der erste Teilungspunkt ist.
Ermittle im angegebenen Koordinatensystem sowohl die Lage des Höhenschnittpunkts $\mathcal{H}$ als auch des Umkreismittelpunkts U (inkl. Umkreisradius R) des Dreiecks ΔAPQ!
[Lsg.: H(–2|–7|–1), U(5|11|–4), $R=9\cdot\sqrt{2}$]



13) Abbildung 59:
Berechne die Koordinaten des Höhen-Schnittpunkts H des aus einem Würfel der Seitenlänge 28 abgeleiteten Dreiecks ΔABC im angegebenen Koordinatensystem (Lösung rechts!), wobei alle Punkte durch Streckenhalbierung und Spiegelung entstehen.

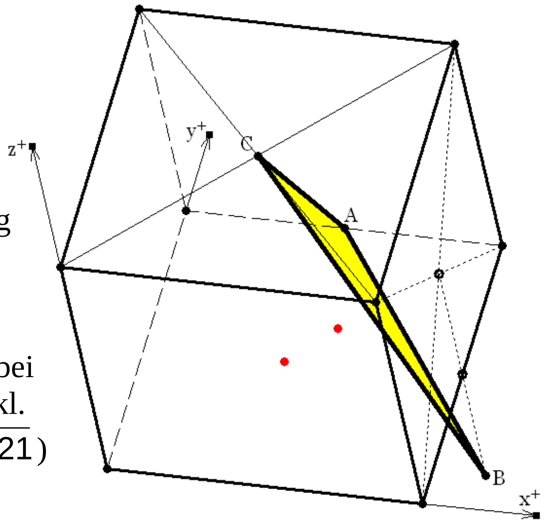


Abbildung 59 (und 60):
Lösung: U(24|9|8),
H(8|38|-2)

14) Abbildung 60: Siehe Aufgabe 13), wobei nun statt H der Umkreismittelpunkt U inkl. Umkreisradius (als Probe! Lsg.: $r = 5 \cdot \sqrt{21}$) zu ermitteln ist!

15) Abbildung 61: Berechne die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H des aus einem Würfel der Seitenlänge 36 abgeleiteten Dreiecks ΔABC im angegebenen Koordinatensystem (Lösung rechts!), wobei alle Punkte durch Streckenhalbierung, -drittelung und -sechstelung sowie Spiegelung entstehen.

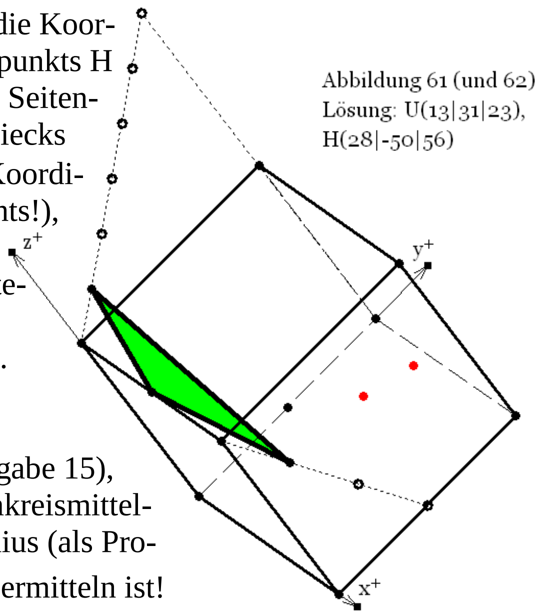


Abbildung 61 (und 62)
Lösung: U(13|31|23),
H(28|-50|56)

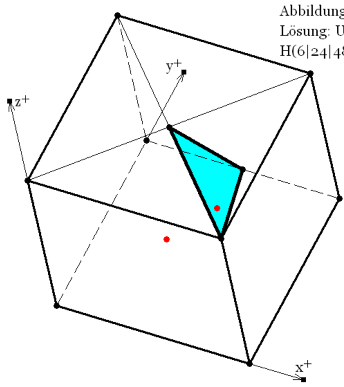
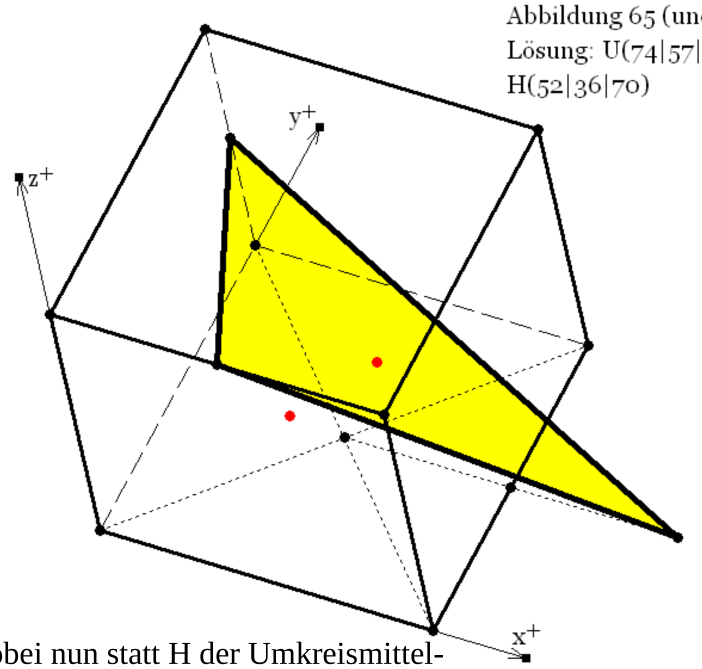


Abbildung 63 (und 64):
Lösung: U(33|15|12),
H(6|24|48)

16) Abbildung 62: Siehe Aufgabe 15), wobei nun statt H der Umkreismittelpunkt U inkl. Umkreisradius (als Probe! Lsg.: $r = \sqrt{1155}$) zu ermitteln ist!

17) Abbildung 63: Berechne die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H des aus einem Würfel der Seitenlänge 36 abgeleiteten Dreiecks ΔABC im angegebenen Koordinatensystem (Lösung rechts oben!), wobei alle Punkte durch Streckenhalbierung entstehen.

Abbildung 65 (und 66):
Lösung: U(74|57|40),
H(52|36|70)



18) Abbildung 64: Siehe Aufgabe 17), wobei nun statt H der Umkreismittelpunkt U inkl. Umkreisradius (als Probe! Lsg.: $r = 9 \cdot \sqrt{10}$) zu ermitteln ist!

19) Abbildung 65: Berechne die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H des aus einem Würfel der Seitenlänge 100 abgeleiteten Dreiecks ΔABC im angegebenen Koordinatensystem (Lösung rechts!), wobei alle Punkte durch Streckenhalbierung entstehen.

20) Abbildung 66: Siehe Aufgabe 19), wobei nun statt H der Umkreismittelpunkt U inkl. Umkreisradius (als Probe! Lsg.: $r = 15 \cdot \sqrt{33}$) zu ermitteln ist!

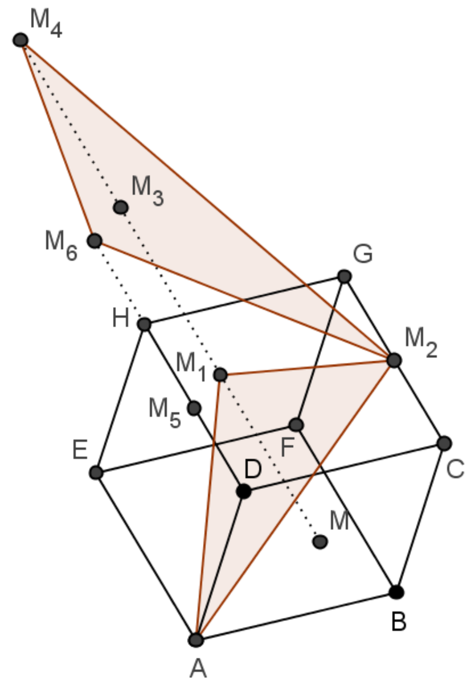
21) Als erste Fortsetzung von Aufgabe 8):

a) Zeige auf zwei Arten, dass ΔAM_1M_2 rechtwinklig ist.

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔAM_1M_2!

c) Zeige, dass sich die Flächeninhalte der Dreiecke ΔAM_1M_2 und $M_2M_4M_6$ wie 1:2 verhalten.

