

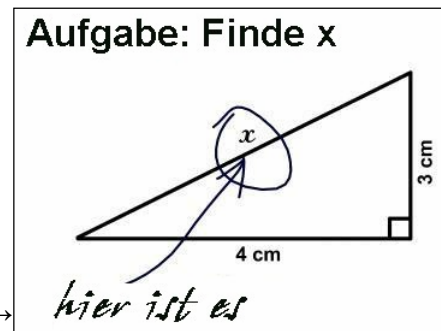
Übungsbeispiele sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura

(8C, Realgymnasium, 2008/09)

Diese Beispiele sollen durch die sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura relevanten Stoffgebiete führen, wobei hier zunächst mit der Analytischen Raumgeometrie ein Stoffgebiet der 6. Klasse exemplarisch nochmals aufgerollt wird, und zwar anhand von Aufgaben, deren "Bausteine" geradezu charakteristisch für Maturabeispiele sind.



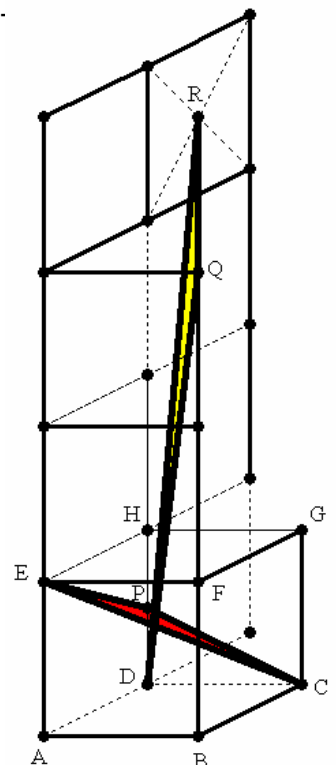
ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse sowohl bei der dreistündigen Schularbeit als auch bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der dreistündigen Schularbeit resp. der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!



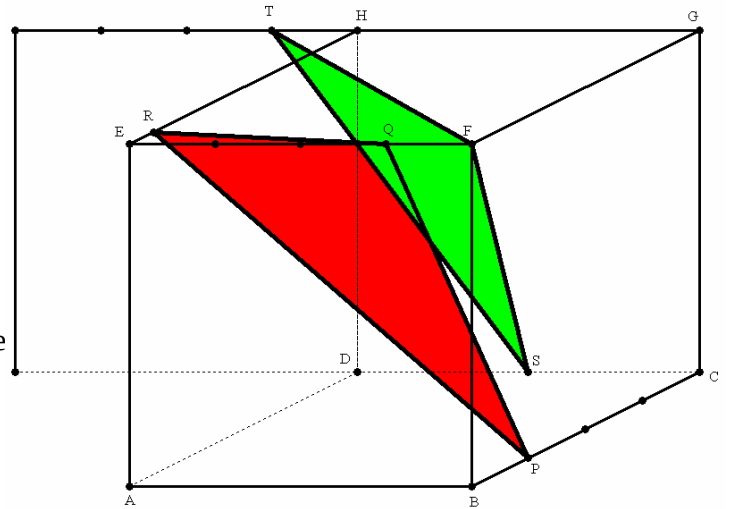
Aufgaben dieser Art wirst du jedoch weder bei der dreistündigen Schularbeit noch bei der schriftlichen Matura vorfinden! ©

- 1) Gegeben ist ein Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 210 (siehe nebenstehende Abbildung!). Die Punkte P, Q und R entstehen wie aus der Abbildung ersichtlich durch Kantenhalbierung bzw. Hinzufügen von Mantelquadraten an den Würfel ABCDEFGH.

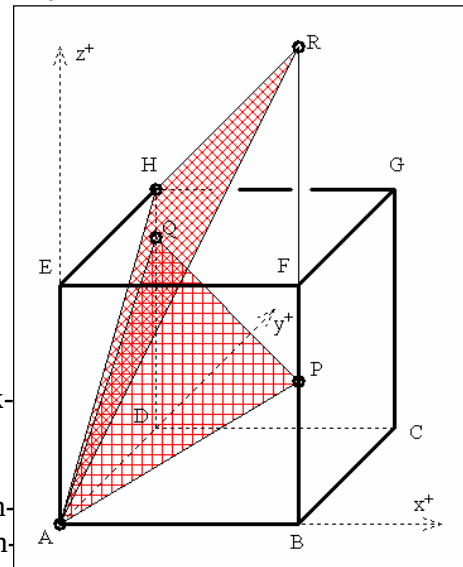
- Gib die Koordinaten der Punkte C, D, E, P, Q und R in einem dir geeignet erscheinenden Koordinatensystem an und begründe die Wahl "deines" Koordinatensystems, welches du in die nebenstehende Abbildung einzeichnen sollst!
- Stelle Gleichungen der Ebenen ϵ_{CEP} und ϵ_{DQR} (siehe Abbildung!) auf!
- Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen ϵ_{CEP} und ϵ_{DQR} !
- Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgerade der Ebenen ϵ_{CEP} und ϵ_{DQR} !
- In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der Dreiecke ΔCEP und ΔDQR zueinander?



- 2) Gegeben ist ein Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 140 (siehe nebenstehende Abbildung!). Die Punkte P, Q, S und T entstehen durch (fortlaufende) Halbierung, die Entfernung von R zu E beträgt exakt 3.

