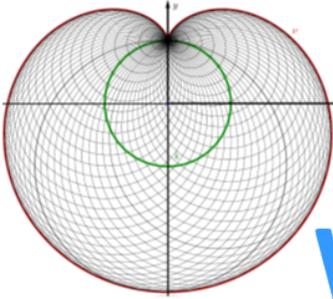
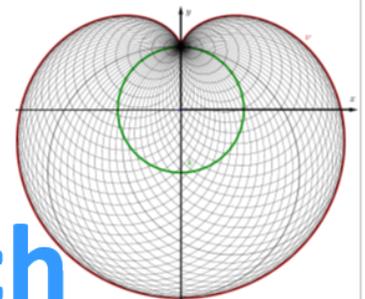


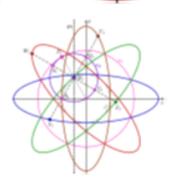
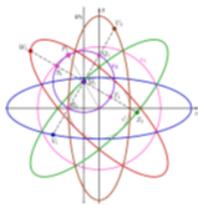
Mit Ach & Krach –



Mathematik Wahlpflichtfach



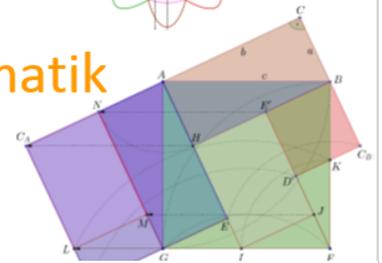
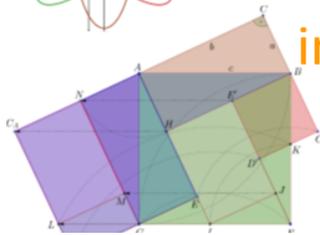
Vortrag von Dr. R. Resel



im Rahmen der ARGE Mathematik

Dienstag, 20. November 2018

GRgXI, Geringergasse



Motivation in der dritten Klasse wecken ...

... und zwar zum Besuch eines **Olympiadekurses** ...

... in der *vierten Klasse* ...

... mit (versteckten) Hinweisen (\rightarrow : **•!**) auf das Wahlpflichtfach

• ... etwa erst kürzlich in meinem Olympiadekurs (Teil 1):

Beweise unter Verwendung der Methode der vollständigen Induk-

tion die $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gültige Ungleichung $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$.

Bemerkung für später (WAHLPFLICHTFACH!): Aus

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 2 - \frac{1}{n+1}$$

folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ zwischen $\frac{3}{2}$ und 2 liegt, wobei der tatsächliche Wert faszinierenderweise

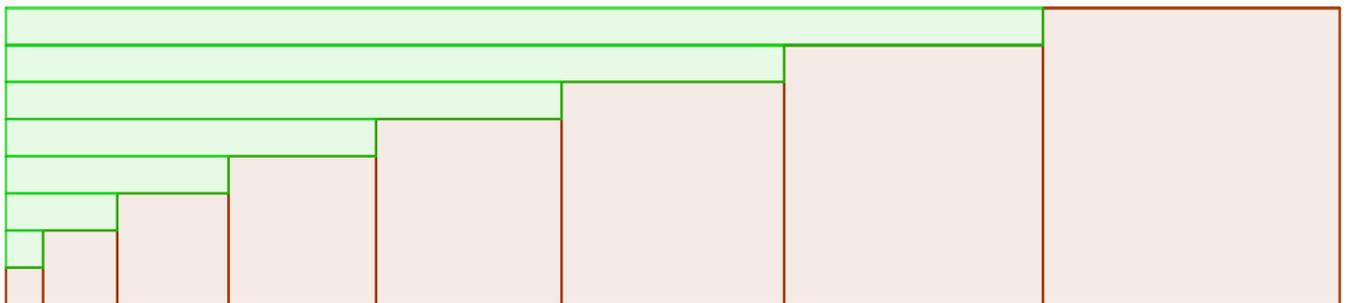
$\frac{\pi^2}{6}$ beträgt (und sich **Letzteres** sogar im Rahmen des Wahlpflichtfachs zeigen lässt).

• ... demnächst in meinem Olympiadekurs (Teil 2):

In der unteren Figur ist die Summe der ersten n Quadratzahlen für $n=8$ grafisch in weinrot unterlegt, was zusammen mit den schmalen (Wie schmal?) grün unterlegten Streifen ein Rechteck ergibt. Leite unter Anwendung der GAUSSschen Formel

$$s = \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ sowie der Figur eine entsprechende Summenformel für}$$

$$s_n := 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 \text{ her!}$$



Bemerkung für später (WAHLPFLICHTFACH!): Für obige Formel gibt es eine Vielzahl an weiteren schönen Herleitungen (Hinweis im Zuge dieses ARGE-Vortrags: Kap. 3.4!), welche sowohl in Erarbeitung in der Gruppe als auch im Rahmen von Referaten behandelt werden kann.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 2 |
| 2 | Teaser für den WPG-M | 3 |
| 2.1 | The Big Bang Theory: Animationen von Kegelschnitten | 3 |
| 2.2 | Paradoxes zu divergenten Reihen | 8 |
| 2.3 | Die allseits(?) bekannte FIBONACCI-Folge | 8 |
| 2.4 | Zahlenmuster | 9 |
| 2.4.1 | Motivation zur Rekursion bzw. Iteration | 9 |
| 2.4.2 | Ein Muster auf verschiedenen Niveaustufen | 10 |
| 2.5 | Zahlentheorie: Existenz unendlich vieler Primzahlen | 12 |
| 2.6 | Elementar zur/m Parabolantenne/Parabolscheinwerfer | 13 |
| 3 | Themenvorschläge für den WPG-M | 17 |
| 3.1 | Der Fundamentalsatz der Axonometrie von GAUSS | 18 |
| 3.2 | Potenzfunktion, Exponentialfunktion oder keines von beiden? | 24 |
| 3.3 | Schmankerln aus der Linearen Algebra: Matrizen und lineare Abbildungen | 27 |
| 3.3.1 | Spuren, Determinanten, Satz von CAYLEY-HAMILTON | 27 |
| 3.3.2 | Matrizeninversion | 28 |
| 3.4 | Summenformeln, Teil 3 | 31 |
| 3.5 | Ein Beweis der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung | 32 |
| 3.6 | Erweiterungen des Lehrsatzes von PYTHAGORAS | 32 |
| 3.7 | Mathematik und Physik: Die Kettenlinie | 33 |
| 3.8 | Weitere Literaturempfehlungen für den WPG-M | 33 |
| 4 | Anhang: Wienweiter schulübergreifender WPG-M bei Dr. Resel (2017/18 bzw. 2018/19 am Amerlinggymnasium bzw. am Sigmund Freud Gymnasium) | 35 |

