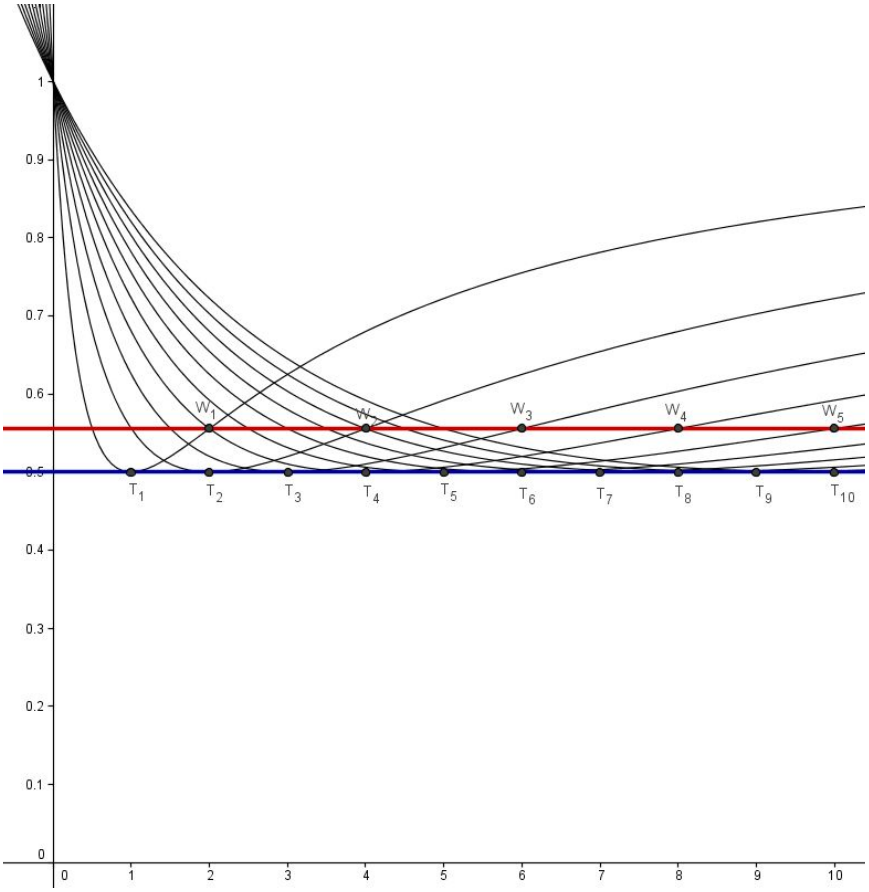
22 Übungen zu KURVENSCHAREN



1. In nebenstehender Figur sind zehn Repräsentanten der durch die Scharglei-chung $y = f_t(x) = \frac{x^2+t^2}{(x+t)^2}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet.

   (a) Zeige, dass alle Tiefpunkte T_t auf einer **Parallelen** zur $x-$Achse zu liegen kommen.

   (b) Zeige, dass auch alle Wendepunkte W_t auf einer **Parallelen** zur $x-$Achse liegen!

   (c) Jeder Graph schneidet die **Gerade durch die Wendepunkte** in einem weiteren Punkt S_t (siehe Abbildung!). Zeige, dass dann $x_{S_t} \cdot x_{W_t} = x_{T_t}^2$ gilt!

2. Zeige, dass für $0 < a < b$ die rationale Funktion $f_{a,b}$ mit der Funktionsgleichung $f_{a,b}(x) = \frac{x^3}{(x-a)^2(x-b)}$ stets genau eine Extremstelle z im Intervall $(a; b)$ besitzt. Zeige genauer, dass $z = \frac{3}{4} \cdot H(2a, b)$ gilt, wobei H das harmonische Mittel bezeichnet.

3. Zeige, dass die Tiefpunkte der Kurvenschar mit der Gleichung $y = \frac{27x^5}{(x-2t)^3}$ auf der Parabel mit der Gleichung $y = 125x^2$ liegen.

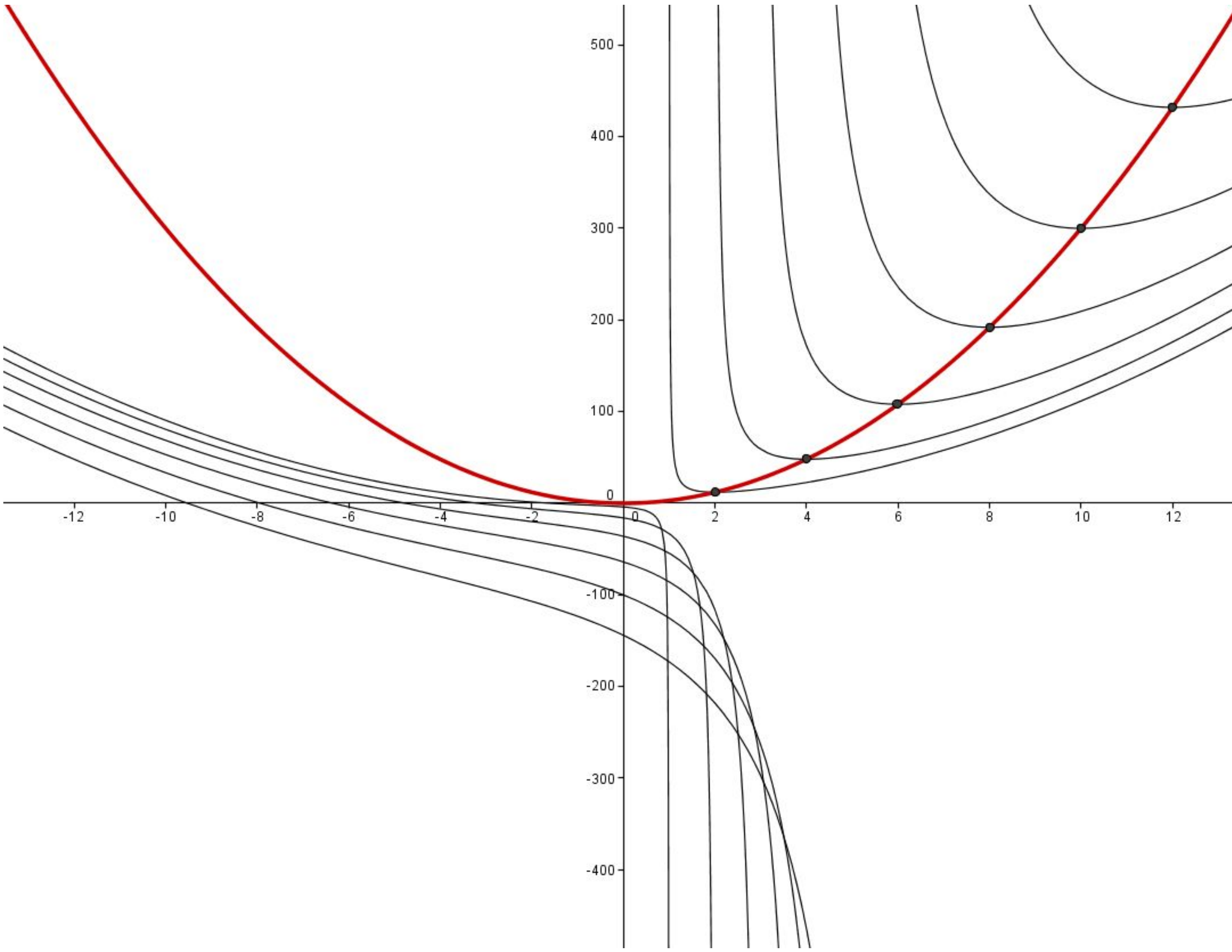
4. (a) Zeige, dass jeder Vertreter der Kurvenschar mit der Schargleichung $y = x^3 - 6tx^2 - 96t^2x - 224t^3$ die $x-$Achse berührt. Welche multiplikative Zerlegung der rechten Seite der Schargleichung ergibt sich daraus?

