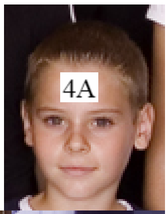
6) Wie Deutsch- und Englischlehrer nach jahrelanger empirischer Forschung herausgefunden haben, läßt sich die Arbeitsdauer bei einstündigen Schularbeiten (50 Minuten der Unterrichtsstunde plus zehn Minuten der darauffolgenden Pause) als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0;1]$ durch Dichtefunktionen φ mit Funktionsgleichungen der Bauart $\varphi(x) = \frac{2\cdot(t+1)}{t-1}\cdot\left(x - x^t\right)$ beschreiben, wobei t>1 einen klassenabhängigen Parameter bezeichnet.

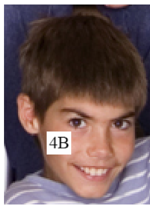
a) Zeige, dass sich φ tatsächlich für jedes t>1 als Dichtefunktion einer stetigen ZV mit $\Omega = [0;1]$ eignet!

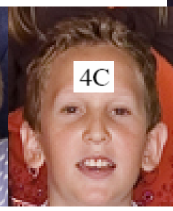
b) Die durchschnittliche Arbeitszeit bei Deutsch-Schularbeiten der 1A bis 3A von 2005 bis 2008 betrug bislang 32 Minuten. Berechne den sich daraus ergebenden Klassenparameter t!



c) Nach welcher Zeitspanne sollten in der 4A (2008/09) 50% der Schüler abgegeben haben, wenn mit dem in b) ermittelten Parameter und dem obigen stochastischen Modell gerechnet wird?

d) Nehmen wir an, dass der in b) berechnete Klassenparameter auch für die heurige 4B und 4C gilt und alle drei Klassen zur gleichen Zeit die gleiche Deutsch-Schularbeit schreiben. Wie viele der insgesamt 75 teilnehmenden Schüler arbeiten dann gemäß dem Modell in die Pause hinein?





7) Wie Italienisch- und Französischlehrer nach jahrelanger empirischer Forschung herausgefunden haben, läßt sich die Arbeitsdauer bei einstündigen Schularbeiten (50 Minuten der Unterrichtsstunde plus zehn Minuten der darauffolgenden Pause) als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0;1]$ durch Dichtefunktionen φ mit Funktionsgleichungen der Bauart $\varphi(x) = \frac{(t+1)\cdot(2t+1)}{t\cdot(4t+3)}\cdot\left(2 - x^t - x^{2t}\right)$ beschreiben, wobei t>1 einen schulstufenabhängigen Parameter bezeichnet.

a) Zeige, dass sich φ tatsächlich für jedes t>1 als Dichtefunktion einer stetigen ZV mit $\Omega = [0;1]$ eignet!

b) Die durchschnittliche Arbeitszeit bei leichten ersten Italienisch-Schularbeiten beträgt 25 Minuten und 12 Sekunden. Berechne den sich daraus ergebenden Schulstufenparameter t!

c) Wie viele von 32 Schülern (zwei Italienisch-Gruppen) arbeiten unter Voraussetzung der Verwendbarkeit des obigen stochastischen Modells mit dem in b) berechneten Parameter t in die Pause hinein?

8) Nach dem Vorbild ihres Matheprofs richten sich Bino und "φιλ 007" (vgl. die entsprechende Optimierungsaufgabe aus dem Sommersemester 2008!) nach bestandener Reifeprüfung in ihrer Studentenbude eine Heimkinoanlage ein, wozu es zunächst einmal gilt, einen anständigen Beamer zu kaufen [Das Modell ihres (Ex-)Matheprofs ist ja mittlerweile nicht mehr aktuell!].
Die beiden Herren bringen in Erfahrung, dass die Lebensdauer der Lampe in dem von ihnen favorisierten Modell der Firma "Nasopanic" als in Tausendstunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;3]$ durch eine Dichtefunktion der Bauart $\varphi(x) = a\cdot(9x^4 - x^6)$ beschrieben wird. Leider hat der Mitarbeiter am Telefon so undeutlich gesprochen, dass keiner der beiden Herren den Faktor a akkustisch zu erkennen vermochte (Da hilft auch Binos Philosophie "Wie man sieht …" nichts! L).

a) Ermittle den Parameter a!

b) Berechne die sich daraus ergebende durchschnittliche Lebensdauer der Lampe in diesem Beamer!

c) In wie vielen Beamern aus einer 95 Stück zählenden Palette hält die Lampe gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell länger als 1750 Stunden?

Bino und "φιλ 007" anno 2007 beim Sportfest im Augarten

9) Auch Stan und Joe ziehen (zusammen mit Joe´s brother) in eine WG, wo sie sich ebenso ein Heimkino einrichten wollen. Als sich das mathematisch durchaus firme Trio über Einzelheiten die Lebensdauer der Lampe des von ihnen verehrten Beamer-Modells betreffend informieren, werden sie bei Nasopanic mit dem gleichen nuschelnden Mitarbeiter verbunden, den schon Bino und "φιλ 007" zuvor an der Strippe hatten, was sie zur (Teil-)Information führt, dass die Lebensdauer der Lampe als in Tausendstunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;3]$ durch eine Dichtefunktion der Bauart $\varphi(x) = a\cdot(9x^6 - x^8)$ beschrieben wird.

a) Ermittle den Parameter a!