In guter Mathematik gibt es ein großes Maß an Unerwartetem gepaart mit Unvermeidlichkeit und Wirtschaftlichkeit.
Godfrey Harold HARDY

1 Einleitung

Die beiden geschilderten Szenarien auf Seite 0 (quasi in der Propädeutik) illustrieren das obige Zitat des großen Zahlentheoretikers G. H. HARDY (1877-1947) - der ja bekanntlich auch dafür verantwortlich war, den genialen indischen Mathematiker und Autodidakten Srinivasa RAMANUJAN (1887-1920)¹ nach England geholt zu haben - sehr schön².

Nicht nur, aber auch um mathematisch besonders schöne Sachverhalte, welche Schüler³ zum Besuch des Wahlpflichtgegenstands Mathematik (i.F. kurz: WPG-M) motivieren sollen, wird es in diesem Vortrag gehen.

Dass der M-WPG am eigenen Schulstandort nicht ohne weiters, ergo: ohne Werbung, zustandekommt, ist ein Tatsachensubstrat, welches im Zuge dieses meines Vortrags nicht weiter bezüglich seiner Genese hinterfragt werden wird (wiewohl der Parallelvortrag von Kollegen Gotthart da womöglich die eine oder andere Möglichkeit bieten mag).

Stattdessen sollen sowohl Möglichkeiten der wirksamen Werbung (\rightarrow Kapitel 2: **Teaser für den WPG-M**) als auch der (freilich nur) exemplarischen Gestaltung (\rightarrow Kapitel 3: **Themenvorschläge für den WPG-M**) des M-WPGs Thema dieses ARGE-Nachmittags sein.

In einem Anhang (Kapitel 4) wird schließlich noch auf ein vom Stadtschulrat für Wien unterstütztes Angebot des Autors der vorliegenden Zeilen hingewiesen, wofür an dieser Stelle Herrn Landesschulinspektor Hofrat Mag. Helmut Zeiler herzlich gedankt sei und auf welches im Sinne interessierter Schüler von Kollegen, welche nicht auf die Eröffnungszahl für den schulinternen WPG-M kommen, jedenfalls hingewiesen werden sollte, damit ebenjene Schüler zumindest via Kontaktaufnahme extern am vom Autor der vorliegenden Zeilen geleiteten (bereits 2017/18 und 2018/19 erfolgreich gelaufenen bzw. aktuell laufenden) schulübergreifenden WPG-M teilnehmen können.

Wien, im November 2018.

Dr. Robert Resel, e. h.

¹Es sei in diesem Zusammenhang ausdrücklich auf die äußerst empfehlenswerte zugehörige Biografie [12] hingewiesen, welche vom berühmten deutschen Mathematiker Albrecht BEUTELSPACHER - Gründer des 2002 eröffneten Mathematikums in Gießen - ins Deutsche übersetzt wurde.

²Apropos Ramanujan: Es sei an dieser Stelle mit [9] ganz besonders auf einen Mathe-Brief der ÖMG ("Österreichische Mathematische Gesellschaft") hingewiesen, wo in elementarer Weise Ramanujans "Entdeckung"

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12}$$

motiviert wird (Ein Beweis vom höheren Standpunkt - nämlich einer analytischen Fortsetzung der RIEMANNschen Zetafunktion - erfordert stärkere Mittel und kann etwa in [10] nachvollzogen werden bzw. alternativ via THETA-Funktionen auch in [6].).

³Personenbezogene Umschreibungen umfassen in weiterer Folge stets beide Geschlechter, um eine bessere Lesbarkeit zu erlangen (generisches Maskulinum).

2 Teaser für den WPG-M

Die folgenden "Attraktionen" (welche im Gegensatz zu den beiden Phänomenen auf Seite 0 nicht über den Olympiadekurs ventiliert zu werden brauchen) sollen ohne Anbiederung an die Schüler Möglichkeiten aufzeigen, letztere durch Animationen bzw. Demonstrationen ein wenig von der (wie wir ja wissen: unberechtigten!) Trockenheit der Mathematik zu befreien.