   (b) Verwende (a), um zu zeigen, dass die Tiefpunkte der Kurvenschar mit der Gleichung $y = \frac{54x^5}{x^3-6tx^2-96t^2x-224t^3}$ auf den Parabeln mit den Gleichungen $y = 98x^2$ und $y = 125x^2$ liegen.

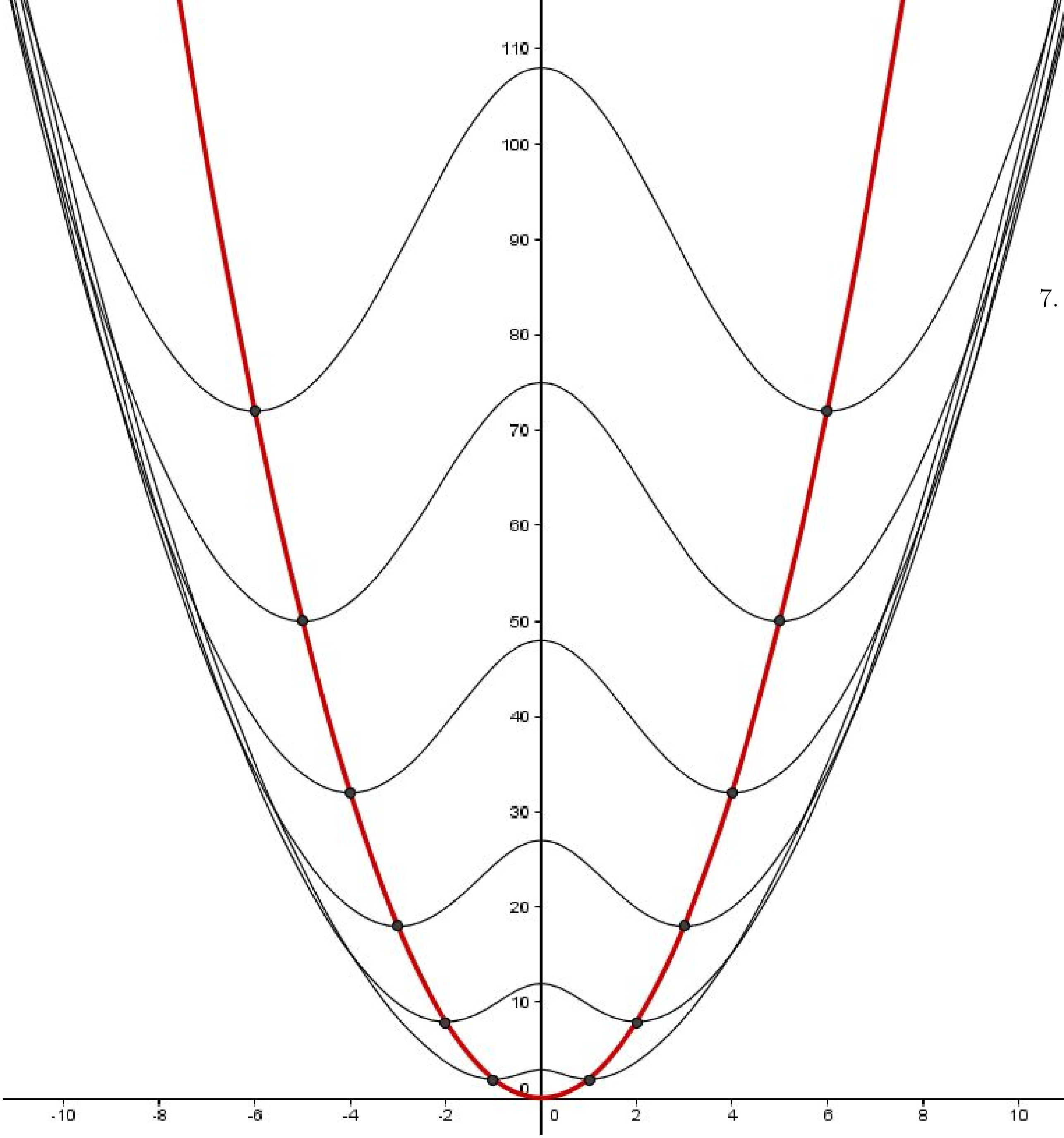
5. $W(1|\frac{7}{3})$ ist ein Wendepunkt des Graphen Γ_f der Funktion f mit der (– noch! – unvollständigen) Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{x^4 + a}{x^3 + b}.$$