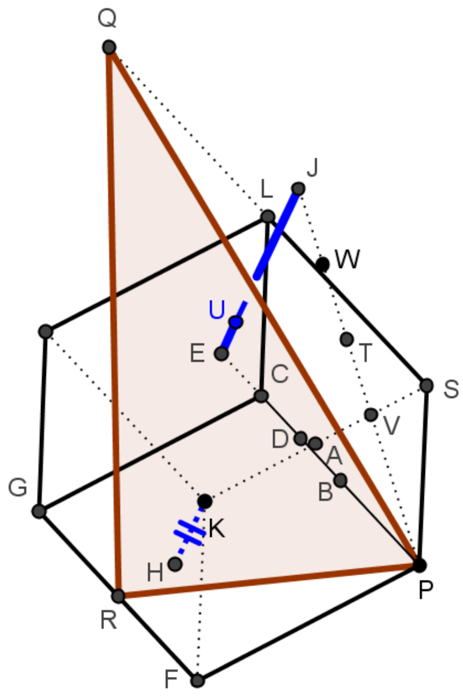
22) Als zweite Fortsetzung von Aufgabe 8):
Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgerade der beiden Ebenen. Was fällt dir auf und wie lässt sich dies über die Ebene durch die Punkte A, M_1 und M_2 in ihrer Rolle als eine Symmetrieebene des Würfels erklären?

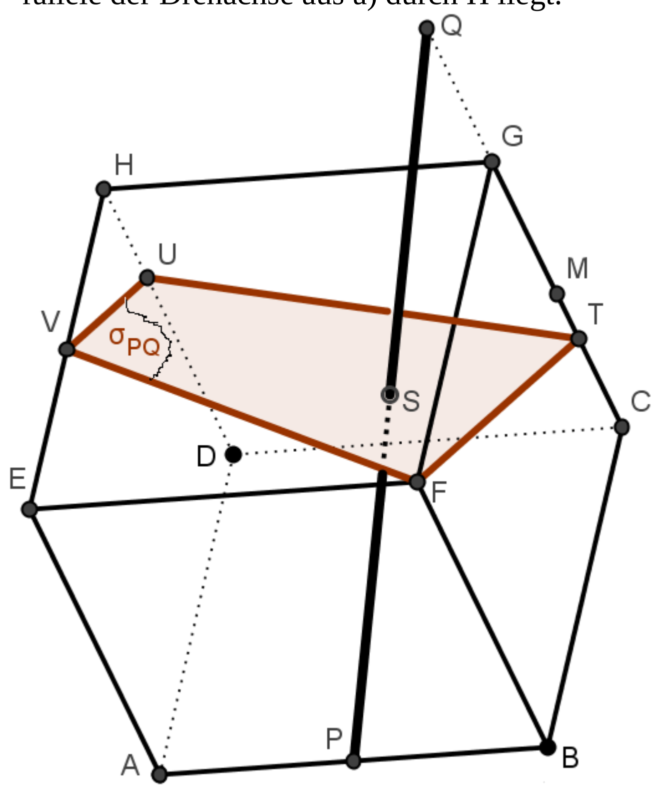


23) Der nebenstehend abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 84 auf. R ist der Mittelpunkt der Würfelkante FG, Q der Spiegelpunkt der Würfelecke S an der Würfelecke L. B ist der Mittelpunkt der Kante PC, D der Mittelpunkt der Strecke BC sowie E der Spiegelpunkt von D an C. A ist der Mittelpunkt der Kante SK, V der Mittelpunkt der Strecke AS sowie W der Spiegelpunkt von P an W. Schließlich ist T der Mittelpunkt der Strecke VW und J der Spiegelpunkt von T an W.

a) Ermittle in einem geeigneten selbst zu wählenden Koordinatensystem sowohl eine Parameterdarstellung der Drehachse d des Umkreises des Dreiecks ΔPQR als auch die Koordinaten seines Mittelpunkts U. Zeige, dass E und J beide auf der Drehachse liegen.

b) Berechne auch die Koordinaten des Höhenschnittpunkts H des Dreiecks ΔPQR und zeige, dass der Würfeleckpunkt K auf der Parallele der Drehachse aus a) durch H liegt.



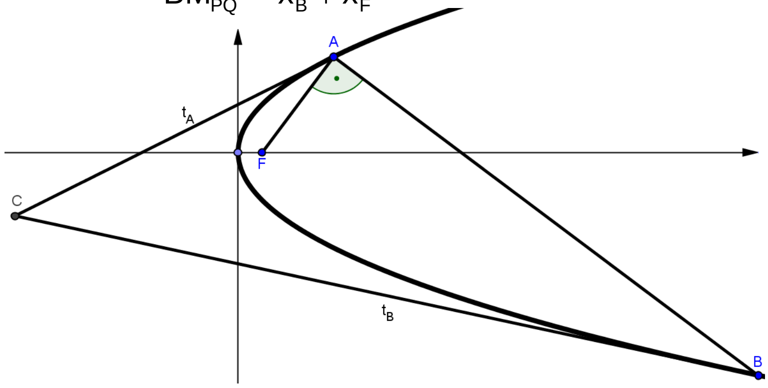


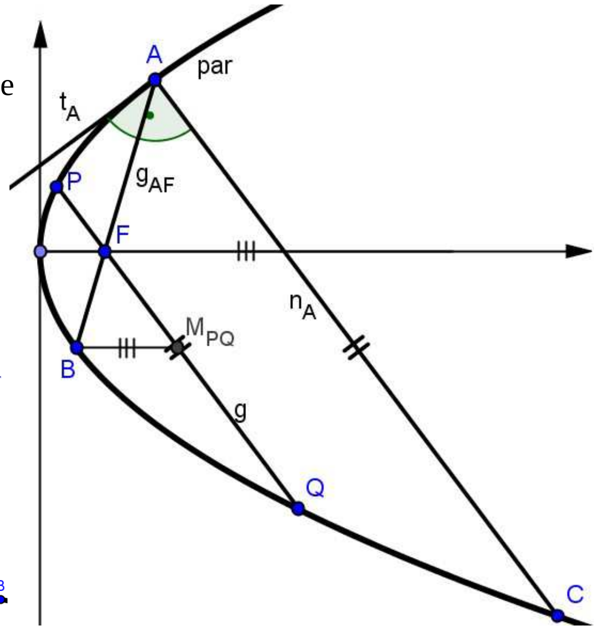
24) Der links abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 6 auf. P und M sind Kantenmittelpunkte, Q ist der Spiegelpunkt von M an G. Zeige, dass die Symmetrieebene s_{PQ} den Würfel längs des Trapezes FTUV schneidet und berechne seinen Flächeninhalt!

§2) *AK "Nicht-lineare analytische Geometrie der Ebene: Kegelschnitte* (die Parabel)*"*

25) Ausgehend vom konkreten Punkt A(256|384) und der rechten Abbildung ist folgendes zu verifizieren:

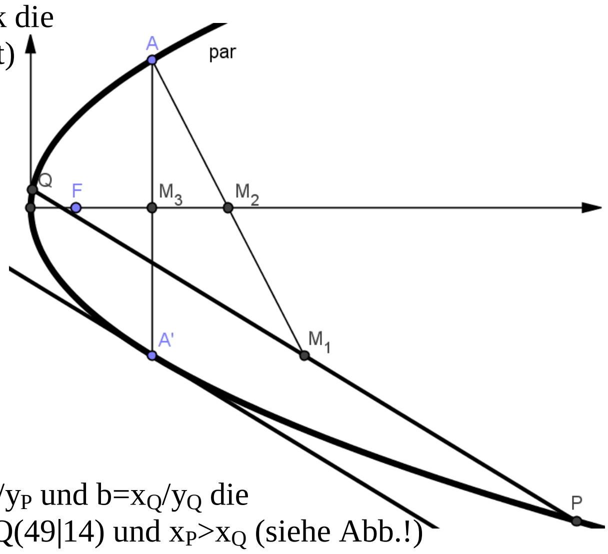
- Die Parallelität von $g_{BM_{PQ}}$ und der Parabelachse
- $\overline{AC} = \overline{PQ} \cdot \sqrt{\left(\frac{y_B}{2x_B}\right)^2 + 1}$
- $\overline{BM_{PQ}} = x_B + x_F$





26) Ausgehend vom konkreten Punkt A(36|36) und der oberen Abbildung ist folgendes zu verifizieren:

- $x_C = y_B$
- $y_C = -k \cdot p$ (wobei p den Parabelparameter und k die Steigung der Gerade durch A und F bezeichnet)



27) a) Parabelsehne PQ mit Mittelpunkt M_1
b) Berührungspunkt A´ der zur Sehne parallelen Parabeltangente
c) Spiegelpunkt A von A´ an Parabelachse
d) Mittelpunkt M_2 der Strecke AM_1
e) Mittelpunkt M_3 der Strecke FM_2
f) Zeige: M_3 ist auch der Mittelpunkt von AA´
g) Die Tangenten an par in P und Q schneiden einander im Spiegelpunkt von A an F.