2.1 The Big Bang Theory: Animationen von Kegelschnitten

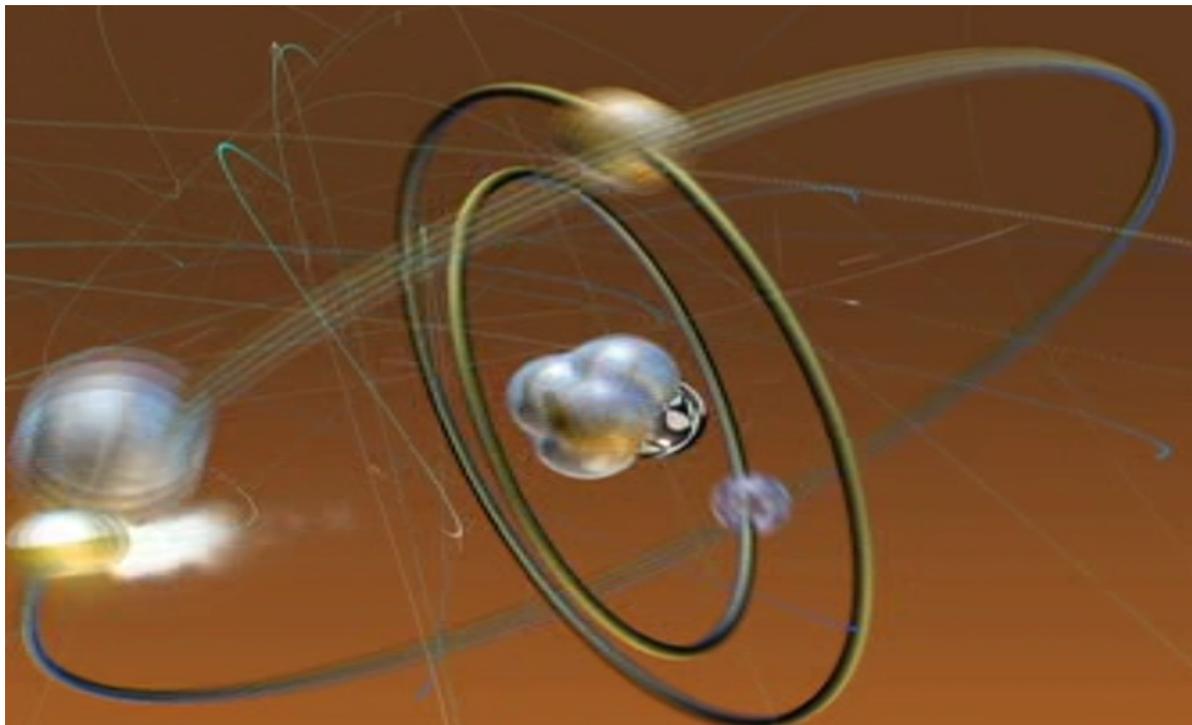
Im unteren Screenshot ist einer der zahlreichen Überblender zwischen zwei Szenen der populären US-amerikanischen Sitcom "The Big Bang Theory" zu sehen, welcher den Autor der vorliegenden Zeilen gekoppelt mit einer zusätzlichen Inspiration durch seinen Kollegen Mag. Reza EFTEKHAR dazu veranlasste, im demnächst erscheinenden Werk [21] einen Abschnitt über Kinematik und Kegelschnitte zu verfassen, welcher nun auf den nächsten vier Seiten als preprint abgedruckt wurde und zu dem außerdem ein auf der Homepage des Autors verlinktes Video vorliegt (<http://matheprof.at/>, Tageseintrag vom 25.1.2016), das zugrundeliegende GeoGebra-File kann auf Anfrage (via robert.resel@chello.at) gerne vom Autor zugesendet werden.

Bevor wir uns nun der hinter dem erwähnten Video steckenden Mathematik widmen, sei an dieser Stelle passend zu [21] erwähnt, dass darin auch ein durch ein Dialog-Zitat zwischen den Charakteren Sheldon Cooper (dargestellt von Jim PARSONS, geb. 1973) und Howard Wolowitz (verkörpert von Simon HELBERG, geb. 1980) motivierter Analysis-Abschnitt zu finden sein wird, welcher sich mit dem mathematischen Hintergrund einer Frage beschäftigt, die der in der zweiten Folge von Staffel 8 (erstmalig ausgestrahlt am 22.9.2014 bei CBS bzw. im deutschen Sprachraum synchronisiert am 12.1.2015 auf PRO7) mit dem (Original-)Titel ("The Junior Professor Solution") "Dunkle Materie" gerade erst zum Juniorprofessor beförderte Sheldon seinem (einzigen!) Studenten, dem Ingenieur und Doktoratsanwärter Howard (a.a.O. in der synchronisierten Fassung, 9'34" – 9'38") stellt, nämlich:

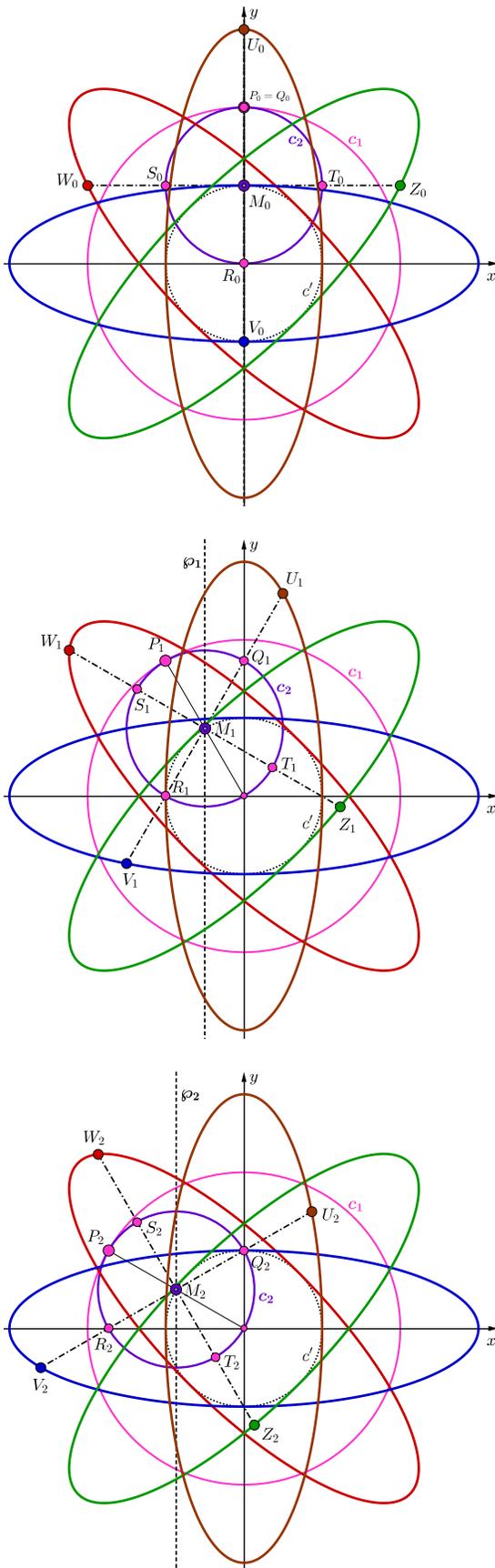
"Weisst du, wie du x^2 mal e^{-x} integrierst ohne [in einer Tabelle ("Integraltafel"), Anm. d. Autors] nachzusehen?"

Dies erwidert der Herausgeforderte wie folgt (ebenso a.a.O. in der synchronisierten Fassung, 9'38" – 9'41"):

"Mit dem Feynman-Trick. Ich differenziere unter dem Integralzeichen."



