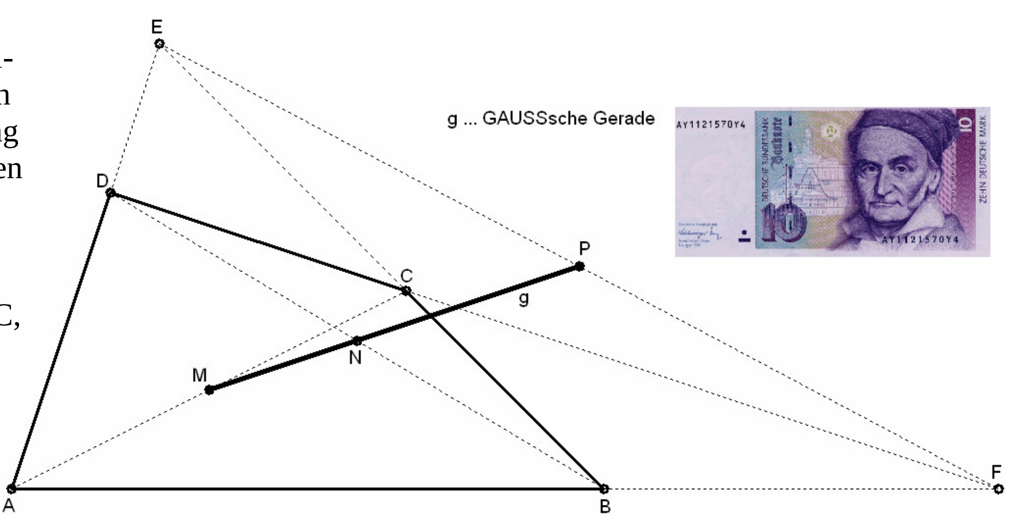
5) **Die GAUSSsche Gerade:**
Ergänzt man ein allgemeines Viereck ABCD wie in nebenstehender Abbildung illustriert zum sogenannten "vollständigen Vierseit" ABCDEF, so liegen die Mittelpunkte M, N und P der drei(!) Diagonalen AC, BD und EF kollinear ("GAUSS-Gerade" g). Bestätige die Gültigkeit dieses erstaunlichen Theorems am konkreten Beispiel des Vierecks ABCD mit den Eckpunkten A(0|0), B(24|0), C(16|8) und D(4|12)!