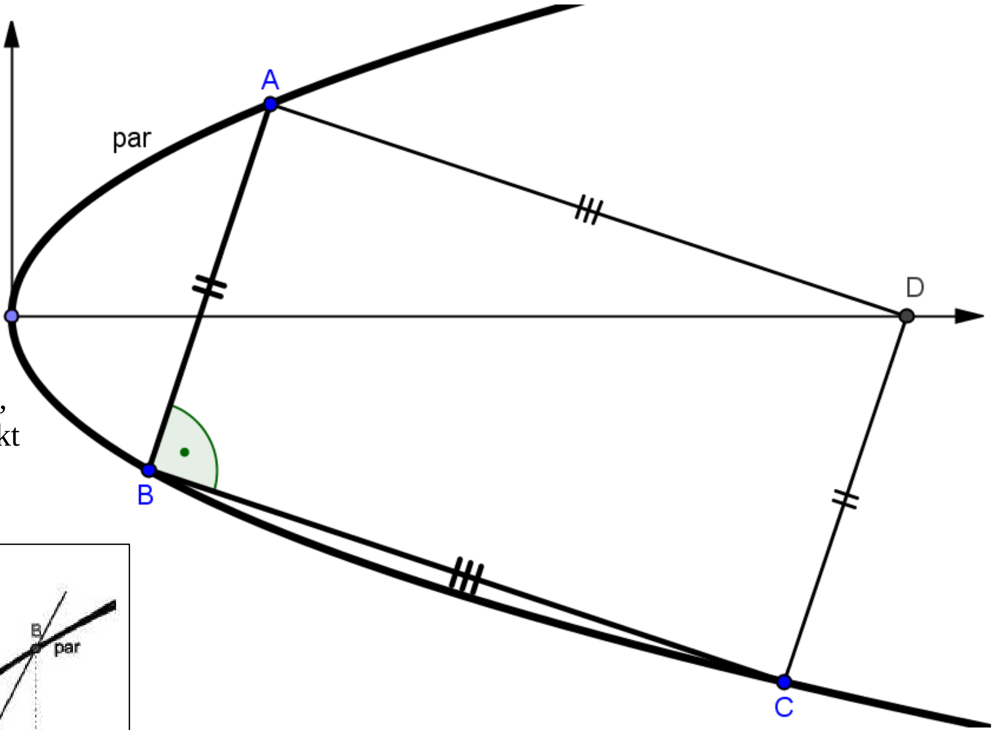
ABER NUR, wenn für $P(x_P|y_P)$ und $Q(x_Q|y_Q)$ und $a=x_P/y_P$ und $b=x_Q/y_Q$ die Gleichung $a^2+6ab+b^2=2$ gilt! Verifikation anhand von Q(49|14) und $x_P>x_Q$ (siehe Abb.!)

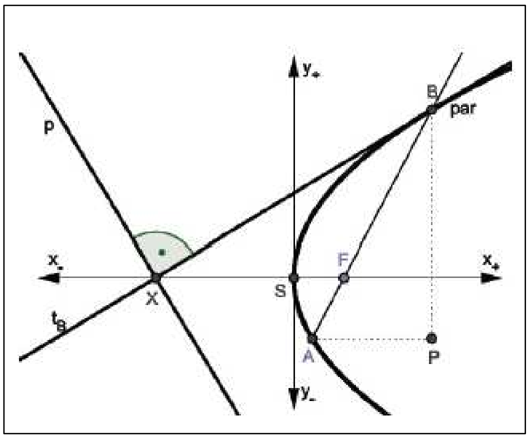
28) Wie Aufgabe 27), nur mit $x_P<x_Q$ [anders als in der Abb. neben Aufgabe 27)!]!

29) Verifiziere für jene Parabel par in erster Hauptlage durch A(81|54) mit dem Brennpunkt F folgenden SATZ. Ist B der zweite gemeinsame Punkt des Brennstrahls AF mit par, g die Parallele zur Parabeltangente t_A durch B sowie C der zweite gemeinsame Punkt von g mit par, dann gilt $\overline{AF}^2 = x_A \cdot \overline{AM_{BC}}$, wobei die Strecke AM_{BC} parallel zur Parabelachse verläuft.

30) Verifiziere für jene Parabel par in erster Hauptlage durch A(144|96) mit dem Brennpunkt F folgenden SATZ. Die Tangente an par in $T(x_T|y_T)$ mit $y_T=py_A/(x_F-x_A)$ steht auf den Brennstrahl AF normal, wobei für den Normalabstand $d(T,g_{AF})$ die Formel $d(T,g_{AF})=x_F y_A \cdot \overline{AF}/(\overline{AF}-p)^2$ gilt und p den Parabelparameter bezeichnet.

31) Verifiziere anhand der Punkte A(242|198) und B(x_B|–144) folgenden S A T Z . Liegen die Punkte A(x_A|y_A) und B(x_B|y_B) derart auf einer Parabel par in erster Hauptlage, dass $(y_A+y_B)\cdot(y_A-2y_B)=16x_F^2$ gilt (wobei F den Brennpunkt von par bezeichnet), so liegt der vierte Eckpunkt D des Rechtecks ABCD auf der Achse von par.

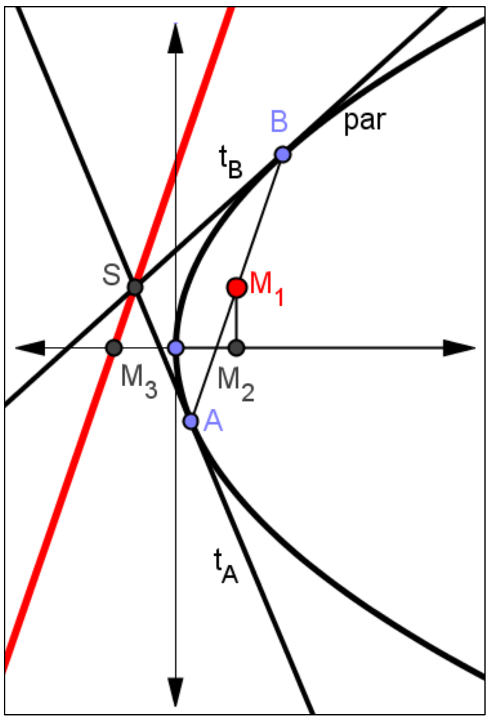




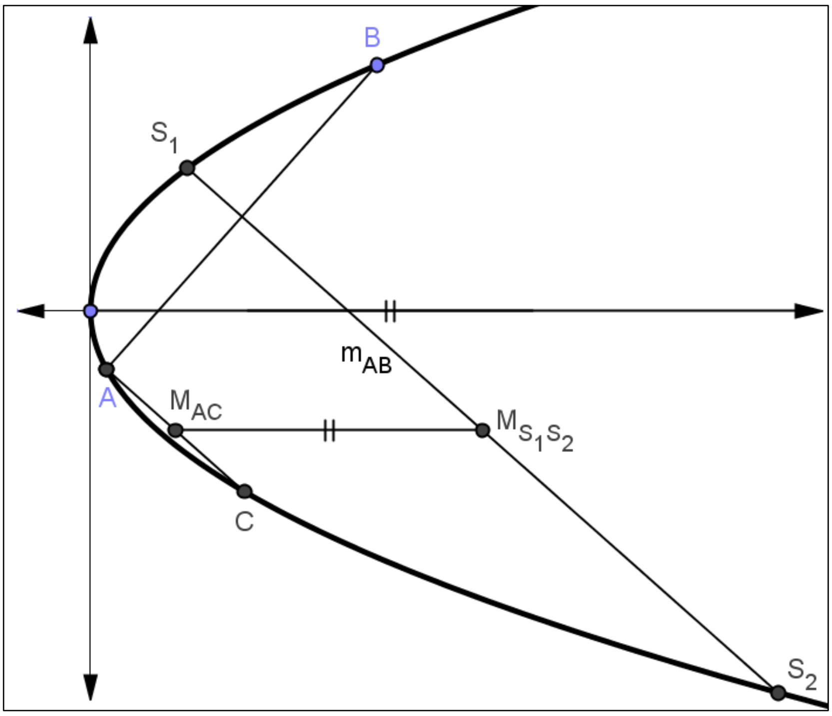
32) *In der linken Abbildung ist F der Brennpunkt einer Parabel par in erster Hauptlage, A und B sind die Endpunkte einer durch F verlaufenden Parabelsehne. Beweise oder verifiziere am Beispiel des Parabelpunkts B(32|16), dass durch* ***formales*** *Einsetzen von P in die Spaltform (Schließlich liegt P ja* ***nicht*** *auf par!) eine Gleichung der Gerade p hervorgeht!*

33) Ausgehend von einer Parabel par in erster Hauptlage mit dem Parameter p wird auf eine Parabelsehne AB eine Normale durch A gelegt, welche par nebst A in einem weiteren Punkt C schneidet. Bezeichnet k nun die Steigung der Trägergerade der Sehne AB, so gilt für die y-Koordinate y_C von C die Formel $\boxed{y_C = y_A - 2pk}$. Beweis oder Verifikation anhand eines selbst gewählten Beispiels!