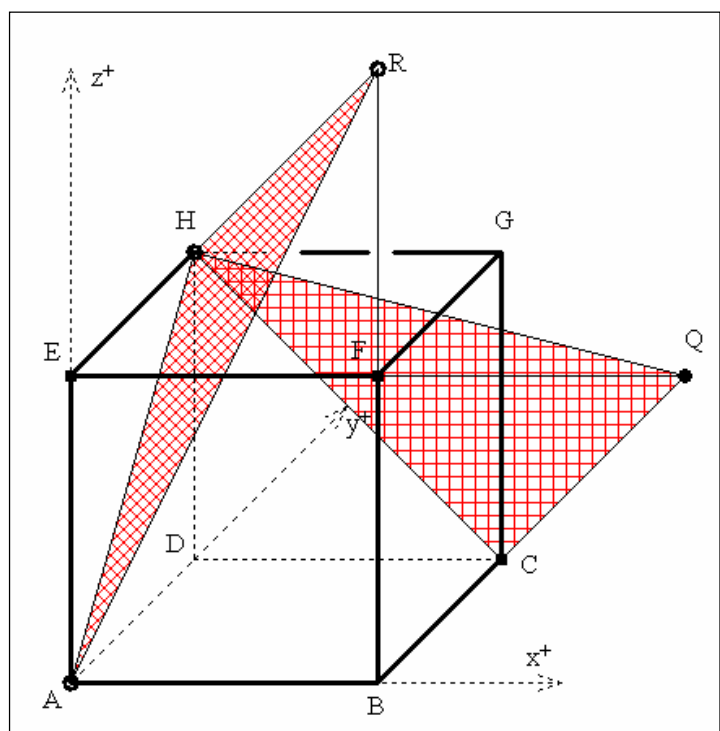


- Gib die Koordinaten der Punkte F, P, Q, R, S und T in einem dir geeignet erscheinenden Koordinatensystem an und begründe die Wahl "deines" Koordinatensystems, welches du in die nebenstehende Abbildung einzeichnen sollst!
- Stelle Gleichungen der Ebenen ϵ_{PQR} und ϵ_{FST} (siehe Abbildung!) auf!
- Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen ϵ_{PQR} und ϵ_{FST} !
- Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgerade der Ebenen ϵ_{PQR} und ϵ_{FST} ! Der Startpunkt soll dabei in der Trägerebene des Quadrats ABEF liegen!
- Beweise: Ist F der Flächeninhalt eines Begrenzungsquadrats des Würfels und F' der Flächeninhalt des Dreiecks ΔFST , so gilt $F' = \frac{5\sqrt{2}}{8} \cdot F$.

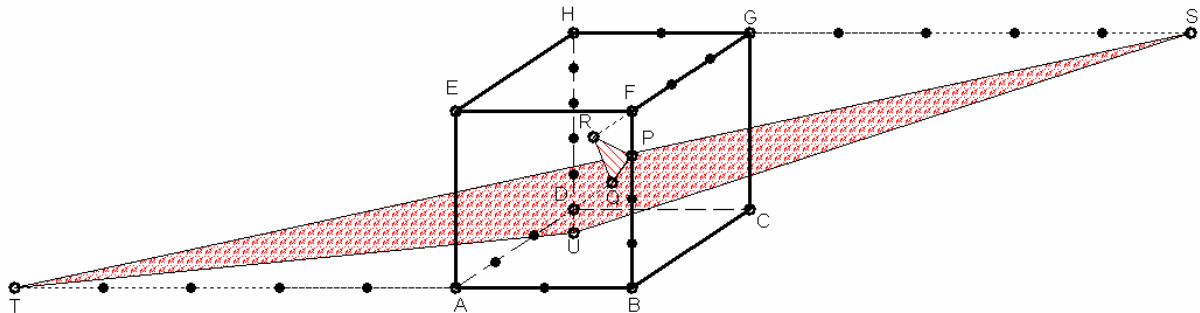


- 3) In nebenstehend abgebildetem Würfel (Kantenlänge 5cm) liegt P exakt 2cm von F und Q exakt 1cm von H entfernt. R ist der Spiegelpunkt von B an F. ϵ_1 (waagrecht und senkrecht schraffiert) bezeichne die Ebene durch A, P und Q, ϵ_2 (diagonal schraffiert) bezeichne die Ebene durch A, H und R. Berechne unter Verwendung des bereits eingezeichneten Koordinatensystems das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen ϵ_1 und ϵ_2 .

- 4) In nebenstehend abgebildetem Würfel (Kantenlänge 2cm) ist Q bzw. R der Spiegelpunkt von E an F bzw. von B an F. ϵ_1 (diagonal schraffiert) bezeichne die Ebene durch A, H und R, ϵ_2 (waagrecht und senkrecht schraffiert und teilweise durch ϵ_1 verdeckt) bezeichne die Ebene durch C, H und Q. Berechne unter Verwendung des bereits eingezeichneten Koordinatensystems das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen ϵ_1 und ϵ_2 .