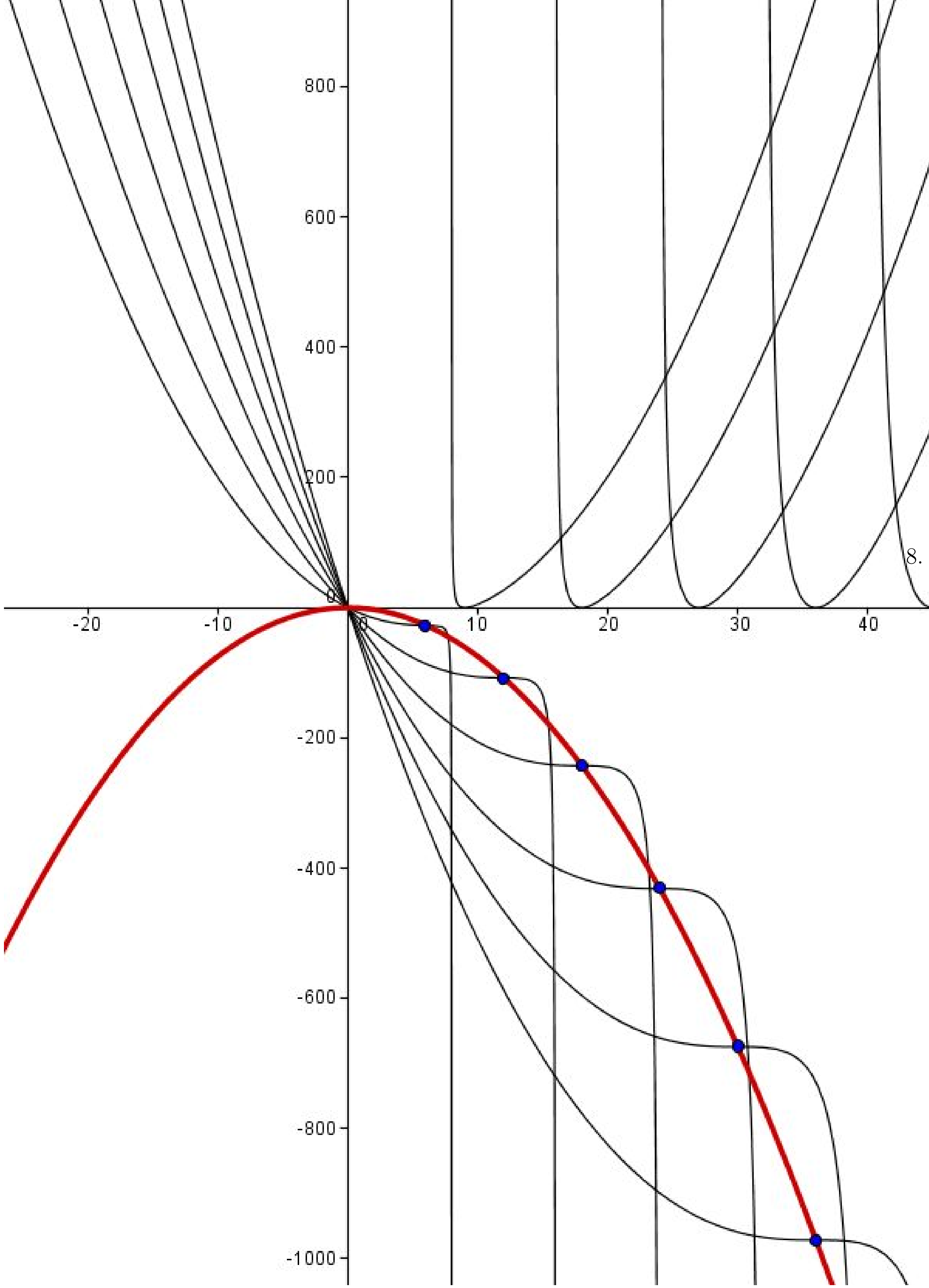
   Ermittle die Parameter a und b. (Zeige, dass $a = 20$ und $b = 8$ gilt.)



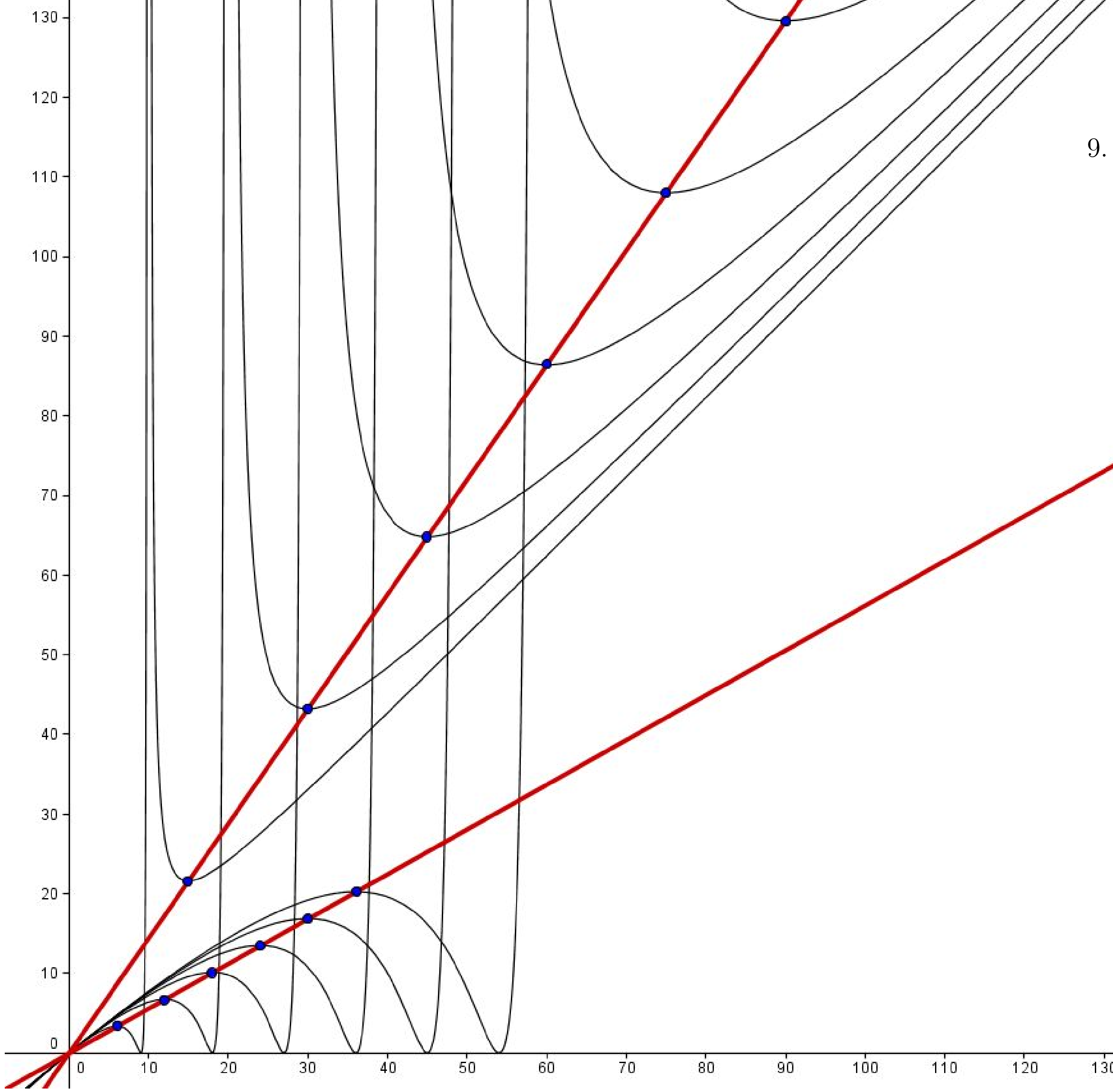
6. In nebenstehender Figur sind sechs Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{x^3+4t^3}{x-t}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet. Zeige, dass alle Tiefpunkte T_t auf der Parabel mit der Gleichung $y = 3x^2$ zu liegen kommen.