Im Zusammenhang mit Kegelschnitten unternehmen wir zunächst einen Ausflug in die



Kinematik und beobachten die folgende Bewegung, welche in der nachstehenden geometrischen Bildergeschichte illustriert ist, wobei der Werte $L \overset{e}{\circ}$ ser vor dem Weiterlesen selbst versuchen möge, das Konstruktionsprinzip für die Bahnkurven der Punkte U_t, V_t, W_t und Z_t aus der Bilderreihe herauszufinden:

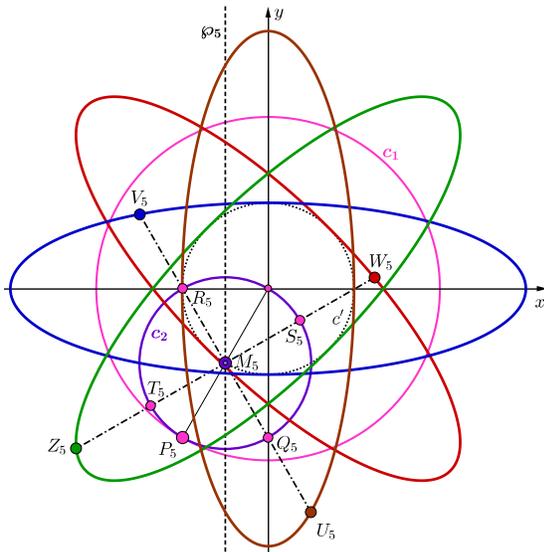
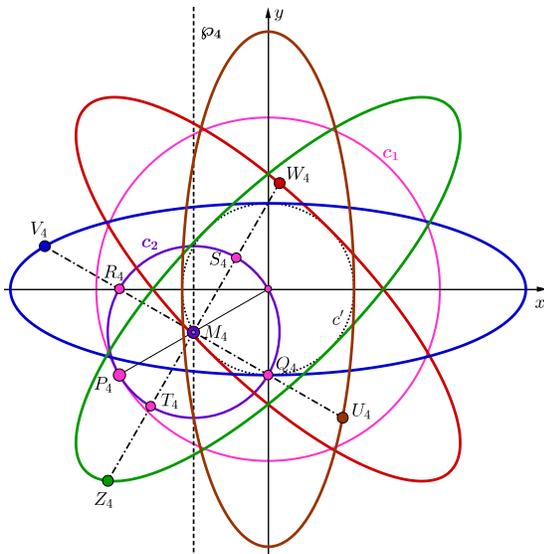
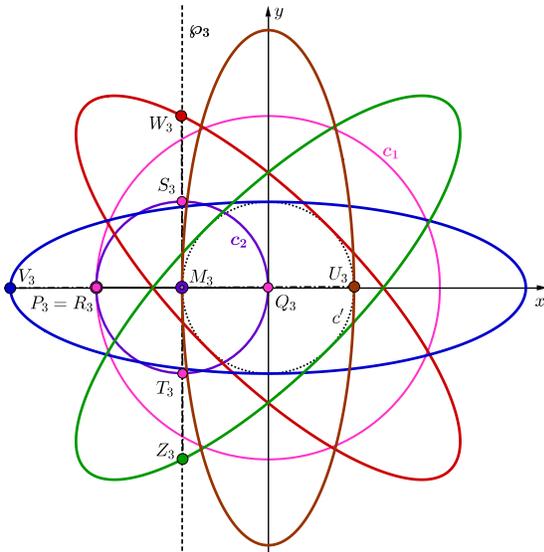
Wir gehen von den im Koordinatenursprung zentrierten Kreislinien c' und c_1 mit den Radien b und $2b$ aus, lassen nun die in $M_0(0|b)$ zentrierte Kreislinie c_2 mit dem Radius b im mathematisch positiven Drehsinn (also gegen den Uhrzeigersinn) innen auf c_1 abrollen, wobei sich M_0 auf c' bewegt und spiegeln den jeweiligen Berührungspunkt P_t von c_2 und c_1 an der Parallele φ_t zur y -Achse durch den jeweiligen Mittelpunkt M_t von c_2 , was den auf c_2 liegenden Punkt Q_t liefert. Ergänzen wir jetzt Q_t noch durch drei weitere Punkte R_t, S_t und T_t derart, dass ein Quadrat $\square Q_t S_t R_t T_t$ mit dem Mittelpunkt M_t entsteht und strecken selbiges mit dem Faktor 2 an M_t , so ergeben sich die Punkte U_t, V_t, W_t und Z_t , deren Bahnkurven wir nun studieren wollen (wobei die Abbildungsserie insgesamt sieben Momentanzustände dokumentiert).

Bezeichnen wir mit t den im Bogenmaß gemessenen und ebenso positiv orientierten Winkel zwischen der y -Achse und dem Radiusvektor OP_t - wobei O wie üblich der Koordinatenursprung ist - , so erhalten wir zunächst (sozusagen als adaptierte Polarkoordinaten) $M_t(-b \sin t | b \cos t)$ und daraus sowohl $P_t((-2b) \sin t | 2b \cos t)$ als auch bereits $Q_t(0 | 2b \cos t)$ und $R_t((-2b) \sin t | 0)$.

U_t und V_t resultieren aus den entsprechenden Spiegelungen, was

$$U_t = Q_t + \overrightarrow{M_t Q_t} = Q_t + Q_t - M_t = 2Q_t - M_t,$$

ergo $\boxed{U_t(b \sin t | 3b \cos t)}$ sowie $V_t = M_t + \overrightarrow{U_t M_t} = 2M_t - U_t =$, also $\boxed{V_t((-3b) \sin t | (-b) \cos t)}$



liefert.