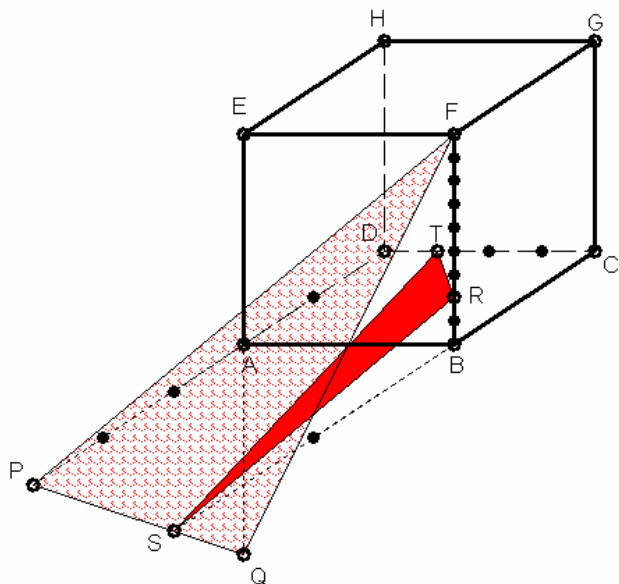


- 5) Die Kanten AF, BF und CF eines Oktaeders ABCDEF werden in jeweils 21 gleich lange Teile geteilt. P liegt auf AF und ist von A aus betrachtet der erste Teilungspunkt, P liegt auf BF und ist von B aus betrachtet der zweite Teilungspunkt, R schließlich liegt auf CF und ist von C aus betrachtet der dritte Teilungspunkt. Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels φ der Ebenen ε_{PQR} und ε_{CDF} (Leite dazu das Oktaeder aus einem Würfel der Seitenlänge 42 ab.)!
- 6) In untenstehender Abbildung sind ein Würfel mit der Seitenlänge 60 sowie sechs weitere Punkte illustriert, welche durch Halbierung, Drittelung, Viertelung und Fünftelung von Würfelkanten sowie fortlaufende Spiegelung entstanden sind.
- Gib die Koordinaten der Punkte P, Q, R, S, T und U in einem dir geeignet erscheinenden räumlichen cartesischen Koordinatensystem an und begründe die Wahl "deines" Koordinatensystems!
 - Stelle Gleichungen der Ebenen ε_{PQR} und ε_{STU} (vgl. Abbildung!) auf!
 - Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels der Ebenen ε_{PQR} und ε_{STU} !
 - Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgerade s der Ebenen ε_{PQR} und ε_{STU} und zeige, dass s Trägergerade einer Raumdiagonale des Würfels ist.
 - Berechne die Flächeninhalte der Dreiecke ΔPQR und ΔSTU , zeige, dass sich diese ziemlich genau wie 51:371 verhalten und gib auch das exakte "Verhältnis" an!

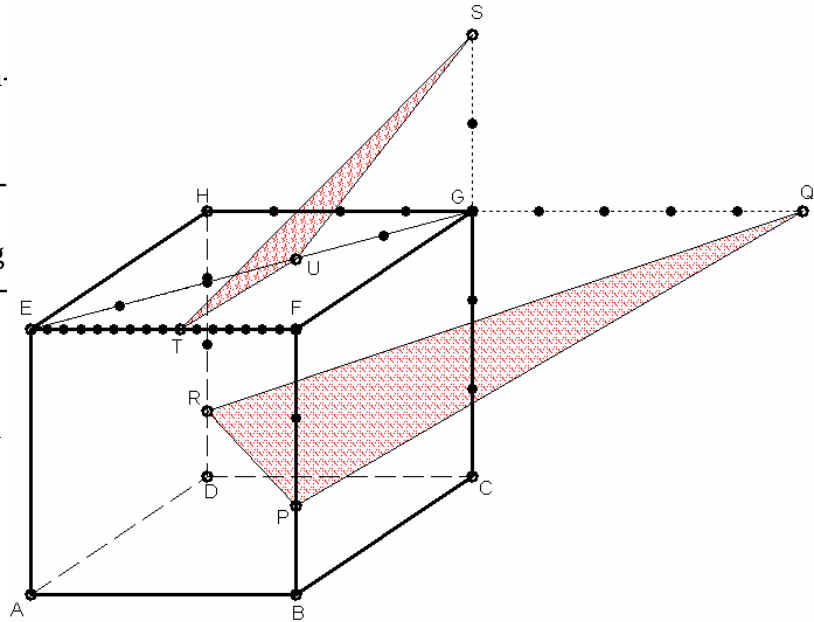


- 7) In nebenstehender Abbildung ist ein Würfel mit einer Seitenlänge von 36 zusammen mit fünf weiteren Punkten illustriert, welche durch Halbierung, Viertelung, Neuntelung sowie (fortlaufende) Spiegelung entstanden sind.

- Gib die Koordinaten der Punkte P, Q, R, S und T in einem dir geeignet erscheinenden räumlichen cartesischen Koordinatensystem an und begründe die Wahl "deines" Koordinatensystems!
- Stelle Gleichungen der Ebenen ε_{PQF} und ε_{RST} (vgl. Abbildung!) auf!
- Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels der Ebenen ε_{PQF} und ε_{RST} !
- Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgerade s der Ebenen ε_{PQF} und ε_{RST} und zeige, dass s die Würfelkante AB halbiert.
- Berechne die Flächeninhalte der Dreiecke ΔRST und ΔPQF , zeige, dass sich diese ziemlich genau wie 577:1224 verhalten und gib auch das exakte "Verhältnis" an!