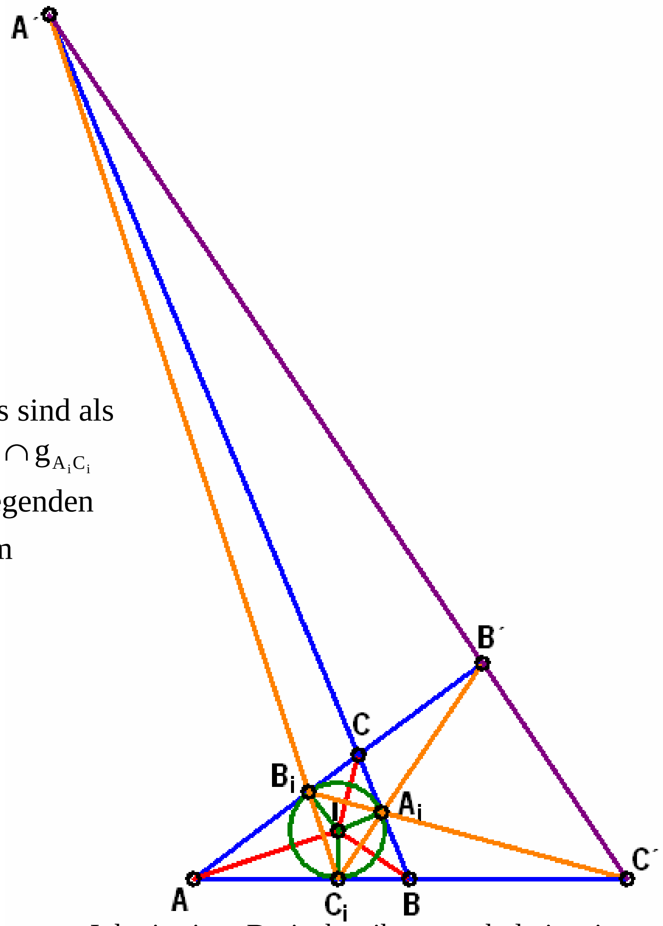


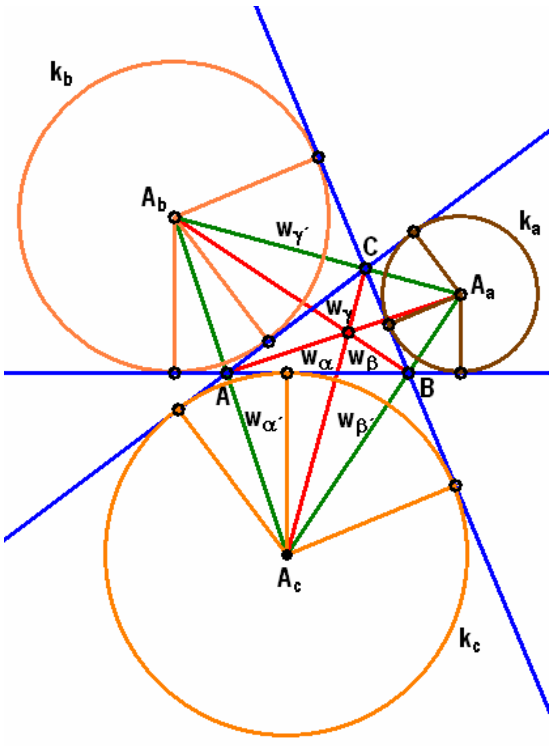
6) Gegeben ist das Dreieck ΔABC mit den Eckpunkten A(–23|–14), B(22|–4) und C(1|14).

a) Berechne die Koordinaten der in der rechten Abbildung illustrierten Punkte A_i, B_i und C_i (Berührungspunkte des Inkreises mit den Dreieckseiten).

b) Die NOBBS-Punkte A´, B´ und C´ eines Dreiecks sind als die Schnittpunkte $\{A'\} = g_{BC} \cap g_{B_iC_i}$, $\{B'\} = g_{AC} \cap g_{A_iC_i}$ und $\{C'\} = g_{AB} \cap g_{A_iB_i}$ definiert. Zeige am vorliegenden konkreten Beispiel die Gültigkeit von folgendem

SATZ. Die NOBBS-Punkte eines Dreiecks befinden sich in kollinearer Lage.

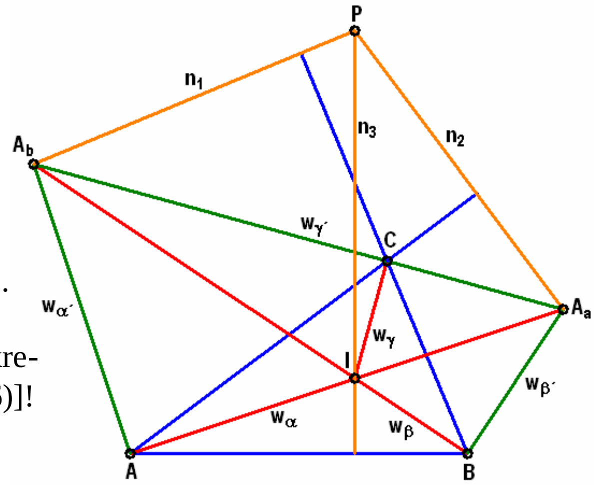




Abgesehen vom Inkreis eines Dreiecks gibt es noch drei weitere Kreise, welche die (Verlängerungen der) Dreieckseiten berühren. Man nennt sie die Ankreise eines Dreiecks (siehe Abbildung links!).

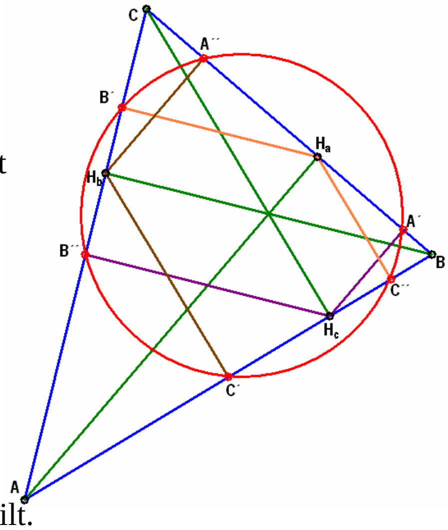
Über In- und Ankreise gibt es eine wahre Fülle interessanter Sätze {Gib z.B. im Internet einmal die Namen GERGONNE und NAGEL ein und verwende für GERGONNE – ein innerer und drei äußere GERGONNESCHE Punkte! – das Dreieck aus Aufgabe 6), für NAGEL – ein innerer und drei äußere NAGEL sche Punkte! – das Dreieck ΔABC[A(–29|–44), B(16|–34), C(–5|–16)]!}, ein bemerkenswertes Theorem neueren Datums (2006) stammt vom österreichischen Geometer Boris ODEHNAL und ist Inhalt der nächsten Aufgabe (vgl. zugehörige Abbildung!):

7) Es seien A_a und A_b zwei (von insgesamt drei) Ankreismittelpunkte(n) eines Dreiecks ΔABC mit dem Inkreismittelpunkt I. Sind die Normalen n_1, n_2 und n_3 wie in der Abbildung definiert, so gilt der folgende bemerkenswerte



SATZ. n_1, n_2 und n_3 schneiden einander in einem Punkt P.