Für W_t und Z_t resultiert daraus (ohne Notwendigkeit des Umwegs über die separate Koordinatisierung von S_t und T_t) durch Kippen ...

$$\overrightarrow{M_t U_t} = \begin{pmatrix} 2b \sin t \\ 2b \cos t \end{pmatrix} \perp \underbrace{\begin{pmatrix} 2b \cos t \\ (-2b) \sin t \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{M_t Z_t}}$$

$$\overrightarrow{M_t U_t} = \begin{pmatrix} 2b \sin t \\ 2b \cos t \end{pmatrix} \perp \underbrace{\begin{pmatrix} (-2b) \cos t \\ 2b \sin t \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{M_t W_t}}$$

... somit wegen

$$Z_t = M_t + \overrightarrow{M_t Z_t} \quad \text{sowie} \quad W_t = M_t + \overrightarrow{M_t W_t}$$

schließlich

$$\boxed{Z_t(b(2 \cos t - \sin t) | b(\cos t - 2 \sin t))}$$

sowie

$$\boxed{W_t((-b)(2 \cos t + \sin t) | b(\cos t + 2 \sin t))}.$$

Durch Anwendung von

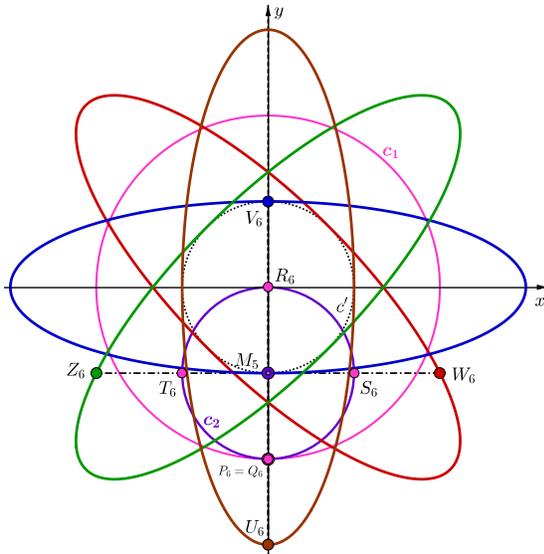
$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad (*)$$

ergibt sich dadurch für jeden Parameterwert t , dass die Koordinaten von U_t bzw. V_t die Gleichung

$$9x^2 + y^2 = 9b^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + 9y^2 = 9b^2$$

erfüllen, womit U_t bzw. V_t also in jeder Lage auf einer Ellipse in zweiter bzw. erster Hauptlage mit der Hauptachsenlänge $3b$ und der Nebenachsenlänge b zu liegen kommt, was ja die Abbildungsserie bereits suggeriert.

Bezüglich $\boxed{Z_t}$ konstatieren wir, dass $\boxed{\text{dessen Koordinaten}}$ die Gleichungen



$$2x - y = 3b \cos t \quad \text{sowie} \quad x - 2y = 3b \sin t$$

und somit wieder aufgrund von (*) schließlich die Gleichung

$$(2x - y)^2 + (x - 2y)^2 = 9b^2$$

bzw. vereinfacht

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9b^2 = 0$$

erfüllen.

Analog möge der Werte $L \begin{smallmatrix} e \\ \ddot{o} \end{smallmatrix}$ ser zur Übung zeigen, dass die Koordinaten von W_t für je-

den Parameterwert t die Gleichung

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9b^2 = 0$$

erfüllen, womit sich aufgrund unserer in [17], S. 203ff sowie S. 265ff (alternativ auch [20], S. 239f sowie S. 237f) angestellten Überlegungen wegen

$$8^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 < 0 \quad \wedge \quad \det \begin{pmatrix} 5 & \pm 4 & 0 \\ \pm 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -9b^2 \end{pmatrix} = -81b^2 \neq 0$$

also ergibt, dass auch W_t und Z_t auf Ellipsen liegen, welche aufgrund der (Schief-)Symmetrie in x und y ferner zu den beiden Medianen symmetrisch verlaufen.

Da sich aufgrund der Medianensymmetrie ferner die Haupt- und Nebenscheitel von W_t bzw. Z_t via

$$H_W \left(\mp \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot b \mid \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot b \right) \quad \text{und} \quad N_W \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b \mid \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b \right)$$

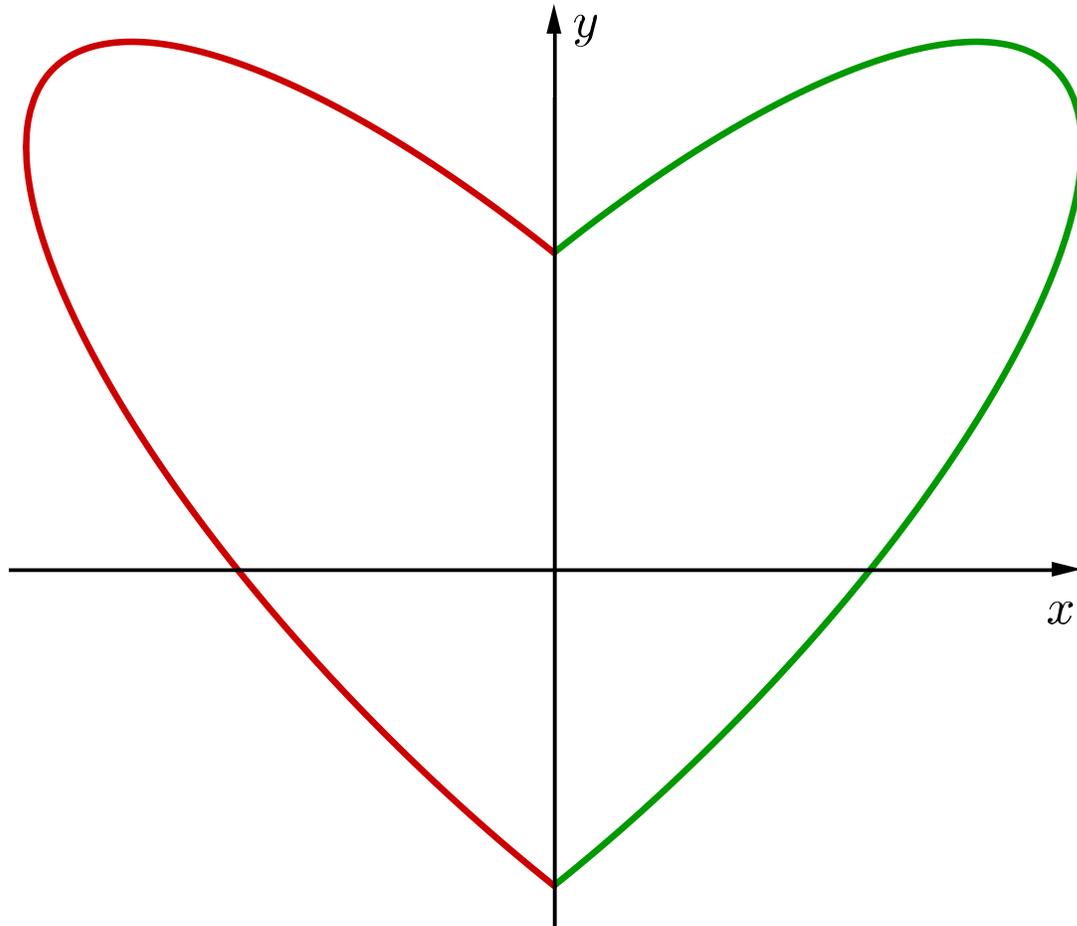
bzw.