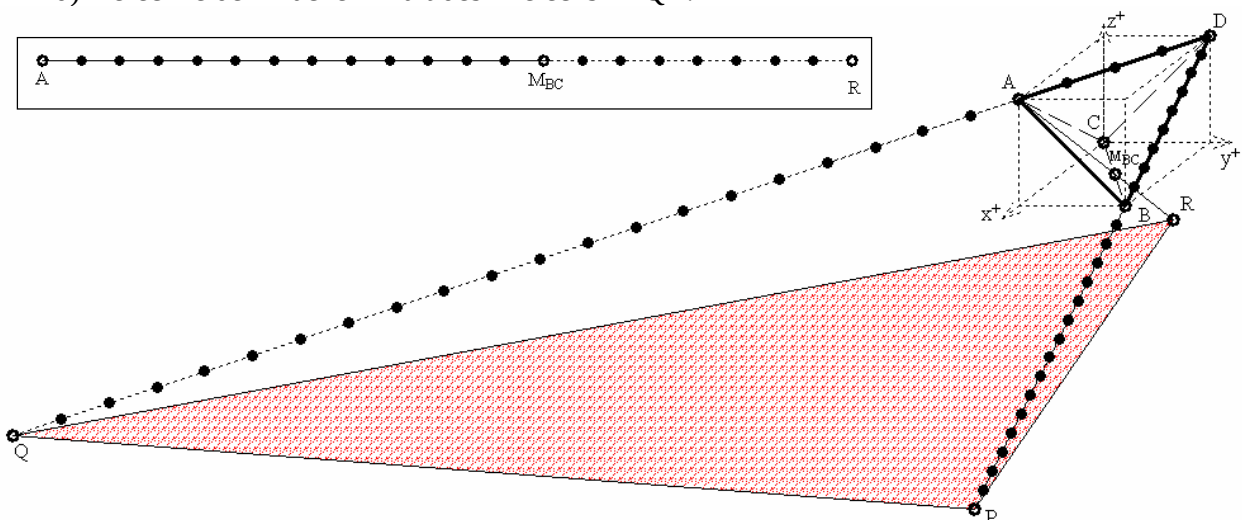
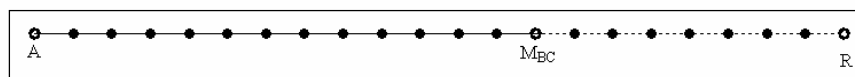
- 8) In nebenstehender Abbildung ist ein Würfel mit einer Seitenlänge von 240 zusammen mit sechs weiteren Punkten illustriert, wobei diese sechs Punkte durch Drittelung, Viertelung, Fünftelung und 16telung von Würfelkanten und –diagonalen sowie fortlaufender Spiegelung entstanden sind.

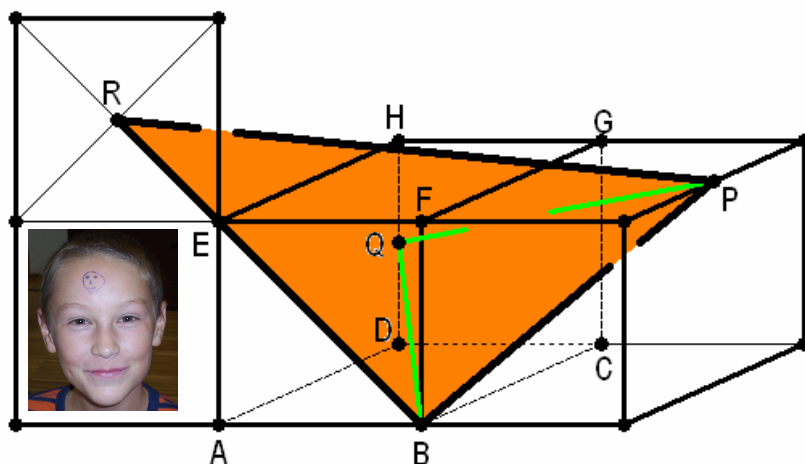


- Gib die Koordinaten der Punkte P, Q, R, S, T und U in einem dir geeignet erscheinenden räumlichen cartesischen Koordinatensystem an und begründe die Wahl "deines" Koordinatensystems!
- Stelle Gleichungen der Ebenen ϵ_{PQR} und ϵ_{STU} (vgl. Abbildung!) auf!
- Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels der Ebenen ϵ_{PQR} und ϵ_{STU} !
- Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgerade s der Ebenen ϵ_{PQR} und ϵ_{STU} und zeige, dass s durch den Würfeleckpunkt A verläuft.
- Berechne die Flächeninhalte der Dreiecke ΔPQR und ΔSTU , zeige, dass sich diese ziemlich genau wie 1766:333 verhalten und gib auch das exakte "Verhältnis" an!

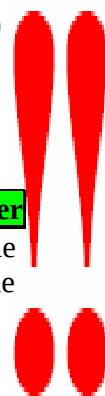
- 9) Untenstehend sind ein regelmäßiges Tetraeder (abzuleiten aus einem Würfel der Seitenlänge 468, wobei das bereits eingezeichnete Koordinatensystem zu verwenden ist) sowie drei weitere Punkte P, Q und R illustriert.

- Stelle eine Gleichung der Ebene ϵ_{PQR} (vgl. Abbildung!) auf!
- Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels der Ebenen ϵ_{PQR} und $\epsilon [\epsilon: 9x-4y-25z=0]$!
- Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgerade s der Ebenen ϵ_{PQR} und ϵ_{STU} und zeige, dass s durch den Eckpunkt C des Tetraeders verläuft!
- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔPQR !



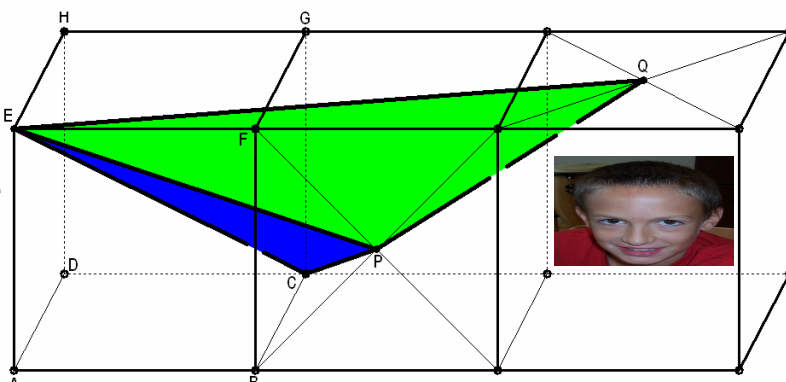


Die Übungsbeispiele 10) bis 23) sind der **Aufgabensammlung** einer der beiden heurigen sechsten Rg-Klassen (freilich jener von mir unterrichtet! ☺) entnommen, **in bzw. aus welcher** ihr natürlich zwecks Üben für die dreistündige Schularbeit resp. die schriftliche Mathematikklausur ebenso nach Lust und Laune stöbern und ausdrucken könnt!