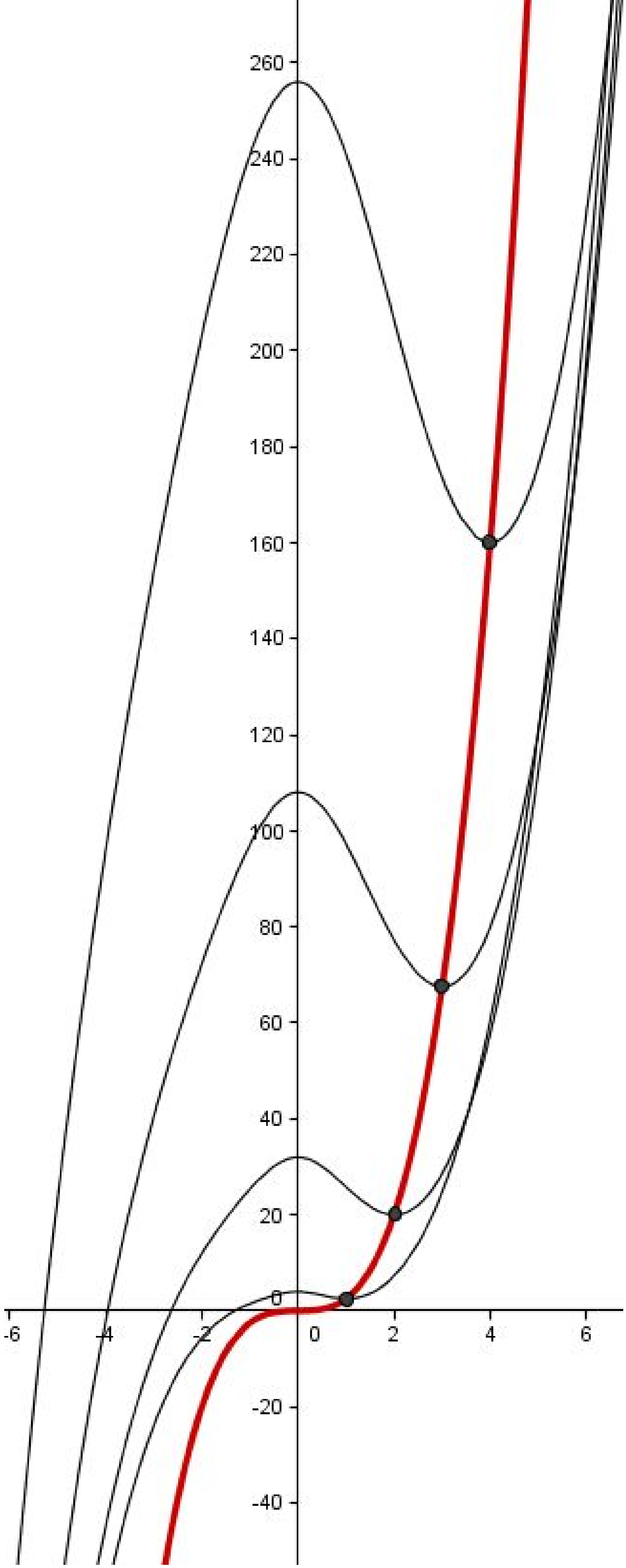
7. In nebenstehender Figur sind sechs Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{x^4+3t^4}{x^2+t^2}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet. Zeige, dass alle Tiefpunkte T_t auf der Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ zu liegen kommen.



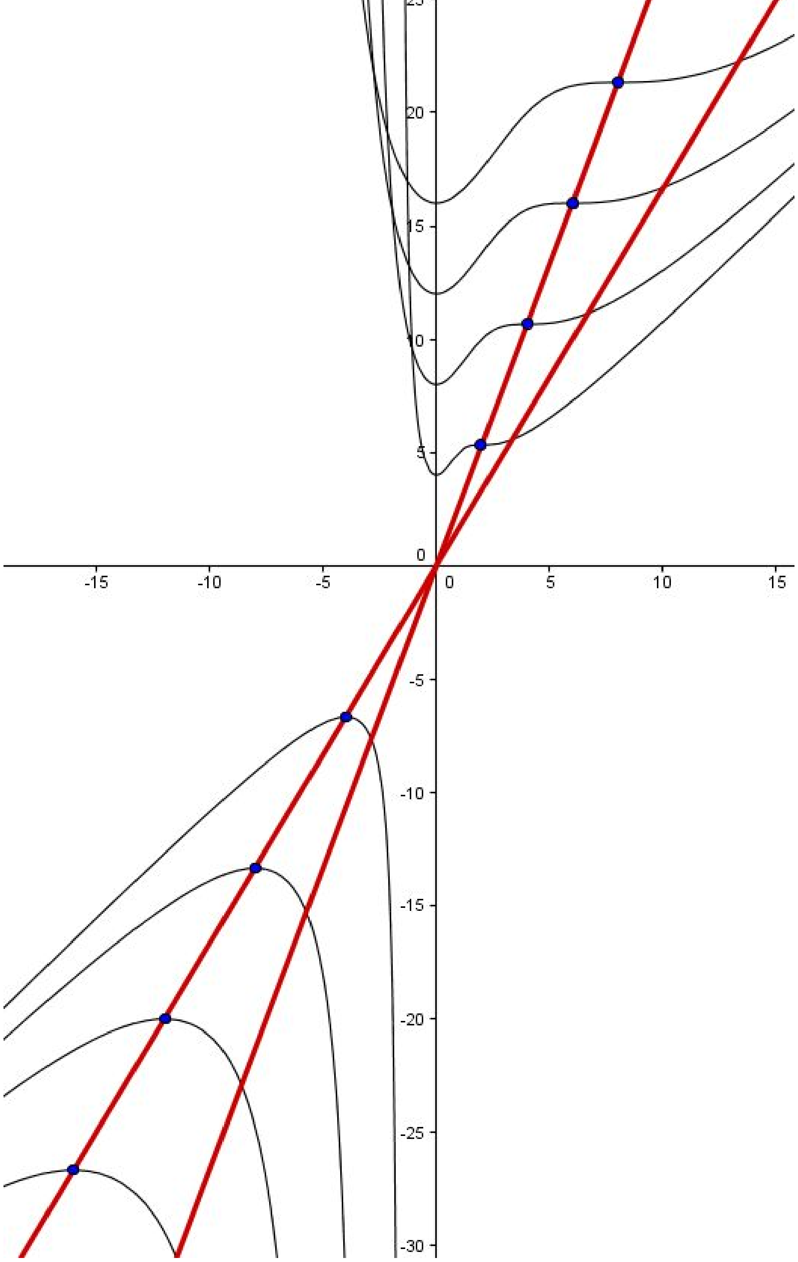
8. In nebenstehender Figur sind sechs Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{x^3-18tx^2+81t^2x}{x-8t}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet. Zeige, dass alle Sattelpunkte auf der Parabel mit der Gleichung $y = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot x^2$ zu liegen kommen.