$$H_Z \left(\pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot b \mid \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot b \right) \quad \text{und} \quad N_Z \left(\mp \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b \mid \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b \right)$$

ergeben (was der Werte $L \begin{smallmatrix} e \\ \ddot{o} \end{smallmatrix}$ ser bestätigen möge), sind die beiden schräg liegenden Ellipsen somit sowohl untereinander als auch zu den durch U_t und V_t generierten Hauptlagenellipsen kongruent und können (wie auch die beiden Hauptlagenellipsen) durch eine Vierteldrehung um den Koordinatenursprung jeweils ineinander übergeführt werden.⁴

⁴Durch eine geeignete Achteldrehung kann überdies jede der vier Ellipsen in zwei der verbleibenden gedreht werden.

ÜBUNGS-AUFGABE FÜR DEN WERTEN L $\overset{E}{\underset{O}{\circ}}$ SER: Man beweise, dass der im zweiten und dritten Quadranten verlaufende Teil einer der beiden schräg liegenden Ellipsen sowie der im ersten und vierten Quadranten verlaufende Teil der anderen Schrägellipse eine Herzform begrenzen (Eine der beiden Möglichkeiten ist unten abgebildet.), deren Flächeninhalt



mit dem von jeder der vier Ellipsen begrenzten Bereich übereinstimmt, und zwar sowohl mit reinen Symmetrieargumenten als auch mit Hilfe der nach x aufgelösten Lösungszweige

$$-y_{1+} = \frac{4x \pm 3\sqrt{5b^2 - x^2}}{5} \quad \text{und} \quad -y_{2+} = \frac{-4x \pm 3\sqrt{5b^2 - x^2}}{5}.$$

Überdies zeige man, dass die Schnittwinkel in den beiden Herzspitzen nicht von b abhängen, ferner deckungsgleich sind und im Bogenmaß wie folgt in Reihenform angeschrieben werden können ...

$$\varphi = 4 \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots \right) - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4}{5} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^5 - \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^7 \pm \dots \right] \right\}$$

... und begründe, warum die folgende Umordnung unzulässig ist:

$$\varphi = 4 \cdot \left\{ \frac{3}{5} - \frac{1}{3} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^3 \right] + \frac{1}{5} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^5 \right] - \frac{1}{7} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5} \right)^7 \right] \pm \dots \right\}$$

2.2 Paradoxes zu divergenten Reihen

Ein "Beweis" der Summenformel aus der zweite Fußnote der Einleitung wird zweifelsohne auch dem Hardy-Zitat aus letzterer gerecht, wobei diesbezüglich wiederum auf den Mathe-Brief [9] verwiesen wird. Dass hier exzessiv(st!) Unerlaubtes puncto Hantieren mit unendlichen Reihen geradezu zelebriert wird, soll nicht heißen, dass hinter dieser Summenformel nichts Wahres steckt. Nota bene: im Sinne einer analytischen Fortsetzung⁵ der dahintersteckenden via

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

zunächst(!) für $x > 1$ definierten RIEMANNSchen Zetafunktion ist diese Summenformel sogar richtig (Zudem ist dadurch eine interessante Querverbindung zum heiligen Gral der Mathematik, nämlich der RIEMANNSchen Vermutung, gegeben.)

2.3 Die allseits(?) bekannte FIBONACCI-Folge

Das bewusst gesetzte Fragezeichen im Abschnittstitel suggeriert, dass die Anzahl jener Schüler, welche diese spezielle LUCAS-Folge (Mehr zu diesen allgemeineren Folgen findet man etwa in [23].) kannten, nach Erfahrung des Autors der vorliegenden Zeilen im Laufe der letzten Jahre deutlich abgenommen hat. Nichtsdestotrotz ist das hinter dem linearen Anfangswertproblem zweiter Ordnung

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (1)$$

steckende rekursive Bildungsgesetz durch Schüler leicht zu durchschauen, wodurch rasch weitere FIBONACCI-Zahlen erzeugt werden können.

Um die Schüler (wenn man sie am richtigen Fuß erwischt bzw. ihren Nerv trifft, was ja - wie wir wissen - nicht immer so einfach ist) herauszufordern, hat es sich beim Autor der vorliegenden Zeilen bewährt, einen Schüler zu instruieren, möglichst viele weitere Folgenglieder zu berechnen, während mit der Restklasse (freilich nicht im algebraischen Sinn!) motiviert durch den (zugegebenermaßen vom Himmel fallenden) Potenzansatz

$$f_n = a^n$$

auf (eingesetzt in (1), unter Ignorieren(!) der Anfangsbedingungen)

$$a^{n+2} = a^{n+1} + a^n$$

⇕ (wegen $a > 0$)

$$a^2 = a + 1 \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow {}_1a_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

und somit

$$f_n = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (2)$$

⁵Querbezug zur Mathematikdidaktik: → erweiterndes Umdefinieren!

geschlossen wird, was sich etwa mittels GeoGebra rasch als falsch herausstellt, aber durch Vergleich der Proportionen der richtigen Werte zu den via (2) erhaltenen Werten für f_n rasch ein Einpendeln auf $\sqrt{5}$ zu beobachten ist (freilich nur empirisch).

An dieser Stelle ist **mathematisch betrachtet** freilich gleich mindestens(!) zweierlei zu beanstanden:

- 1) Was ist mit der (negativen) Lösung a_2 ?
- 2) Was soll die falsche explizite Darstellung (2)?