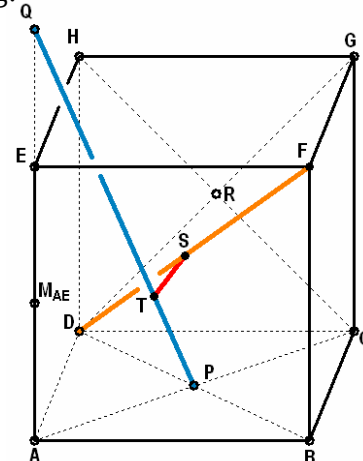
- 10) In obig abgebildetem Würfel ABCDEFGH (Kantenlänge 2) sind die Punkte P, Q und R durch Hinzufügen und Halbieren von (weiteren) Würfelkanten und Flächendiagonalen entstanden. Norbert (siehe an die Seite AE angefügtes Quadrat!) hat behauptet, dass der spitze Winkel zwischen den Ebenen ϵ_{BPR} und ϵ_{BPQ} 30° misst und bekam für diese falsche Behauptung doch glatt ein "zweites Gesicht" verpasst. J Wie groß ist denn nun tatsächlich das Maß dieses spitzen Schnittwinkels?

- 11) In nebenstehender Abbildung sind die Punkte P und Q Diagonalschnittpunkte von Würfeln, welche an den Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 2) angehängt wurden. Mr. Foley versucht uns mit seinem Blick einzureden, dass der Winkel zwischen den Dreiecken(!) $\triangle CPE$ und $\triangle EPQ$ exakt 120° misst. Beweise oder korrigiere Mr. Foleys Behauptung!



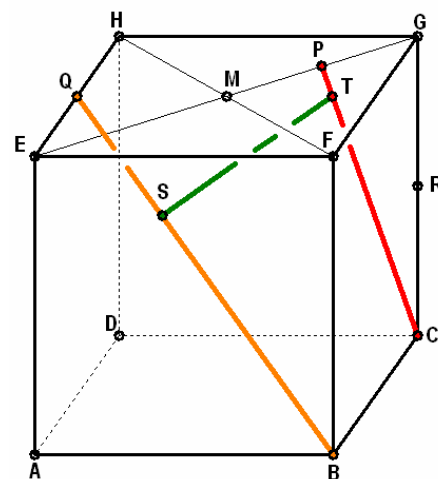
- 12) Im nebenstehenden Würfel (Kantenlänge 24) ist Q der Spiegelpunkt von M_{AE} an E sowie S bzw. T der Endpunkt der Treffnormale von g_{DF} und g_{PQ} auf g_{DF} bzw. g_{PQ} .

- In welchem Verhältnis teilt S bzw. T die Länge der Strecke DF bzw. PQ (ikonische oder verbale Antwort!)?
- Zeige, dass g_{ST} parallel zu g_{AR} verläuft und ermittle das Verhältnis $\overline{ST} : \overline{AR}$!

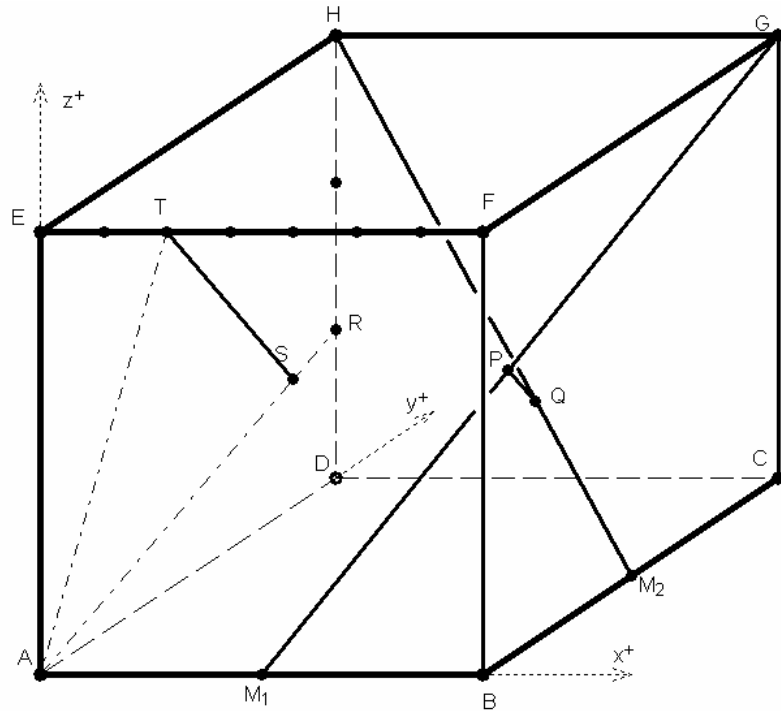


- 13) Im nebenstehenden Würfel (Kantenlänge 36) ist P der Mittelpunkt der Strecke GM sowie S bzw. T der Endpunkt der Treffnormale von g_{BQ} und g_{CP} auf g_{BQ} bzw. g_{CP} .