34) Ausgehend von einer Parabelsehne mit den Endpunkten A und B, ihrem Mittelpunkt M_1, dessen Normalprojektion M_2 auf die Parabelachse, wiederum dessen Spiegelpunkt M_3 am Parabelscheitel sowie dem Schnittpunkt S der Tangenten und t_A und t_B an die Parabel ist zu beweisen bzw. an einem selbst gewählten Beispiel zu verifizieren, dass durch *rein formales* Einsetzen von M_1 in die Spaltform *(da ja M_1 offensichtlich – Warum eigentlich? Begründe! – nicht auf der Parabel liegt!)* eine Gerade entsteht (in der Abbildung rot gefärbt), welche durch S und M_3 geht und ferner parallel zu g_{AB} verläuft, und zwar im Parallelabstand $d=\frac{\overline{BP}^3}{8\cdot x_F\cdot \overline{AB}}$, wobei F den Brennpunkt der Parabel bezeichnet.



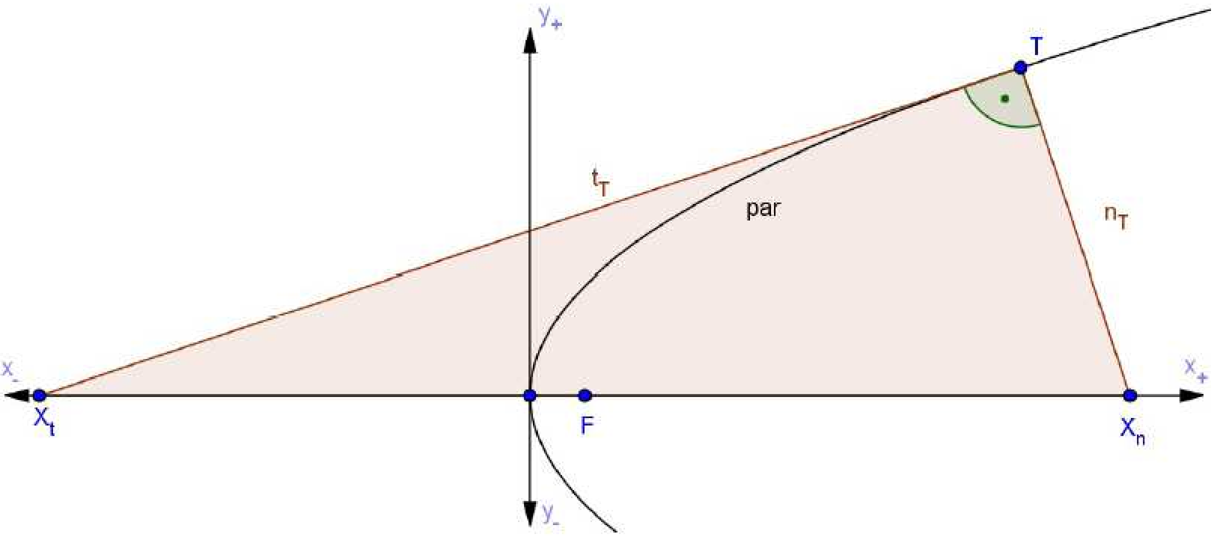
35) Abbildung rechts: Die Parabel schneidet aus der Streckensymmetrale m_{AB} der Sehne AB wiederum eine Sehne S_1S_2 aus. Dann legen die Mittelpunkte der Sehnen AC (wobei $\sphericalangle$ BAC=90°) und S_1S_2 eine zur Parabelachse parallele Gerade fest. Beweis oder Verifikation an einem Beispiel!



36) Sind A und B die Endpunkte einer Parabelsehne (wobei sich die Parabel in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F befindet), so verläuft die Tangente an par in C mit $y_C=\frac{1}{2}\cdot(y_A+y_B)$ parallel zur Trägergerade dieser Parabelsehne und für den Parallelabstand d gilt $d=\frac{|y_A-y_B|^3}{16\cdot x_F\cdot \overline{AB}}$.
Beweis oder Verifikation an einem Beispiel!

37) Sind A und B die Endpunkte einer Parabelsehne (wobei sich die Parabel in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F befindet), so verläuft die Tangente an par in einem der beiden Parabelpunkte mit der x-Koordinate $\frac{1}{4}\cdot(x_A+x_B+2x_D)$ parallel zur Trägergerade dieser Parabelsehne und für den Parallelabstand d gilt $d=\frac{|y_A-y_B|^3}{16\cdot x_F\cdot \overline{AB}}$, wobei D der Schnittpunkt der Tangenten an die Parabel in A und B ist.
Beweis oder Verifikation an einem Beispiel!

38) **Klasse: 7B(Rg)** **1. Schularbeit (zweistündig)** **20. 12. 2011**



3. Für jeden Punkt T einer Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F gilt folgender **12P.**

$\boxed{\text{SATZ.}}$ Die Tangente und die Normale t_T und n_T an par in T begrenzt mit der Parabelachse ein Dreieck ΔTX_tX_n mit dem Flächeninhalt $\mu = y_T\cdot\overline{FT}$ (vgl. auch obere Abbildung!).

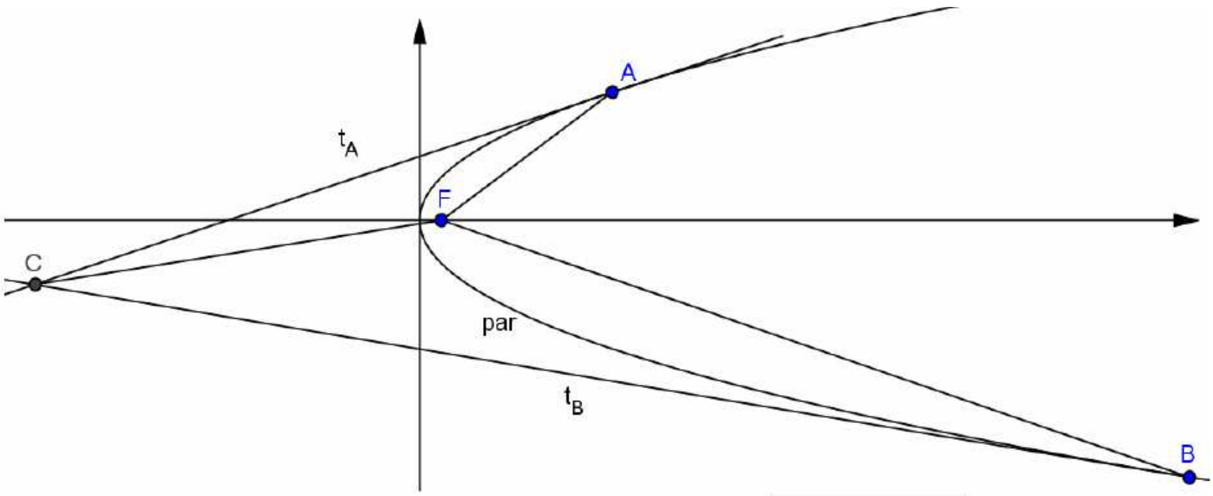
Verifiziere diesen Satz für den Punkt $T(18|12)$!

[Nur zur Kontrolle(!): par: $y^2=8x$]

39) **Klasse: 7B(Rg)** **18. 01. 2012**

1. Schularbeit (zweistündig)

Nachtragstermin für Cornelia BENES und Marianela AGÜERO



3) Bezüglich der oberen Abbildung gilt stets die Formel $\boxed{\overline{AF}\cdot\overline{BF}=\overline{CF}^2}$, wobei F den Brennpunkt von par und t_A bzw. t_B die Tangente an par in A bzw. B bezeichnet.

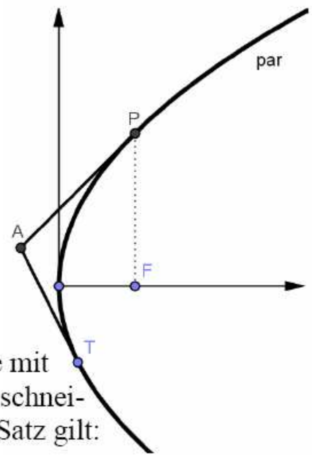
Verifiziere $\boxed{\text{sie}}$ für A(9|6) und B(36|y_B<0)!