Verifiziere dieses Juwel der Elementargeometrie am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(63|0), C(48|36)]$!



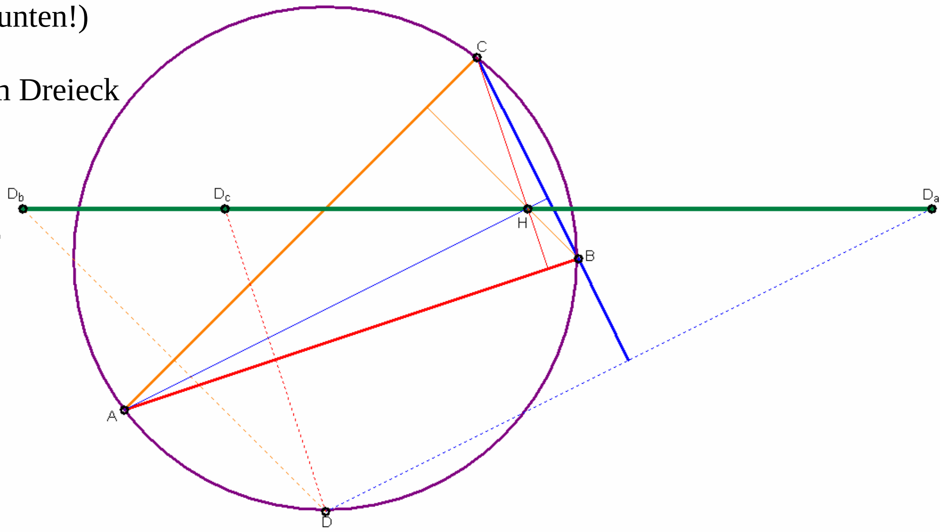
8) Legt man durch jeden Höhenfußpunkt eines Dreiecks Normale auf die verbleibenden Dreieckseiten und ermittelt die Schnittpunkte mit letzteren, so entsteht ein Sechseck A´A´´B´B´´C´C´´ (siehe Abbildung). Für dieses Sechseck gilt dann der folgende bemerkenswerte

SATZ. Die Normalprojektionen A´, A´´, B´, B´´, C´, C´´ der Höhenfußpunkte eines Dreiecks ΔABC (mit den Innenwinkeln α, β und γ sowie dem Umkreisradius R) auf die Dreieckseiten liegen auf einem Kreis (TAYLOR-Kreis), für dessen Radius r die Formel $\boxed{r = R\cdot\sqrt{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma+\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma}}$ gilt.

Bestätige diesen Lehrsatz am Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(-102|-118), B(98|2), C(-42|122)]$!

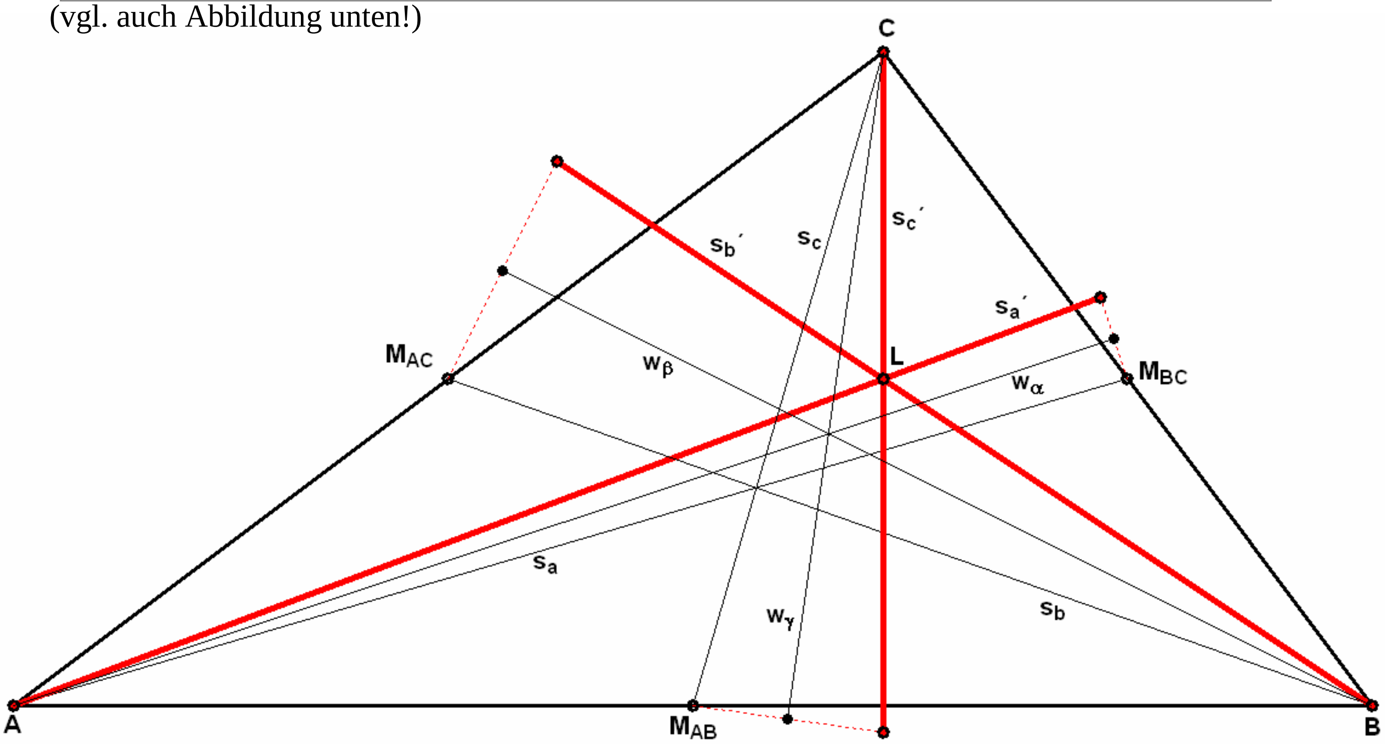
9) ***"Spiegelt man einen Punkt D des Umkreises eines Dreiecks ΔABC an den (Verlängerungen der) Dreieckseiten, so liegen die drei gespiegelten Punkte D_a, D_b, und D_c auf einer Gerade g. Ferner liegt der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ΔABC auf g."*** (vgl. auch Abbildung rechts unten!)