- In welchem Verhältnis teilt S bzw. T die Länge der Strecke BQ bzw. CP (ikonische oder verbale Antwort!)?
- Zeige, dass g_{ST} parallel zu g_{AR} verläuft und ermittle das Verhältnis $\overline{ST} : \overline{AR}$!

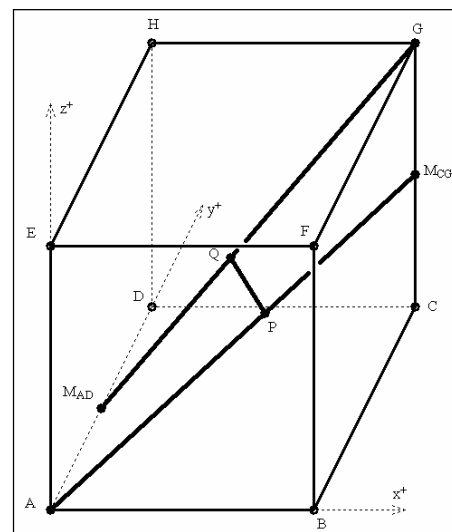


- 14) Der nebenstehende Würfel ABCDEFGH hat eine Seitenlänge von 130. M_1 und M_2 sind der Abbildung zu entnehmende Kantenmittelpunkte, P und Q sind die Endpunkte der Treffnormale der Strecken M_1G und M_2H . R bzw. T entsteht wie abgebildet durch eine Unterteilung der Kante DH bzw. EF in drei bzw. sieben gleich lange Teile. S liegt auf der Strecke AR derart, dass $\overline{AS} = 6 \cdot \overline{SR}$ gilt. Verwende zum Lösen der folgenden Aufgaben das bereits eingezeichnete Koordinatensystem!



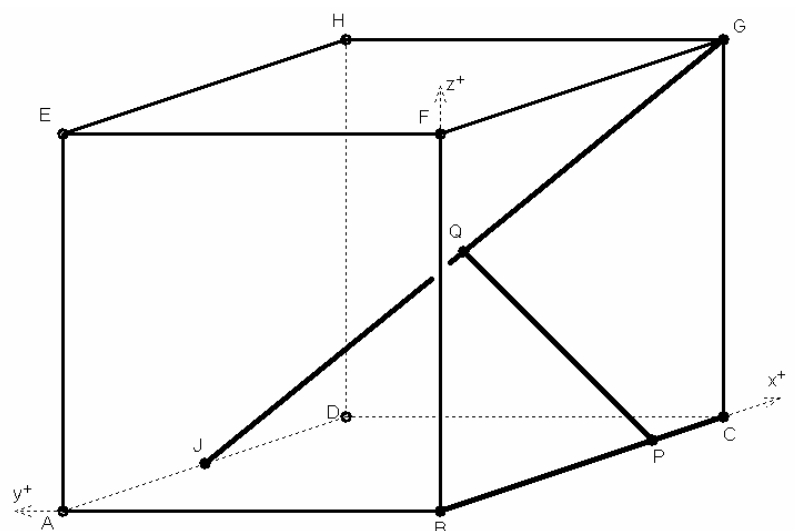
- In welchem Verhältnis teilt P bzw. Q die Länge der Strecke M_1G bzw. M_2H (ikonische oder verbale Antwort!)?
- Zeige, dass g_{PQ} parallel zur Gerade g_{TS} verläuft! In welchem Verhältnis stehen die Längen der Strecken PQ und TS zueinander?
- Berechne für den Punkt R(89|321|42) das Maß des Winkels $\alpha = \angle PQR$!

- 15) Der in nebenstehender Abbildung illustrierte Würfel hat eine Seitenlänge von 34, die Punkte P und Q bezeichnen die Endpunkte der Treffnormale der Geraden durch A und M_{CG} sowie durch M_{AD} und G. Verwende zum Lösen der folgenden Aufgaben das bereits eingezeichnete Koordinatensystem!



- In welchem Verhältnis teilt P bzw. Q die jeweilige Strecke (ikonische oder verbale Antwort!)?
- Berechne für R(13/19/26) das Maß des Winkels $\alpha = \angle QPR$!

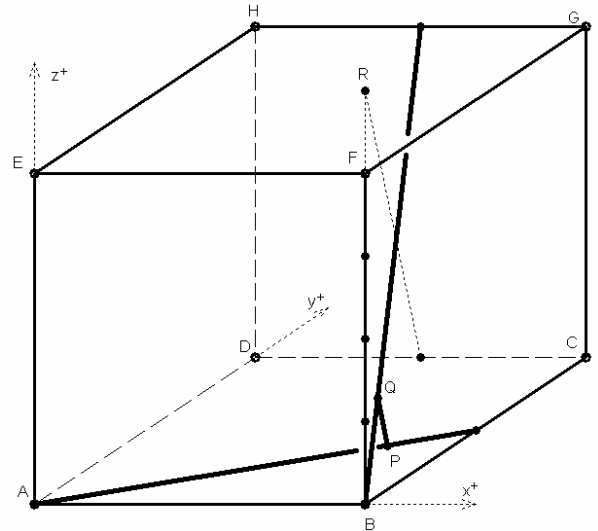
- 16) In nebenstehender Abbildung ist ein Würfel (Kantenlänge 4) zusammen mit einem Kantenmittelpunkt (J) illustriert.