[Verwende notwendigenfalls(!) par: $y^2=4x$.]

40) **Klasse: 7B(Rg)** **19. 01. 2012**

1. Schularbeit (zweistündig)

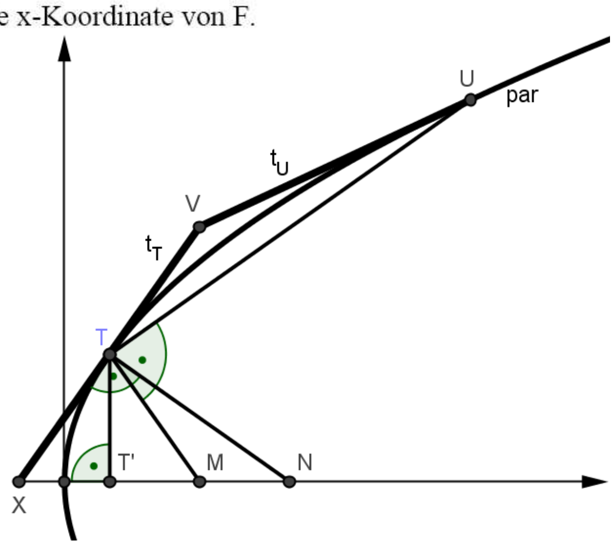
2. Nachtragstermin für Marianela AGÜERO



3) Durch den Punkt T(1/–4) geht genau eine Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F. Die Tangenten an par in P (siehe Abbildung!) und T schneiden sich in einem Punkt A, für den der folgende elementargeometrische Satz gilt:

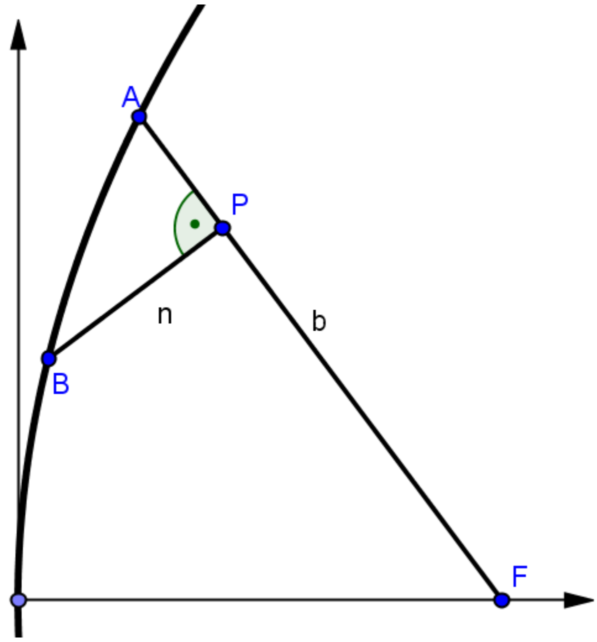
Satz. Die Koordinaten von A unterscheiden sich exakt um die x-Koordinate von F.

Kontrolliere die Gültigkeit dieses Satzes am Beispiel von par
[Zur Kontrolle(!): par: $y^2=16x$]



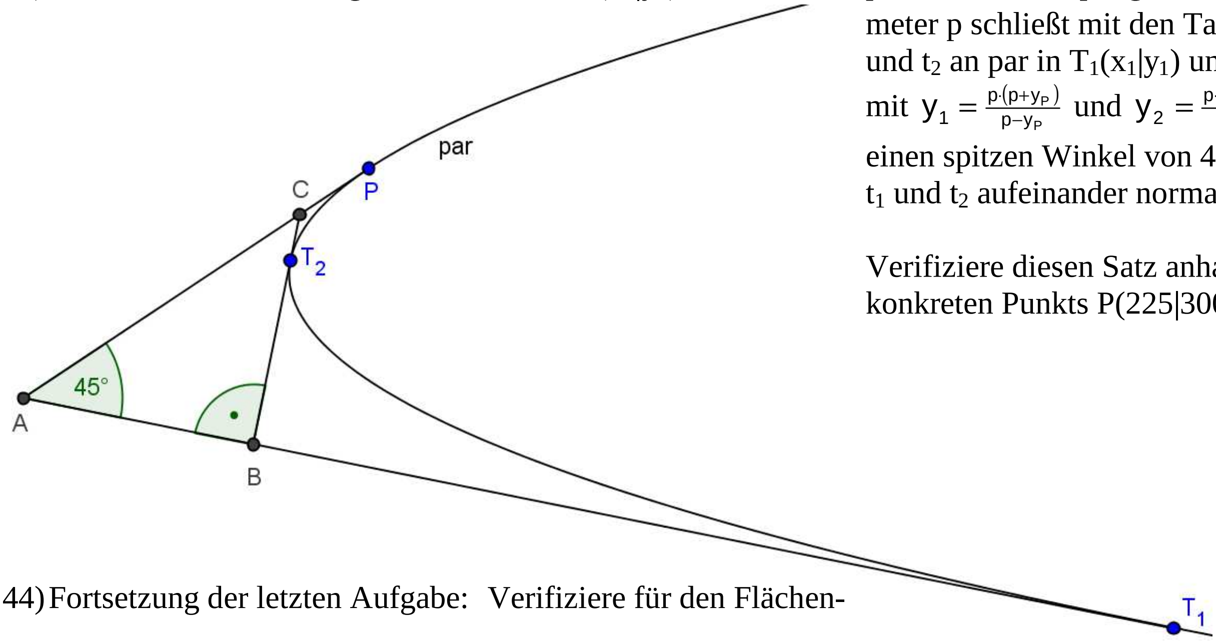
41) Zeige am Beispiel der Parabel par durch T(9|12), dass der nebenstehend abgebildete Schnittpunkt V der Tangenten t_T und t_U der Spiegelpunkt von X an T ist. Dabei ist M der Mittelpunkt der Strecke T'N.

42) Am Beispiel des Punkts A(100|400) ist der in nebenstehender Abbildung illustrierte Sachverhalt zu verifizieren, dass die Normale n auf die Brennstrecke b=AF durch jenen Punkt P mit $x_P = \frac{x_A}{4}\cdot\left(\frac{x_A+3x_F}{x_A+x_F}\right)^2$ die entsprechende Parabel in erster Hauptlage u.a. in jenem Punkt B mit $x_B = \frac{x_A}{4}$ schneidet, der auf der gleichen Seite der Parabelachse liegt als der Punkt A.



43) **Satz.** Die Tangente t_P im Punkt $P(x_P|y_P)$ einer Parabel par in erster Hauptlage mit dem Parameter p schließt mit den Tangenten t_1 und t_2 an par in $T_1(x_1|y_1)$ und $T_2(x_2|y_2)$ mit $y_1 = \frac{p\cdot(p+y_P)}{p-y_P}$ und $y_2 = \frac{p\cdot(y_P-p)}{y_P+p}$ jeweils einen spitzen Winkel von 45° ein, wobei t_1 und t_2 aufeinander normal stehen.

Verifiziere diesen Satz anhand des konkreten Punkts P(225|300)!

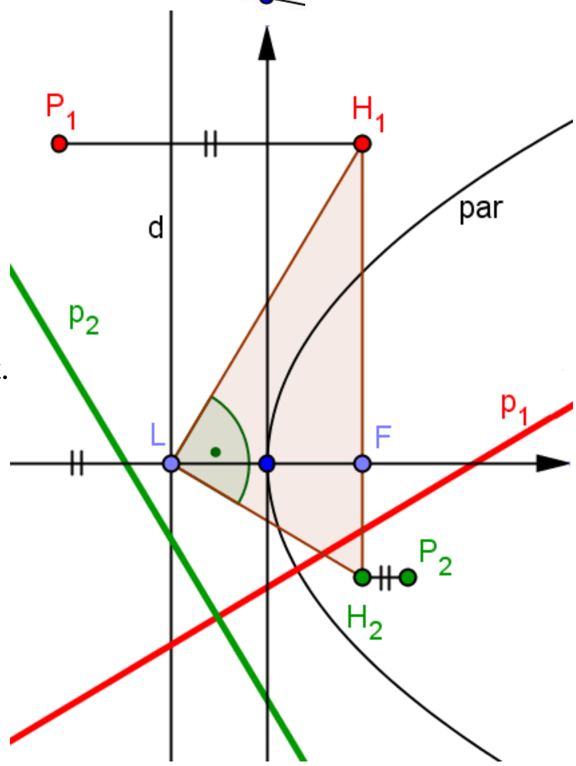


44) Fortsetzung der letzten Aufgabe: Verifiziere für den Flächeninhalt μ des Dreiecks ΔABC die Formel $\mu = \frac{1}{4}\cdot\frac{(p^2+y_P^2)^3}{(p^2-y_P^2)^2}$!