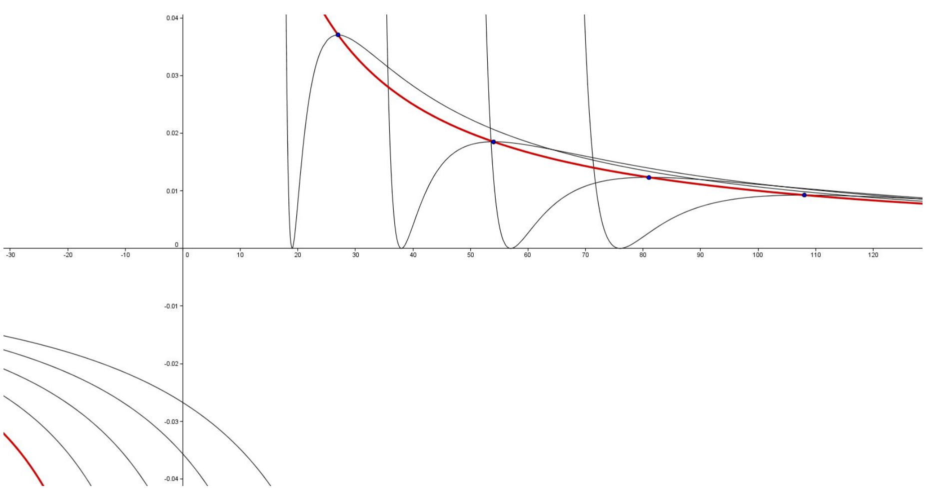
9. In nebenstehender Figur sind sechs Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{x^3-18tx^2+81t^2x}{x^2-20tx+100t^2}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet. Zeige, dass die Extrempunkte auf den Geraden mit den Gleichungen $y = \frac{36}{25} \cdot x$ und $y = \frac{9}{16} \cdot x$ zu liegen kommen.



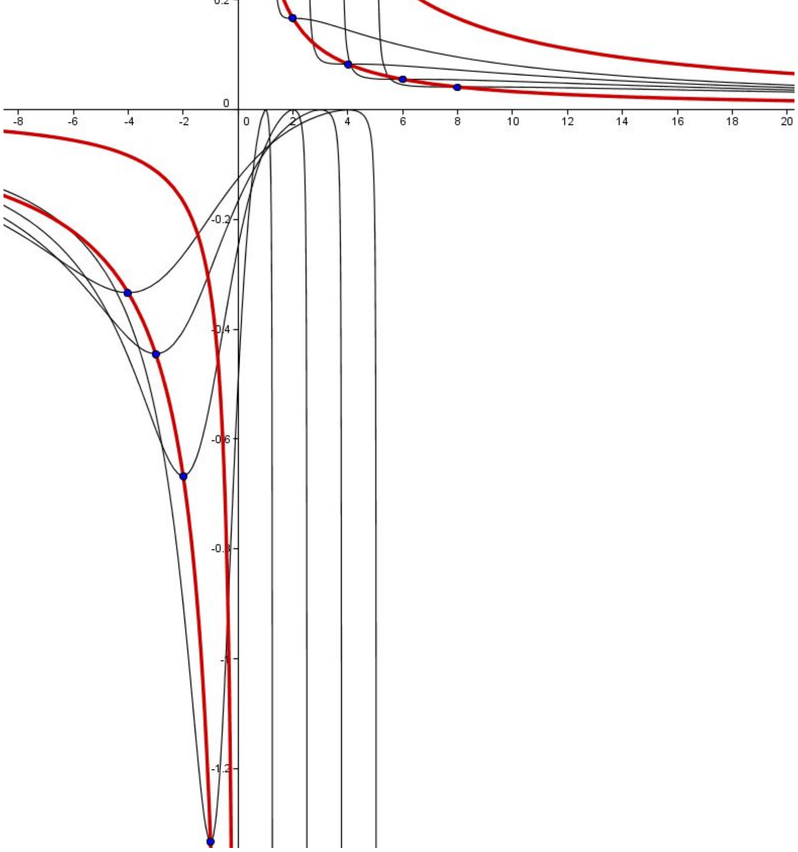
10. In nebenstehender Figur sind vier Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{x^5+4t^5}{x^2+t^2}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet. Zeige, dass die Extrempunkte auf der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{5}{2} \cdot x^3$ zu liegen kommen. Verwende dazu das Resultat der Multiplikation $(3x^4 + 3tx^3 + 8t^2x^2 + 8t^3x + 8t^4)(x - t)$ und weise auch nach, dass es keine weiteren Extrempunkte gibt!