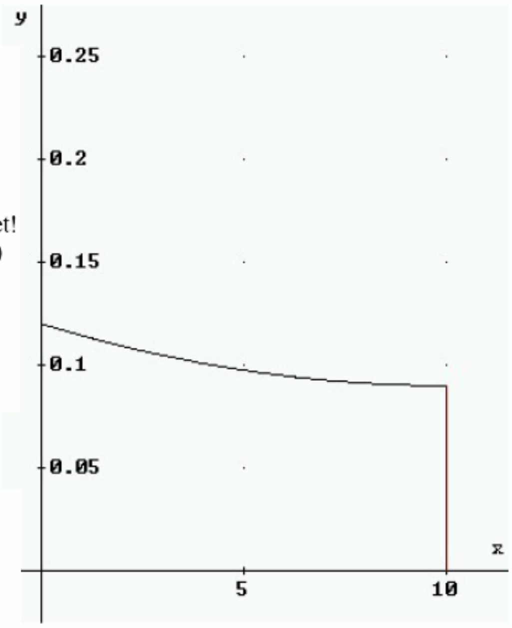
b) Berechne die sich daraus ergebende durchschnittliche Lebensdauer der Lampe in diesem Beamer!

d) In wie vielen Beamern aus einer 46 Stück zählenden Palette hält die Lampe gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell keine 2750 Stunden?

10) Untenstehende Figur zeigt den Graphen der Dichtefunktion φ jener stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0, 10]$, welche das in Jahren gemessene Alter von Wildschweinen beschreibt, wobei das Durchschnittsalter (ergo der Erwartungswert von X) 4 Jahre und 9 Monate beträgt und φ eine Polynomfunktion zweiten Grades mit der Minimumstelle $x = 10$ ist.

(a) Stelle eine Funktionsgleichung von φ (Achtung: Figur nicht maßstabsgetreu!) sowie der zugehörigen Verteilungsfunktion Φ auf!

(b) Wie viele von 39 Wildschweinen einer Zucht werden älter als das angegebene Durchschnittsalter? (die Gültigkeit des vorliegenden stochastischen Modells vorausgesetzt!)



11) In einer lauen Sommernacht blickst du gen Himmel und kannst durchschnittlich alle 15 Minuten eine Sternschnuppe erblicken. Es sprechen triftige Gründe für die Annahme, dass die in Minuten gemessene Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sternschnuppen als stetige Zufallsvariable X nach der folgenden Dichtefunktion φ verteilt ist: $\boxed{\varphi(x) = \frac{2t^2}{(x+t)^3}, t > 0, \Omega = [0;\infty[}$

a) Zeige, dass sich φ formal für jede positive reelle Zahl t als Dichtefunktion eignet!

b) Berechne jenes t, welches der Angabe (durchschnittliche Wartezeit 15 Minuten) entspricht.

c) In wie vielen von 17 Fällen dauert die Wartezeit auf die nächste Sternschnuppe zwischen 10 und 20 Minuten?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man länger als die durchschnittliche ¼ Stunde wartet?

12) In einer lauen Sommernacht blickst du gen Himmel und kannst durchschnittlich alle 10 Minuten eine Sternschnuppe erblicken. Es sprechen triftige Gründe für die Annahme, dass die in Minuten gemessene Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Sternschnuppen als stetige Zufallsvariable X nach der folgenden Dichtefunktion φ verteilt ist: $\boxed{\varphi(x) = \frac{3t^3}{(x+t)^4}, t > 0, \Omega = [0;\infty[}$

a) Zeige, dass sich φ formal für jede positive reelle Zahl t als Dichtefunktion eignet!

b) Berechne jenes t, welches der Angabe (durchschnittliche Wartezeit 10 Minuten) entspricht.

c) In wie vielen von 43 Fällen dauert die Wartezeit auf die nächste Sternschnuppe zwischen 5 und 15 Minuten?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man länger als die durchschnittlichen 10 Minuten wartet?

13) Die σ-Regel für die Normalverteilung besagt bekanntlich, dass für eine normalverteilte Zufallsvariable X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ die Beziehung $P(|X-\mu|<\sigma)\approx 68{,}26\%$ gilt. Betrachte nun die Zufallsvariable X mit $\Omega=[0;t]$ und der zugehörigen Dichtefunktion $\varphi(x)=6t^{-3}(tx-x^2)$.

a) Zeige zunächst, dass sich φ für jedes positive t formal als Dichtefunktion eignet.

b) Berechne den Erwartungswert μ und zeige, dass $\varphi(\mu+x)=\varphi(\mu-x)$ gilt.

c) Berechne die Standardabweichung σ von X und leite für X ebenso eine σ-Regel her! Gib das Resultat auf Zehntelpromille genau an!