Für die Aufgaben 45) bis 54) wichtig ist die folgende

Definition: Setzt man die Koordinaten eines Punkts P in die Spaltform einer Parabel par ein, so erhält man die sogenannte Polare p von P bezüglich par. Umgekehrt wird P dann als der Pol von p bezüglich par bezeichnet.

45) Ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen den Polen zueinander normaler Polaren ist in nebenstehender Abbildung illustriert: Projiziert man zwei Pole P_1 und P_2 normal auf die Parallele zur Direktrix d von par durch ihren Focus F, so stehen die zugehörigen Polaren p_1 und p_2 genau dann aufeinander normal, wenn $\sphericalangle H_2LH_1=90°$ gilt (H soll an Hypotenuse erinnern!). Dabei ist L der Schnittpunkt von d mit der Parabelachse. Verifiziere dies für F(18|0), $P_1(-36|48)$ und $P_2(27|-27)$!

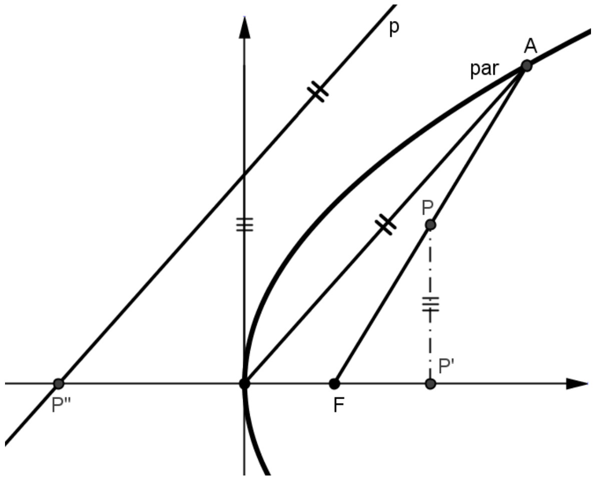


46) Eine Parabelsehne AB einer Parabel par in erster Hauptlage sei gegeben, P bezeichne deren Mittelpunkt. Verifiziere am Beispiel der durch die Punkte I(30|8) und II(63|52) erzeugten Sehne und der Parabel mit dem Brennpunkt F(24|0), dass die Polare p von $P(x_P|y_P)$ bezüglich par zur Parabelsehne parallel verläuft und die Spurpunkte $X_p(x_P|0)$ und $Y_p(0|y_P – ½·H(y_A,y_B))$ enthält, wobei $H(y_A,y_B)$ das harmonische Mittel von y_A und y_B bezeichnet.

47) Liegen zwei Pole bezüglich einer Parabel par und deren Scheitel kollinear, so schneiden einander die zugehörigen Polaren auf der Scheiteltangente von par. Verifiziere dies anhand eines selbst gewählten Beispiels!

48) Liegen zwei Pole bezüglich einer Parabel par auf einer Normalen zur Parabelachse, so schneiden einander die zugehörigen Polaren auf der Parabelachse. Verifiziere dies anhand eines selbst gewählten Beispiels!

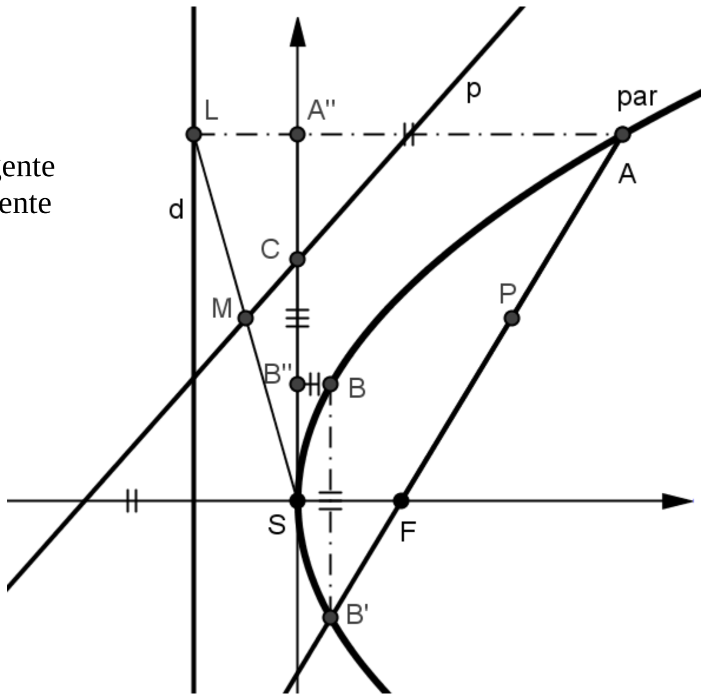
49) Zeige für einen selbst gewählten Punkt die Richtigkeit des nebenstehend illustrierten Satzes: Ist A ein Punkt einer Parabel par mit dem Brennpunkt F und dem Scheitel S, P der Mittelpunkt der Brennstrecke AF, P´ die Normalprojektion von P auf die Parabelachse sowie P´´ der Spiegelpunkt von P´ an S, dann ist die Parallele p zur Sehne SA durch P´´ die Polare von P bezüglich par.

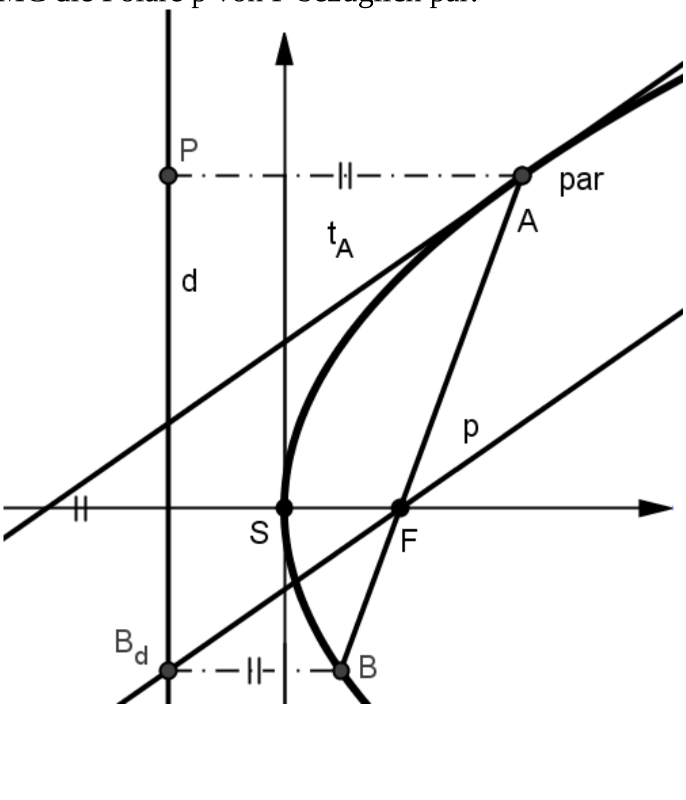


50) Verifiziere anhand des konkreten Punkts A(256|128) die folgende Polarenkonstruktion des Mittelpunkts P der zugehörigen Brennstrecke AF (siehe Abbildung!):

- ✓ Normalprojektion L von A auf die Direktrix d
- ✓ Mittelpunkt M der Strecke SL
- ✓ Schnittpunkt B´ des Brennstrahls AF mit par
- ✓ Spiegelpunkt B von B´ an der Parabelachse
- ✓ Normalprojektion A´´ von A auf die Scheiteltangente
- ✓ Normalprojektion B´´ von B auf die Scheiteltangente
- ✓ Mittelpunkt C der Strecke A´´B´´

Dann ist die Trägergerade der Strecke MC die Polare p von P bezüglich par.



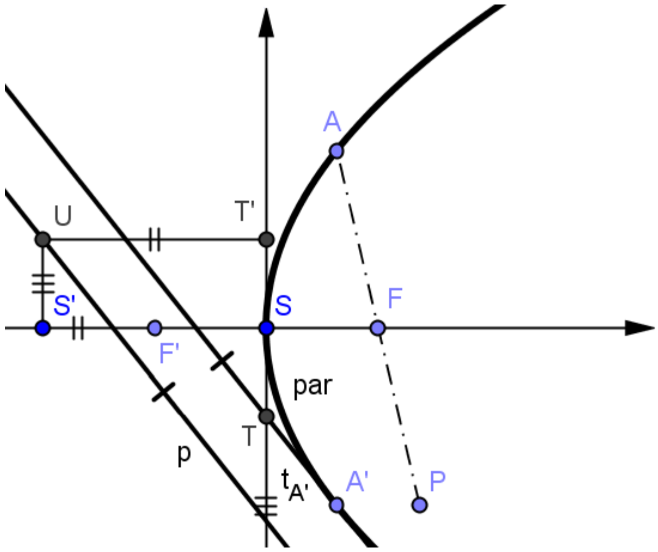


51) Verifiziere anhand der linken Abbildung die folgende Polarenkonstruktion der Normalprojektion P eines Parabelpunkts A auf die Direktrix d, und zwar für A(1296|432)!