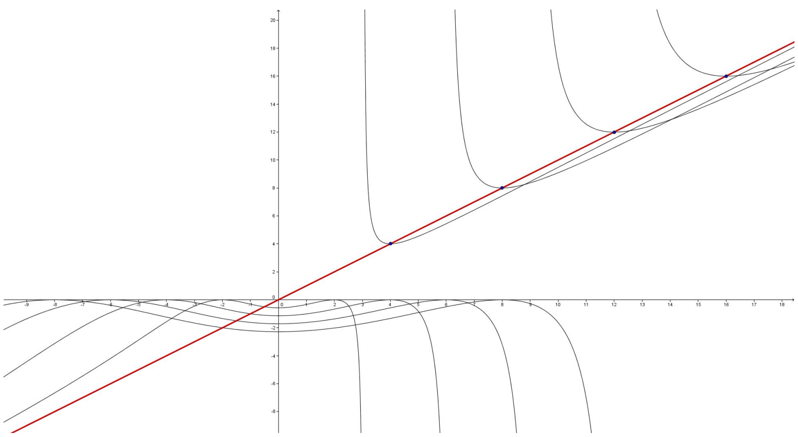
11. In nebenstehender Figur sind vier Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{(x^2+4t^2)^2}{x^3+4t^3}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet. Zeige, dass die Extrem- bzw. Sattelpunkte auf der Gerade mit der Gleichung $y = \frac{5}{3} \cdot x$ bzw. $y = \frac{8}{3} \cdot x$ zu liegen kommen. Verwende dazu das Resultat der Multiplikation $(x^2 - 4tx + 4t^2)(x + 4t)$!



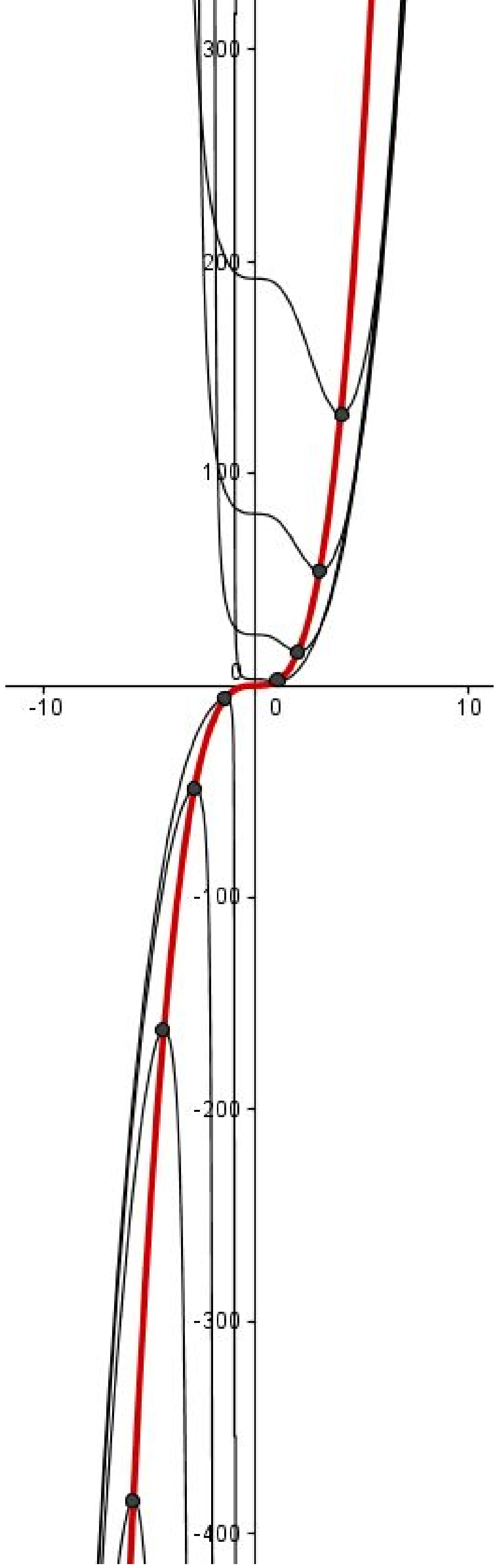
12. In nebenstehender Figur sind vier Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{(x-19t)^2}{(x-15t)^3}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet. Zeige, dass die Extrempunkte auf der $x-$Achse bzw. der Einheitshyperbel mit der Gleichung $xy = 1$ zu liegen kommen!



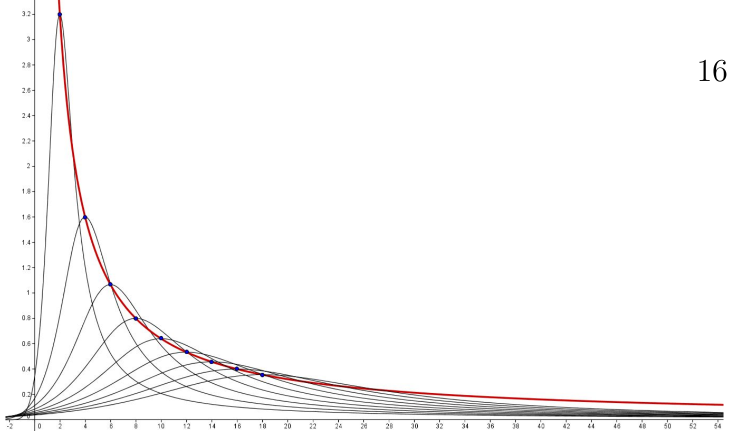
13. In nebenstehender Figur sind vier Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{(x-t)^2}{x^3-2t^3}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet. Zeige, dass die Extrem- bzw. Sattelpunkte auf der Hyperbel mit der Gleichung $3xy = 4$ bzw. $3xy = 1$ zu liegen kommen!