- Ermittle unter Verwendung des bereits eingezeichneten Koordinatensystems die Treffnormale der Geraden g_{BC} und g_{GJ} . In welchem Verhältnis teilt P bzw. Q (siehe Abbildung!) die Strecke BC bzw. GJ?
- Berechne für den Punkt R(19|84|0) das Maß des Winkels $\alpha = \angle QPR$!

- 17) Der nebenstehende Würfel $ABCDEFGH$ hat eine Seitenlänge von 180. Bis auf P und Q sind alle markierten Punkte (fortlaufende) Halbpierungspunkte. P und Q sind die Endpunkte der Treffnormale der Strecken AM_{BC} und BM_{GH} .

- In welchem Verhältnis teilt P bzw. Q die Länge der Strecke AM_{BC} bzw. BM_{GH} (ikonische oder verbale Antwort!)?
- Zeige, dass g_{PQ} parallel zur Gerade durch M_{CD} und R verläuft! In welchem Verhältnis stehen die Längen der Strecken PQ und $M_{CD}R$ zueinander?

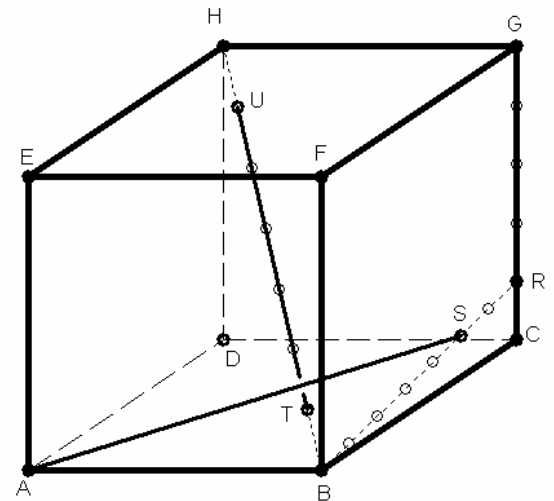


18) **Fortsetzung von Aufgabe 17):**

Betrachte die Ebenen ϵ_{CPQ} und ϵ_{QST} , wobei S jener Punkt auf der Strecke AM_{CD} ist, für welchen $\overline{AQ} = 8 \cdot \overline{QM_{CD}}$ gilt und T jener Punkt auf der Strecke BG ist, für welchen $\overline{TG} = 2 \cdot \overline{BT}$ gilt und berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen ϵ_{CPQ} und ϵ_{QST} !

- 19) Der in nebenstehender Figur abgebildete Würfel hat eine Seitenlänge von 91. Die Kante CG wird in fünf gleich lange Teile geteilt, woraus R hervorgeht. Dann wird die Strecke BR in sieben gleich lange Teile geteilt, woraus S hervorgeht. Schließlich wird die Raumdiagonale BH in sieben gleich lange Teile geteilt, woraus die Punkte T und U hervorgehen.

- Zeige, dass die Strecken AS und TU gleich lang sind.
- Die Strecke AS soll so in die Strecke TU gedreht werden, dass bei der Drehung A in T und S in U übergeht. Ermittle eine Parameterdarstellung der Drehachse d.

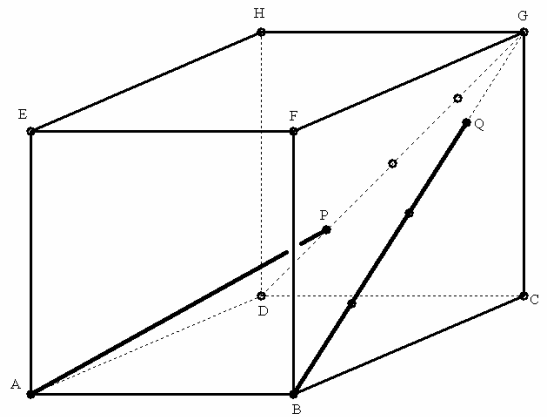


- Berechne für die Drehung von A nach T die Koordinaten des Mittelpunkts M des zugehörigen Bahnkreises sowie das Maß des Drehwinkels φ .
- Berechne für die Drehung von S nach U die Koordinaten des Mittelpunkts M' des zugehörigen Bahnkreises sowie das Maß des Drehwinkels φ .

20) **Fortsetzung von Aufgabe 19):**

Zeige, dass der in 19c) und 19d) berechnete Drehwinkel φ gleich dem Winkel $\angle MLN$ im Dreieck $\triangle LMN$ [L(x|9|0), M(3|y|8), N(7|1|z)] ist, welches in der Ebene ϵ_{IJK} [I(-1|27|15), J(7|34|40), K(8|6|9)] liegt!

- 21) Der in nebenstehender Figur abgebildete Würfel ABCDEFGH hat eine Seitenlänge von 40. Die Flächendiagonalen BG und DG wurden in vier gleich lange Teile geteilt, P und Q sind die in der Figur entsprechend markierten Teilungspunkte.