Doch gerade darin liegt **didaktisch betrachtet** der Reiz und somit die Aktivierung der (wenn auch freilich nicht aller) Schüler, denn:

- 1') Schülern leuchtet die gemeinsam leicht erarbeitbare Erkenntnis rasch ein, dass die n -ten Potenzen von a_2 wegen $|a_2| < 1$ mit zunehmendem $n \in \mathbb{N}$ kaum mehr einen Beitrag leisten und deshalb a_2 (wenn man - zunächst(!) - keinen gesteigerten Wert auf Exaktheit legt) ausgeblendet werden kann.
- 2') Sie zeigt freilich die Grenzen mathematischer Modelle auf, was sich aber durch ein Klarmachen des Superpositionsprinzips, welches ja für linear-homogene Anfangswertprobleme sowohl im vorliegenden diskreten Fall als auch im stetigen Fall bei Differentialgleichungen Gültigkeit besitzt, durch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{5}}$ reparieren lässt und auf die modifizierte Darstellung

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^n \quad (2')$$

führt, welche nun wiederum etwa unter Verwendung von GeoGebra eindrucksvoll demonstriert, wie genau sie die FIBONACCI-Folge annähert⁶.

2.4 Zahlenmuster

Bei den folgenden beiden Abschnitten handelt es sich um preprints aus dem bereits erwähnten demnächst erscheinenden Werk [21] des Autors der vorliegenden Zeilen:

2.4.1 Motivation zur Rekursion bzw. Iteration

Elementare zahlentheoretische Phänomene wie jenes in der unteren Abbildung beinhalten enormes Motivationspotential für junge Menschen, wobei das Beispiel in der Figur auf unterschiedlichen Niveaustufen abgehandelt werden kann, beginnend mit einer einfachen Multiplikationsübung für Zehn- bis Zwölfjährige ohne umfassende Kenntnisse aus

⁶Ab $n = 10$ wird bei Standardeinstellungen von GeoGebra auf- bzw. abrundungsbedingt der tatsächliche Wert vorgetäuscht, was eine gute Gelegenheit bietet, Schüler auf numerische Aspekte hinzuweisen bzw. für besonders Interessierte mit den Logarithmen auf "kommende Attraktionen" hinzuweisen, mittels derer man dann feststellen kann, ob eine gegebene natürliche Zahl zur Folge $\langle f_n \rangle$ gehört oder nicht. Auch dazu wird es in [21] einen eigenen Abschnitt geben.

elementarer Algebra (wobei man in diesem Fall die rechten Seiten die Schüler selbst entdecken lassen wird, was ja vor allem in diesem Alter ein aufregendes kognitives Erlebnis sein kann) bis hin zur rekursiven Beschreibung der Vorgänge auf den beiden Seiten, wobei $\langle x_n \rangle$ bzw. $\langle y_n \rangle$ die Zahlenfolge auf der linken bzw. rechten Seite bezeichnet, was zu folgenden Beschreibungen führt:

$$\begin{aligned}
 & 1 \cdot 8 + 1 = 9 \\
 & 1 \ 2 \cdot 8 + 2 = 9 \ 8 \\
 & 1 \ 2 \ 3 \cdot 8 + 3 = 9 \ 8 \ 7 \\
 & 1 \ 2 \ 3 \ 4 \cdot 8 + 4 = 9 \ 8 \ 7 \ 6 \\
 & 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \cdot 8 + 5 = 9 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5 \\
 & 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \cdot 8 + 6 = 9 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \\
 & 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \cdot 8 + 7 = 9 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \\
 & 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \cdot 8 + 8 = 9 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \\
 & 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \cdot 8 + 9 = 9 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x_n - n}{8} \cdot 10 + n + 1\right) \cdot 8 + n + 1 = x_{n+1}$$

bzw.

$$10x_n - 10n + 8n + 8 + n + 1 = x_{n+1}$$

resp.

$$\boxed{10x_n + 9 - n = x_{n+1}}$$

sowie (aufgrund von $8 = 9 - 1$, $7 = 9 - 2$ usw.)

$$\boxed{10y_n + 9 - n = y_{n+1}},$$

was wegen $x_1 = y_1 = 9$ einerseits den Mechanismus hinter diesem Muster erklärt und jungen Menschen andererseits bereits in der siebenten Schulstufe ein erstes (und hoffentlich noch häufigeres) Erleben der Wirkungsstärke der fundamentalen Idee sowohl der Iteration (vgl. z.B. [11], S. 199ff) als auch der Rekursion (siehe ebda., S. 215 ff) ermöglicht.

2.4.2 Ein Muster auf verschiedenen Niveaustufen

Betrachten wir die unmittelbar unten abgebildeten Zahlenmuster, so stellen wir zunächst

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & 2 & 2 \\
 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & 2 & 2 & \\
 1 & & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\
 & & 3 & & 4 & 4 & \\
 & & & & 5 & & \\
 & & & & & & 2 & 2 \\
 & & & & & 3 & 3 & 3 \\
 & & & & & 4 & 4 & 4 & 4 \\
 & & & & & 5 & 5 & 5 \\
 & & & & & 6 & 6 & \\
 & & & & & & 7
 \end{array}$$

fest, dass die Summen der jeweils enthaltenen Zahlen der Reihe nach 1, 8, 27 und 64, ergo 1^3 , 2^3 , 3^3 und 4^3 ergeben. Dies veranlasst uns zur Vermutung, dass die Summe der Zahlen im Muster aus der nächsten Abbildung (in welcher in der breitesten n -ten Zeile die natürliche Zahl n eben gerade genau n -mal vorkommt) auf n^3 führt, was wir auf

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 2 & & 2 & & \\
 & & & 3 & & 3 & & 3 & \\
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & \dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 n & n & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n \\
 & \dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & & & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & & & & 2n-3 & & 2n-3 & & 2n-3 \\
 & & & & 2n-2 & & 2n-2 & & \\
 & & & & 2n-1 & & & &
 \end{array}$$

unterschiedlichen Niveaustufen bewiesen werden, nundenn:

- **BEWEIS 1:** Bilden wir die entsprechende Summe \mathfrak{S}_n zeilenweise, so führt dies auf

$$\mathfrak{S}_n = \underbrace{1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + (n-2) \cdot (n-2) + (n-1) \cdot (n-1) + n \cdot n}_{= \sum_{k=1}^n k^2 =: s_n} + t_n$$

mit

$$t_n := (n-1)(n+1) + (n-2)(n+2) + \dots + 3(2n-3) + 2(2n-2) + 1(2n-1)$$

bzw.

$$t_n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n+k) = \sum_{k=1}^n (n-k)(n+k) = \sum_{k=1}^n (n^2 - k^2) = n^3 - s_n,$$

was schließlich

$$\mathfrak{S}_n = s_n + n^3 - s_n = n^3$$

impliziert, \square .