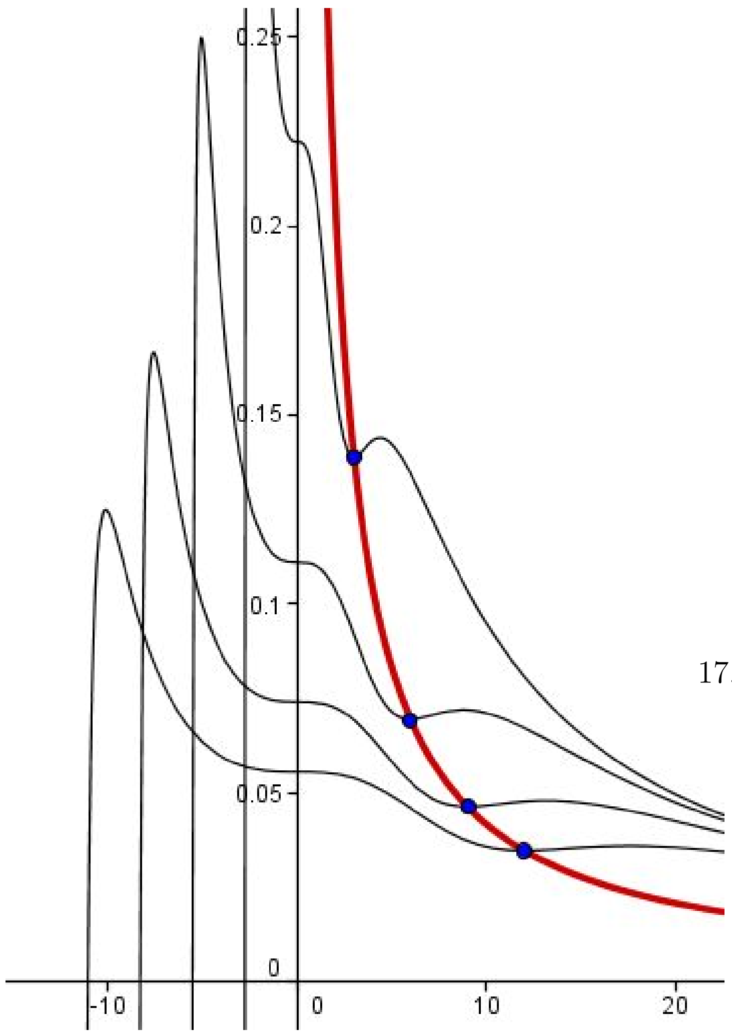
14. In nebenstehender Figur sind vier Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{(x^2-4t^2)^2}{x^3-28t^3}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet. Zeige, dass die Extrempunkte auf den Koordinatenachsen sowie auf der ersten Mediane zu liegen kommen!



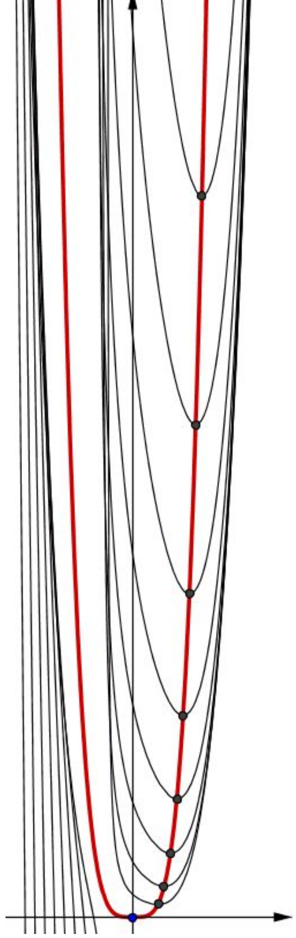
15. In nebenstehender Figur sind vier Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{x^6+3t^6}{x^3+t^3}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet. Zeige, dass die Extrempunkte auf der Kurve mit der Gleichung $y = 2x^3$ zu liegen kommen. Verwende dazu das Resultat der Multiplikation $(x-t)(x^2+tx+t^2)(x^3+3t^3)$ und weise auch nach, dass es keine weiteren Extrempunkte gibt!



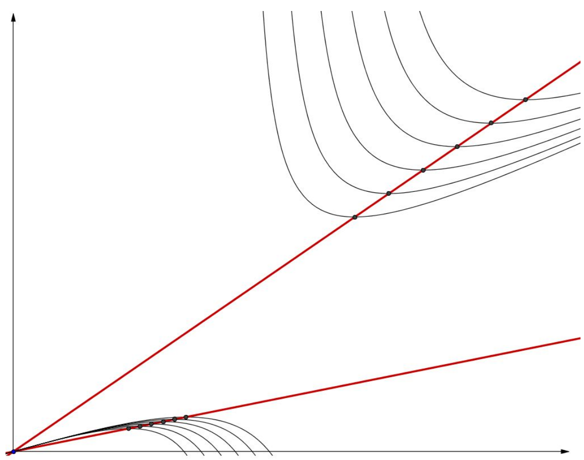
16. In nebenstehender Figur sind neun Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{(x+2t)^4}{x^5+48t^5}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet.
Zeige, dass die Extrempunkte mit ganzzahligen Vielfachen von t als $x-$Koordinaten auf der Kurve mit der Gleichung $5xy = 32$ zu liegen kommen.
Verwende dazu das Resultat der Multiplikation $(x-2t)(x^4+12tx^3+24t^2x^2+48t^3x+96t^4)$ und weise auch nach, dass es keine weiteren Extremstellen mit ganzzahligen Vielfachen des Parameters t gibt!



17. In nebenstehender Figur sind vier Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{x^5+162t^5}{(x^3+27t^3)^2}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet.
Zeige, dass die Extrempunkte mit ganzzahligen Vielfachen von t als $x-$Koordinaten auf der Kurve mit der Gleichung $12xy = 5$ zu liegen kommen.
Verwende dazu das Resultat der Multiplikation $(x-3t)(x^4+3tx^3+9t^2x^2-108t^3x-324t^4)$ und weise auch nach, dass es keine weiteren Extremstellen mit ganzzahligen Vielfachen des Parameters t gibt!



18. In nebenstehender Figur sind vier Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{x^5+9t^5}{x+t}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet.
Zeige, dass die Extrempunkte auf der Kurve mit der Gleichung $y = 5x^4$ zu liegen kommen.
Verwende dazu das Resultat der Multiplikation
$(x-t)(4x^4+9tx^3+9t^2x^2+9t^3x+9t^4)$ und weise auch nach, dass es keine weiteren Extremstellen gibt!



19. In nebenstehender Figur sind sechs Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{x^3-121t^2x}{x^2-220t^2}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet.
Zeige, dass die Extrempunkte auf den Geraden mit der Gleichung $y = \frac{11}{8} \cdot x$ bzw. $y = \frac{2}{5} \cdot x$ zu liegen kommen.