- ➢ Schnittpunkt B des Brennstrahls AF mit par
- ➢ Normalprojektion B_d von B auf die Direktrix d

Dann ist die Parallele p zur Tangente t_A durch B_d die Polare von P bezüglich par.

52) Liegt die Trägergerade zweier Pole bzgl. einer Parabel parallel zu deren Achse, so verlaufen die zugehörigen Polaren zueinander parallel. Zwischen dem Abstand ℓ der beiden Pole P_1 und P_2 und dem Parallelabstand d der beiden Polaren p_1 und p_2 besteht dann der Zusammenhang $d = \ell \cdot \cos\varphi$, wobei φ den Steigungswinkel von p_1 und p_2 gegenüber der Parabelachse bezeichnet. Verifiziere dies an einem selbst gewählten Beispiel!



53) Verifiziere anhand der linken Abbildung die folgende Polarenkonstruktion des Spiegelpunkts P eines Parabelpunkts A am Brennpunkt F für einen selbst gewählten Punkt A:

- Spiegelpunkt A´ von A an der Parabelachse
- Schnittpunkt T der Tangente $t_{A'}$ mit der Scheitelpunkttangente
- Spiegelpunkt T´ von T am Parabelscheitel S
- Spiegelpunkt F´ von F am Parabelscheitel S
- Spiegelpunkt S´ von S an F´
- Vierter Eckpunkt U des Rechtecks F´ST´U

Dann ist die Parallele p zu $t_{A'}$ durch U die Polare p von P bezüglich par.

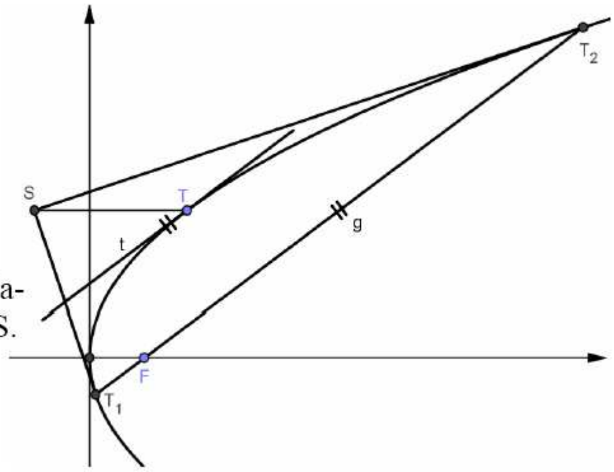
54) Projiziert man zwei Pole P_1 und P_2 bezüglich einer Parabel par auf eine Normale zur Parabelachse durch den Spiegelpunkt ihres Scheitels S an ihrem Brennpunkt (wodurch die Punkte Q_1 und Q_2 entstehen), so schließen die Geraden durch S und Q_1 sowie S und Q_2 die gleichen Winkel ein als die zugehörigen Polaren p_1 und p_2. Verifiziere dies anhand eines selbst gewählten Beispiels!

55) Parabelbeispiel aus einer Wiederholungsprüfung (ab Okt. 2012 nach Ablegung jener Wiederholungsprüfung hier zu finden!):

Klassen: 7A(G) / 7B(Rg) **3. 9. 2012**

Schriftliche Wiederholungsprüfung aus Mathematik (zweistündig)

2) Rechts ist eine Parabel in erster Hauptlage samt einem ihrer Punkte T abgebildet, in dem die Tangente t an die Parabel gelegt wurde. Ferner ist g die Parallele zu t durch den Parabelbrennpunkt F, welche die Parabel in den Punkten T_1 und T_2 schneidet. Die Tangenten an die Parabel in T_1 und T_2 schneiden einander in S. Verifiziere am konkreten Beispiel des Punkts A(16|24) die Gültigkeit der folgenden Satzgruppe:

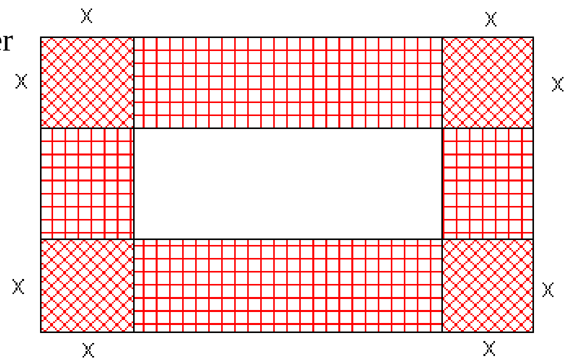


Satz 1. g_{ST} verläuft parallel zur Parabelachse.

Satz 2. $\overline{T_1T_2} = 4 \cdot \overline{ST}$

§3) *AK "Differentialrechnung:* ***O P T I M I E R U N G"***

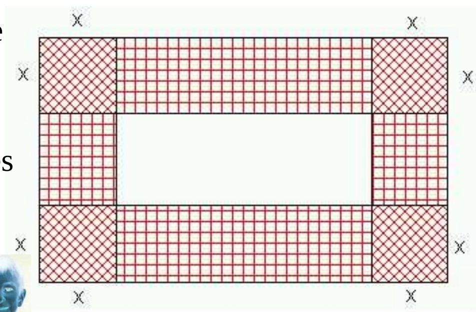
56) "S C H A C H T E L P R O B L E M":
Aus dem rechts unten abgebildeten rechteckigen 48cm langen und 13cm breiten Karton (Achtung: Skizze nicht maßstabsgetreu!) sind von den Ecken Quadrate derart wegzuschneiden, dass durch Aufbiegen der karierten Rechtecke das Netz einer oben offenen Schachtel von maximalem Volumen entsteht.



a) Wie groß ist die Einschnitt-Tiefe x daher zu wählen (Nachweis des Maximums!) und welches maximale Volumen ergibt sich daraus?

b) Zeige, dass der Mantelflächen- und der Grundflächeninhalt der volumsgrößten Schachtel gleich groß sind!

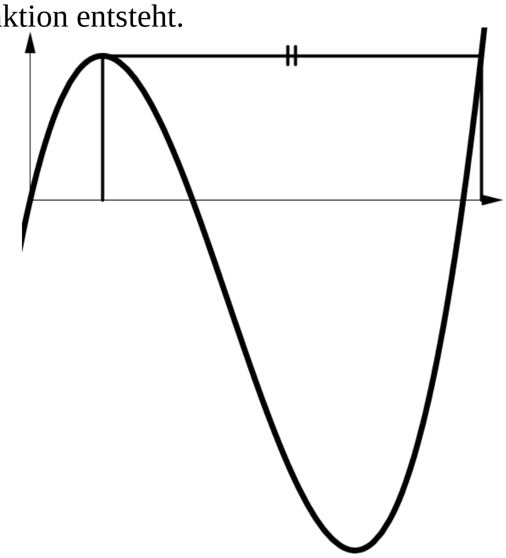
57) Bezüglich des Schachtelproblems [vgl. Aufg. 40)!] fand Wüüüllliiie (Biiitttermanns Sprechweise) folgendes heraus: Wenn b=ka (wobei a bzw. b die Länge bzw. Breite des ursprünglichen Rechtecks bezeichnet), dann gilt $x = \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{k} - \sqrt{1 - \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k}\right)^2}\right) \cdot b$. Verifiziere dies für a=45 und b=24!



58) Zum Schachtelproblem [vgl. Aufg. 56)!] hat Kitty die Formel $x = \frac{\sqrt{(a+b)^3} - \sqrt{a^3 + b^3}}{6\sqrt{a+b}}$ entwickelt, die es nun zu prüfen gilt, und zwar am konkreten Beispiel a=80 und b=17!

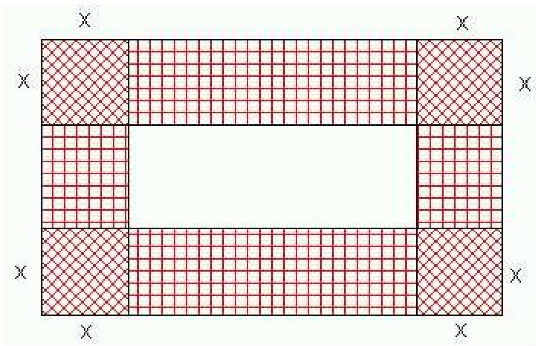
59) Zum Schachtelproblem [vgl. Aufg. 56)!]:
Um aus den weggeschnittenen Quadraten einen Deckel zu bauen, fehlen $12 \cdot x \cdot \sqrt{\wp}$ Flächeneinheiten, wobei x die Einschnitt-Tiefe und $\wp$ die Diskriminante jener NORMIERTEN quadratischen Gleichung bezeichnet, welche beim Nullsetzen der ersten Ableitung der entsprechenden Zielfunktion entsteht. Bestätige dies für a=621 und b=96!