Verifiziere diese beiden Sätze am Dreieck $\Delta ABC[A(-5|-2), B(4|1), C(2|5)]$ für den Punkt $D(x_D|-4)$! Erkläre kurz und bündig, wie man nach Berechnung der Koordinaten der Punkte D_a, D_b, D_c und H deren Kollinearität ohne weitere Rechnung unmittelbar folgern kann!



10) Spiegelt man die Schwerlinien eines Dreiecks an den entsprechenden Winkelsymmetralen, so schneiden einander die drei resultierenden Geraden (*Symmediane* genannt) in einem Punkt L, dem sogenannten LEMOINE-Punkt (Emile Michele Hyacinthe, französischer Mathematiker, 1840 – 1912).

(vgl. auch Abbildung unten!)



Kontrolliere die Gültigkeit des obig formulierten Lehrsatzes am konkreten Beispiel des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(100|0), C(64|48)]!

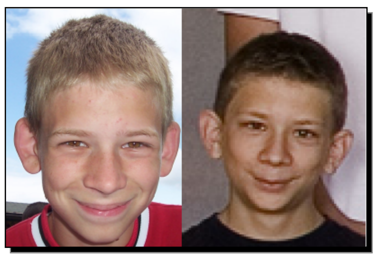
Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Juli 2008. Dr. Robert Resel, e. h.

Roli, use your connections! ☺

↑

P.S.: Ein Tipp (für zusätzliche Übungen, wenn erwünscht bzw. notwendig):



- Aus Platzgründen zwar nicht mehr auf www.matheprof.at, aber wohl sicher noch zu Hause beim rechts abgebildeten Geschwisterpaar:→ →→ ↑

  → Übungsaufgaben zur Analytischen Geometrie der Ebene der 5E(Rg), 2007/08 (ganze zweite, ¼ der dritten und ½ der vierten Schularbeit)!

- Bezüglich der Bemerkung zwischen den Aufgaben 6) und 7) gibt es Aufgaben mit Lösungen, welche sowohl unter den Übungsbeispielen zur 4. Schularbeit [5C(Rg), 2005/06] als auch unter Schulübungsbeispielen zu finden sind. Also macht euch ggf. auf die Suche nach diesen "Schätzen"! ☺

Lösungen zu ausgewählten abschließenden Übungsbeispielen

(ANALYTISCHE GEOMETRIE DER EBENE – 5. KLASSE)

8C, Realgymnasium, 2008/09

6) $I(2|1)$, $A_i(8|8)$, $B_i(-5|7)$, $C_i(4|-8)$, $A'(-20|32)$, $B'(13|28)$, $C'(112|16)$

7) $A_a(81|27)$, $A_b(-18|54)$, $I(42|14)$, $P(42|79)$

8) $A'(84|14)$, $A''(-14|98)$, $B'(-54|74)$, $B''(-72|2)$, $C'(-2|-58)$,
$C''(78|-10)$, $U'(5|21)$, $U(-32|-8)$, $R=10\cdot\sqrt{170}$, $r=\sqrt{6290}$

9) $D(-1|-4)$, $D_a(11|2)$, $D_b(-7|2)$, $D_c(-3|2)$, $H(3|2)$

10) $L(64|24)$