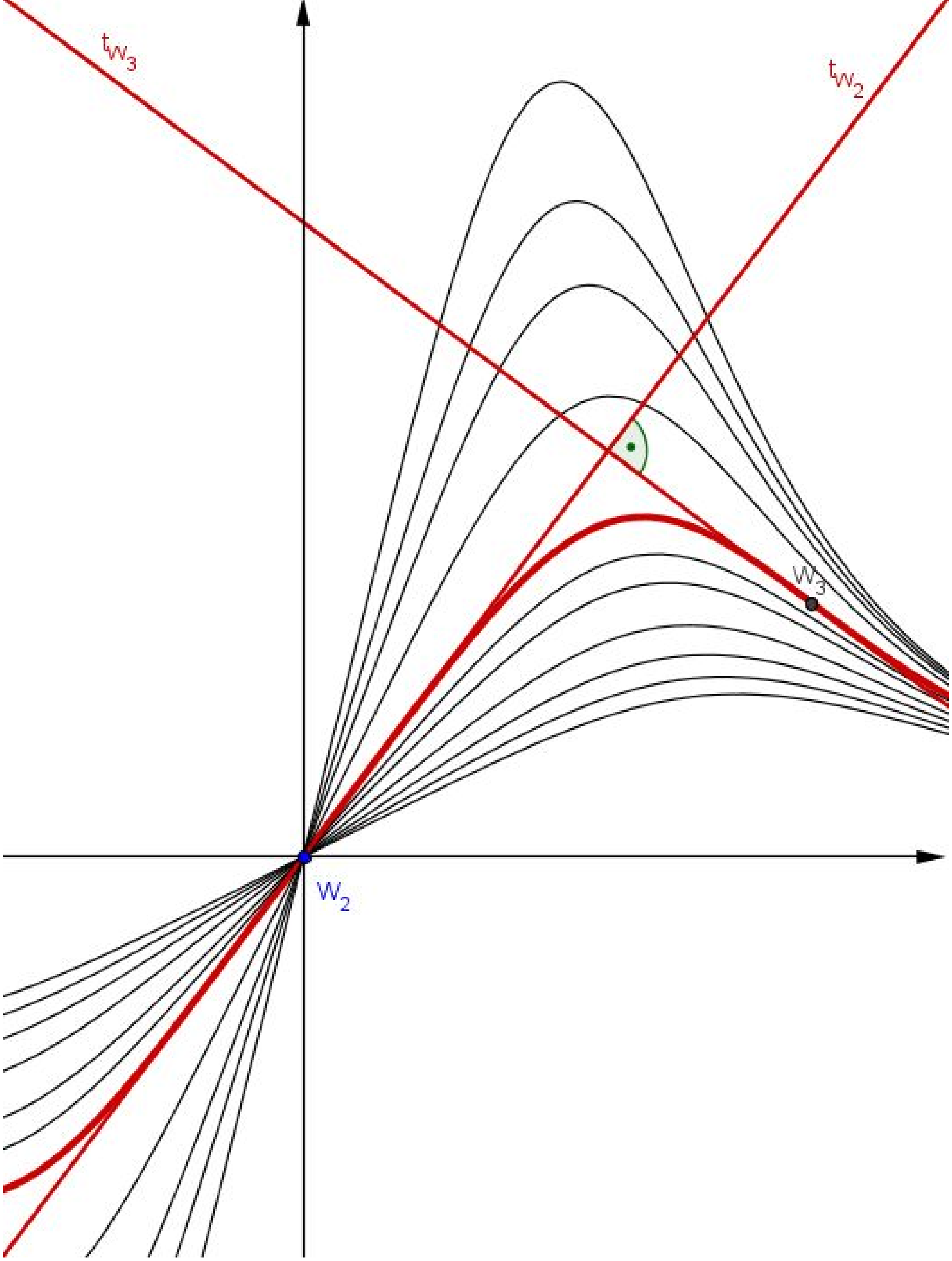
20. Durch die Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{(x-a^2)(x-b^2)}{x^2+a^2b^2}$ ist $\forall a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ eine rationale Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ festgelegt.

   (a) Beweise, dass sich die gemeinsame Steigung der "äußeren" Wendetangenten von Γ_f zur Steigung der "inneren" ("mittleren") Wendetangente unabhängig von der Wahl von a und b wie $1:8$ verhält.

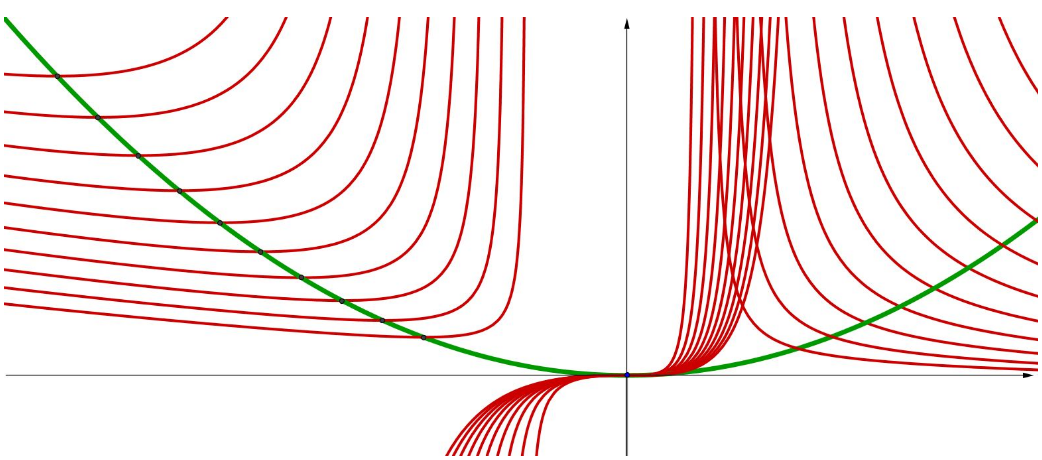
   (b) Untersuche das Symmetrieverhalten von Γ_f und zeige in diesem Zusammenhang insbesondere die Gültigkeit der Funktionalgleichung $f(x) + f(-x) = 2$ und interpretiere selbige!

   (c) Führe in Abhängigkeit der Formvariablen a und b eine vollständige Kurvendiskussion von f (z.T. ja schon erledigt!) durch.

   (d) Ermitlle die konkreten Werte für a und b, wenn man von Γ_f den Extrempunkt $E(16|-\frac{25}{8})$ kennt.



21. In nebenstehender Figur sind elf Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{x}{x^4+t^2}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet. Ermittle jene/n Wert/e des Parameters t, für welche/n die äußeren Wendetangenten normal auf die innere Wendetangenten stehen!



22. In nebenstehender Figur sind zehn Repräsentanten der durch die Schargleichung $y = f_t(x) = \frac{x^3(x-30t)^2}{(x-3t)^2(x+4t)}$ festgelegten Kurvenschar abgebildet.
Zeige, dass die Tiefpunkte dieser Kurvenschar auf der Parabel par mit der Gleichung par: $y = 23,0286227...x^2$ liegen!

Wien, im Dezember 2012. Dr. R. Resel, eh.