60) Zum Schachtelproblem [vgl. Aufg. 56)!]:
Für die Volumsfunktion V und die Minimumstelle $x = \frac{a+b-\sqrt{D}}{6}$ gilt $V(x) = V(\frac{a+b+2\sqrt{D}}{6})$.
Verifikation für (a|b)=(48|18)!

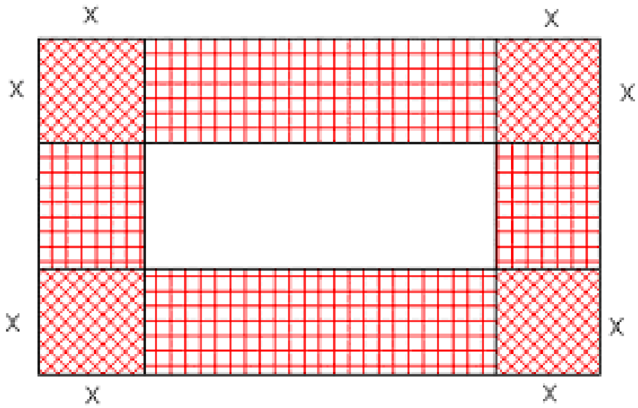


Absichtlich doppelt nummeriert, weil ja nur für jeweils eine Klasse NEU!
↑↑
Die folgenden Aufgaben 61), 62) und 63) werden am Beginn des Schuljahres 2012/13 freigeschaltet:

61) Aus einer Wiederholungsprüfung:
Bei Schachtelproblemen wie dem bekannten – vgl. Aufgabe 56)! – (siehe Abbildung) gilt de facto der folgende Satz:
Satz. Die Einschnitt-Tiefe ist immer größer als 1/6 der Rechtecksbreite.
Überprüfe dies für ein 96cm langes und 85cm breites Rechteck!



62) Aus einer Schularbeit einer 7. Klasse (von 7A für 8B):
Einem 104cm langen und 65cm breiten Rechteck sollen von den Ecken Quadrate der Seitenlänge x derart weggeschnitten werden, sodass das Netz einer oben offenen quaderförmigen Schachtel mit maximalem Volumen entsteht.



a) Wie groß ist die Einschnitt-Tiefe x zu wählen? Weise das Vorliegen einer Maximumstelle sowie deren Eindeutigkeit nach!

b) Verifiziere am konkreten Beispiel, dass für den Grundflächeninhalt G der volumsgrößten Schachtel ausgehend von der Länge a und der Breite b des ursprünglichen Rechtecks die schöne Formel $\boxed{G = \frac{2ab}{3} - \frac{\sqrt{a+b}}{9} \cdot \left(\sqrt{(a+b)^3} - \sqrt{a^3+b^3} \right)}$ gilt!

62) Aus einer Schularbeit einer 7. Klasse (von 7B für 8A):
Einem 8 cm langen und 5 cm breiten Rechteck sollen von den Ecken Quadrate der Seitenlänge x derart weggeschnitten werden, sodass das Netz einer oben offenen quaderförmigen Schachtel mit maximalem Volumen entsteht (siehe mittlere Abbildung!). **12P.**
hier: Abbildung zu den Aufgaben 60) und 61)!

(a) Wie groß ist die Einschnitt-Tiefe x zu wählen? Weise das Vorliegen einer Maximumstelle sowie deren Eindeutigkeit nach! **9P.**

(b) Verifiziere am konkreten Beispiel, dass für dieses maximale Volumen V_{max} dann ausgehend von der Länge a und der Breite b des ursprünglichen Rechtecks die schöne Formel $V_{\text{max}} = \frac{2x}{3} \cdot [ab - (a+b)x]$ gilt. **3P.**

63) Aus einer Nachtrags-Schularbeit einer 7. Klasse:
Einem 240 cm langen und 51 cm breiten Rechteck sollen von den Ecken Quadrate der Seitenlänge x derart weggeschnitten werden, sodass das Netz einer oben offenen quaderförmigen Schachtel mit maximalem Volumen entsteht (siehe mittlere *linke* Abbildung!). **15P.**
hier: Abbildung zu den Aufgaben 60) und 61)!

(a) Wie groß ist die Einschnitt-Tiefe x zu wählen? Weise das Vorliegen einer Maximumstelle nach und begründe, warum nur eine der beiden Lösungen x_1 und x_2 brauchbar ist. **9P.**

(b) Verifiziere am konkreten Beispiel, dass für das via $Q(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$ definierte *quadratische Mittel* von x_1 und x_2 die Gleichung $Q(x_1, x_2) = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\mathcal{F}}$ gilt, wobei $\mathcal{F}$ gleich der Summe der Inhalte der gefärbten Flächen ist (siehe mittlere *rechte* Abbildung!). **6P.**

§4) AK "S T O C H A S T I K: *Dichtefunktionen stetiger Zufallsvariabler*"

64) Das Alter von Heustadelhunden (HH, siehe rechte Abb.) ist als in Dekaden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum Ω=[0;2] nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=\frac{1}{128}\cdot\left(45x^7-182x^6+189x^5\right)$ verteilt.

a) Zeige, dass tatsächlich eine Dichtefunktion vorliegt!
b) Ermittle die durchschnittliche Lebenserwartung μ eines HHs!
c) Ermittle die Standardabweichung σ von X!
d) Bei wie vielen von 36 HHen weicht das Lebensalter um maximal σ von μ ab?

65) Wie langjährige Untersuchungen ergaben, ist die Arbeitsdauer bei der ersten einstündigen Mathematik-Schularbeit in ersten Klassen als in Stunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum Ω=[0;1] nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=\frac{4}{15}\cdot\left(63x^{13}-99x^8+41x^3\right)$ verteilt.

a) Zeige, dass tatsächlich eine Dichtefunktion vorliegt!
b) Berechne die durchschnittliche Arbeitszeit μ in Minuten!
c) Ermittle die Standardabweichung σ von X (auch in Minuten)!
d) Bei wie vielen von 444 Erstklässlern weicht die Arbeitsdauer um maximal σ von μ ab?

Aufgaben 66) bis 76):

Zeige jeweils, dass es sich um eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum Ω=[0;1] handelt, berechne den Erwartungswert μ sowie die Standardabweichung σ von X und ermittle ferner die Intervallwahrscheinlichkeit P(|X–μ|<|σ)!

A N G A B E ↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓	L Ö S U N G ↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓ E(X)=μ	V(X)=σ^2	P(|X–|μ<σ)
66) $\varphi(x)=\frac{5}{54}\cdot\left(286x^{10}-312x^7+119x^4\right)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\approx\frac{144}{175}$
67) $\varphi(x)=\frac{1}{40}\cdot\left(143x^{10}-308x^6+213x^2\right)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\approx\frac{56}{87}$
68) $\varphi(x)=\frac{8}{15}\cdot\left(220x^9-495x^8+279x^7\right)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\approx\frac{121}{182}$
69) $\varphi(x)=\frac{3}{200}\cdot\left(-605x^9+532x^5+77x\right)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\approx\frac{34}{49}$
70) $\varphi(x)=\frac{1}{135}\cdot\left(-140x^{13}+1068x^7+23x\right)$	$\frac{13}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\approx\frac{301}{345}$
71) $\varphi(x)=\frac{13}{60}\cdot\left(385x^{12}-1092x^{11}+726x^{10}\right)$	$\frac{13}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\approx\frac{9}{13}$
72) $\varphi(x)=\frac{3}{80}\cdot\left(1183x^{12}-1716x^{10}+825x^8\right)$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\approx\frac{169}{198}$
73) $\varphi(x)=\frac{1}{36}\cdot\left(455x^{12}-110x^9+84x^6\right)$	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\approx\frac{148}{171}$

74) $\varphi(x) = \frac{1}{96} \cdot \left(6097x^{12} - 7326x^{8} + 2205x^{4}\right)$	$\frac{11}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\approx \frac{69}{133}$
75) $\varphi(x) = \frac{1}{980} \cdot \left(-2040x^{14} + 3240x^{7} + 711\right)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\approx \frac{38}{65}$
76) $\varphi(x) = \frac{1}{36} \cdot \left(455x^{12} - 168x^{6} + 25\right)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\approx \frac{10}{13}$

Wien, im Oktober 2012. Dr. R. Resel, eh.