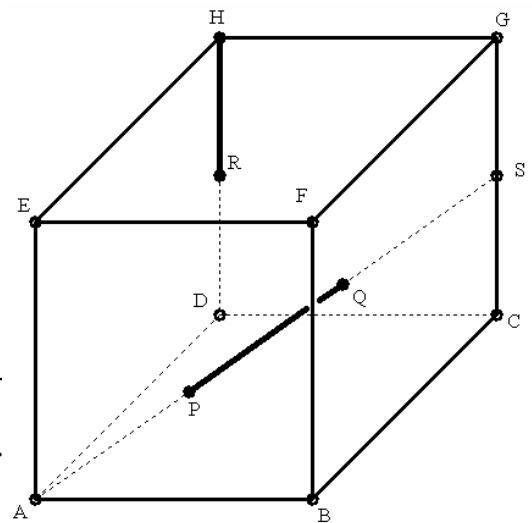


- Zeige, dass die Strecken AP und BQ gleich lang sind.
- Die Strecke AP soll so in die Strecke BQ gedreht werden, dass bei der Drehung A in B und P in Q übergeht. Ermittle eine Parameterdarstellung der Drehachse d.
- Berechne für die Drehung von P nach Q die Koordinaten des Mittelpunkts M des zugehörigen Bahnkreises sowie das Maß des Drehwinkels φ .
- Berechne für die Drehung von A nach B die Koordinaten des Mittelpunkts M' des zugehörigen Bahnkreises sowie das Maß des Drehwinkels φ .

22) **Fortsetzung von Aufgabe 21):**

Zeige, dass der in 21c) und 21d) berechnete Drehwinkel φ gleich dem stumpfen Schnittwinkel zwischen den Ebenen $\varepsilon_{ABC(D)}$ und ε_{BET} im Würfel ABCDEFGH (o.B.d.A.: Seitenlänge 1) ist, wobei T der Spiegelpunkt von F an G ist!

- 23) Der in obiger Figur abgebildete Würfel ABCDEFGH hat eine Seitenlänge von 168. R bzw. S ist der Mittelpunkt der Würfelkante DH bzw. CG. Die Strecke AS wurde in drei gleich lange Teile geteilt, PQ ist der "Mittelteil" (siehe obige Figur!).



- Zeige, dass die Strecken PQ und RH gleich lang sind.
- Die Strecke PQ soll so in die Strecke RH gedreht werden, dass bei der Drehung P in H und Q in R übergeht. Ermittle eine Parameterdarstellung der Drehachse d.
- Berechne für die Drehung von P nach H die Koordinaten des Mittelpunkts M des zugehörigen Bahnkreises sowie das Maß des Drehwinkels φ .

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Juni 2008.

Dr. Robert Resel, e. h.

Hinweise zum (lohnenden!) Üben:

- ✓ **Folgende 7 Aufgaben** werden sicher in Schulübungen bearbeitet werden: 5, 6, 9, 10, 17, 18, 23
 - ✓ **Folgende 5 Aufgaben** werden im Laufe des Abschlussmoduls als Hausübung aufgegeben: 1, 2, 8, 13, 19
 - ✓ **Folgende 11 Aufgaben** sind einzig und allein zum Zweck des eigenständigen Anwendens der bislang gelernten Methoden der Analytischen Raumgeometrie auf diverse geometrische Problemstellungen gedacht und werden im Unterricht nicht behandelt: 3, 4, 7, 11, 12, 14, 15, 16, 20, 21, 22
- Bei Fragen steht euch nach wie vor die Schülersprechstunde zur Verfügung!!



Beachtet auch den Hinweis vor Aufgabe 10



Ein weiterer Hinweis: Folgende 14 Aufgaben aus der Aufgabensammlung der heurigen 6X(Rg) für die 1. Schularbeit können zum Aufwärmen für **einfachere** (aber nichtsdestotrotz **ebenso wichtige!**) **Lehrstoffinhalte** (Schneiden einer Ebene mit einer Gerade, Flächeninhalt eines Dreiecks im Raum, Winkelmaßberechnung zwischen Gerade und Ebene, Anwendung des Orthogonalitätskriteriums) hilfreich sein: 13, 40, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57



→ Für komplexere Lehrstoffinhalte wie "Schnittgeraden- und Schnittwinkelberechnung zweier Ebenen" (inkl. räumlicher Drehung) sowie "Treffnormale eines windschiefen Geradenpaars" stehen euch/uns ja die *maturablen* Aufgaben 1 bis 23 zur Verfügung!



Lösungen zu ausgewählten Übungsbeispielen sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch für die schriftliche Matura (Analytische Raumgeometrie) (8C, Realgymnasium, 2008/09)



- 3) 30°
- 4) 30°
- 7) Für den Fall, dass A im Ursprung liegt, die positive x-Achse in Richtung B, die positive y-Achse in Richtung D und positive z-Achse in Richtung E verläuft gilt:
 $\epsilon_{PQF}: -6x+2y+3z=-108$, $\epsilon_{RST}: 4x+y-9z=72$, Schnittwinkel: 45° , $F_{\Delta RST}: F_{\Delta PQF}=\sqrt{2}:3$
- 11) Mr. Foley behält Recht!
- 12) $\overline{DS}:\overline{SF}=11:13$, $\overline{PT}:\overline{TQ}=1:3$, $\overline{TS}:\overline{AR}=1:6$
- 14) a) $\overline{M_1P}:\overline{PG}=31:34$, $\overline{M_2Q}:\overline{QH}=21:44$, b) $\overline{PQ}:\overline{TS}=14:65$, c) $\alpha=138$
- 15) a) $\overline{AP}:\overline{PM_{CG}}=10:7$, $\overline{M_{AD}Q}:\overline{QG}=7:10$, b) 45°
- 16) a) $\overline{BP}:\overline{PC}=3:1$, $\overline{JQ}:\overline{QG}=1:1$, b) $\alpha=46^\circ$
- 21) a): $30\sqrt{2}$, b) Wählt man den Ursprung in A und ferner: AB...x-Achse, AD...y-Achse sowie AE...z-Achse, dann ergibt sich (z.B.!) d: $X=(20/0/10)+t(0/2/1)$, c) $M(20/32/36)$, $\cos\varphi=-2/3$, d) $M'(20/-4/8)$