Beweise: Die symmetrische quartische Gleichung $x^4+rx^3+(r+1)x^2+rx+1=0$ $(*)$ besitzt im Fall $r \in I := (-1;3)$ vier echt-komplexe Lösungen und im Fall $r \in \mathbb{R}\backslash\{I \cup \{-1,3\}\}$ zwei verschiedene reelle und zwei echt-komplexe Lösungen.

- Zeige ferner, dass $(*)$ unabhängig von der Wahl von r stets zwei feste echt-komplexe Zahlen als Lösungen besitzt und gib diese in Polarform an!
- Diskutiere die Sonderfälle $r=-1$ und $r=3$!

4) Gegeben ist die symmetrische quartische Gleichung $x^4 + (1-\sqrt{3})x^3 + (2-\sqrt{3})x^2 + (1-\sqrt{3})x + 1 = 0$. Ermittle die Lösungsmenge und zeige, dass alle vier Lösungen zwölfte Einheitswurzeln sind (Welche?)!

4) $x_1=(1,30°)$, $x_2=(1,120°)$, $x_2=(1,240°)$, $x_4=(1,330°)$

4) Gegeben sind drei feste komplexe Zahlen w_1, w_2 und w_3 sowie die damit verwandte Gleichung $(z-w_1)(z-w_2)+(z-w_2)(z-w_3)=(z-w_3)(z-w_1)$.

a) Leite allgemein die Formel $Z_{1,2} = W_2 \pm \sqrt{(W_2 - W_1)(W_2 - W_3)}$ für die Lösungen z_1 und z_2 der obigen Gleichung her!

b) Löse die Gleichung konkret für $w_1=7-3i$, $w_2=41+11i$ und $w_3=40+10i$ und führe *für eine beliebige der beiden Lösungen* die Probe durch!

4) $z_1=35+7i$, $z_1=47+15i$