- **BEWEIS 2:** Bilden wir die entsprechende Summe unter zusätzlicher Beachtung der symmetrischen Anordnung bezüglich der längsten Zeile wiederum zeilenweise, gelangen wir via

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{S}_n &= (1+2n-1) + 2 \cdot (2+2n-2) + 3 \cdot (3+2n-3) + \dots + (n-1) \cdot (n-1+n+1) + n^2 = \\
 &= 2n + 2 \cdot 2n + 3 \cdot 2n + \dots + (n-1) \cdot 2n + n^2 = 2n \cdot (1+2+3+\dots+n-1) + n^2
 \end{aligned}$$

unter zusätzlicher Verwendung der (adaptierten) GAUSSschen Formel

$$1+2+3+\dots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{zu} \quad \mathfrak{S}_n = n^2(n-1) + n^2 = n^3 - n^2 + n^2 = n^3, \quad \square.$$

Zwei weitere Beweise (zum Teil auch als Übungsaufgabe/n) sind dann im fertigen Werk [21] zu finden.

2.5 Zahlentheorie: Existenz unendlich vieler Primzahlen

Nach dem großen deutschen Mathematiker Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) war ja die Mathematik die Königin der Naturwissenschaften und die Zahlentheorie die Königin der Mathematik. Den zweiten Teil mag jeder Mathematik(lehr)er für sich bewerten. Außer Frage steht aber wohl die Eleganz und Raffinesse des klassischen auf Euklid zurückgehenden Beweises dafür, **dass es unendlich viele Primzahlen gibt**, was etwa in [22], S. 3 bewiesen wird und hier nicht weiter erläutert werden soll, da es sich bei diesem Beweis um ein klassisches Paradebeispiel eines indirekten Beweises handelt (ähnlich berühmt wie einer der Beweise der Irrationalität von $\sqrt{2}$ oder etwas ausgefeilter: $e \notin \mathbb{Q}$), welcher in jedem Mathematikstudium (egal, ob Lehramts- oder Diplomzweig) vorkommt.

Ergänzend zu diesem klassischen Euklid-Beweis werden in [22], S. 4ff weitere reizvolle Beweise für **diesen zahlentheoretischen Satz** präsentiert, worunter sich sowohl bekannte (wie jener von EULER über ein Produkt unendlicher Summen) als auch weniger bekannte (wie ein Beweis von KUMMER, welcher eine elegante Variation des Euklid-Beweises darstellt) befinden, wobei aus letzterer Gruppe folgender (auf GOLDBACH zurückgehende) Beweis (welcher die FERMAT-Zahlen benützt) durchaus für Interesse bei Schülern (wenn man das Prinzip der vollständigen Induktion⁷ vorher an einem einfachen Beispiel erklärt) sorgen kann (und abgesehen von der hier aufgrund des Adressatenkreises erhöhten Detailliertheit [22], S. 6f entnommen wurde):

$$\langle F_n \rangle = \langle 2^{2^n} + 1 \rangle, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \langle F_n \rangle = \langle 3, 5, 17, 257, 65537, \dots \rangle, F_0 F_1 + 2 = F_2, F_0 F_1 F_2 + 2 = F_3$$

Es steht daher die Vermutung $F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} = F_n - 2$ im Raum. Ausgehend von

$$F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} = F_n - 2 \quad \boxed{\text{Induktionsvoraussetzung!}}$$

ergibt sich nach Multiplikation mit F_n $\boxed{\text{Induktionsschritt!}}$ also

$$F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} F_n = F_n^2 - 2F_n = F_n (F_n - 2),$$

womit wegen

$$F_n (F_n - 2) = (2^{2^n} + 1) (2^{2^n} - 1) = (2^{2^n})^2 - 1 = 2^{2^{n \cdot 2}} - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2$$

alles bewiesen ist.

Nun folgt aus

$$F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1} = F_n - 2,$$

dass F_m für $m < n$ ein Teiler von $F_n - 2$ ist. Wäre p ein gemeinsamer Primteiler von F_m und F_n , so müsste er also sowohl $F_0 F_1 F_2 \dots F_{n-1}$ (weil darunter ja auch F_m), d.h. $F_n - 2$ als auch F_n und somit auch deren Differenz, ergo 2, teilen, was aber nur für $p = 2$ funktioniert. Da nun F_n aber $\forall n \in \mathbb{N}$ ungerade ist, muss die Annahme $\text{ggT}(F_m, F_n) \neq 1$ daher falsch sein, woraus folgt, dass alle FERMAT-Zahlen paarweise teilerfremd sind.

Aus der Tatsache, dass wir damit eine unendliche Zahlenfolge konstruiert haben, deren Glieder zueinander paarweise teilerfremd (oder synonym: relativ prim) sind, ergibt sich die Existenz unendlich vieler Primzahlen wie folgt:

⁷Auch dieses Thema wird in [21] behandelt.

Es sei $m \neq n$, ferner p_n ein Teiler von F_n sowie p_m ein Teiler von F_m . Dann gilt wegen $\text{ggT}(F_m, F_n) = 1$ sicher $p_n \neq p_m$, womit also die unendliche Anzahl von Gliedern der Zahlenfolge $\langle F_n \rangle$ auch die unendliche Anzahl der Glieder der Folge der Primzahlen nach sich zieht, \square .

Beim folgenden Abschnitt handelt es sich um ein preprint aus einem der Folgebände von [21]:

2.6 Elementar zur/m Parabolantenne/Parabolscheinwerfer

In Österreich gibt es in der Sekundarstufe 1 auch 2017 nach wie vor ein Unterrichtsfach namens "Geometrisches Zeichnen" (gebräuchliche Abkürzung sowohl in Wort als auch Schrift: "GZ"), welches je nach Schwerpunktsetzung in den einzelnen Schulen in der siebenten und achten Schulstufe zwei bis vier Wochenstunden unterrichtet wird (wiederum durch das jeweilige Schulprofil bedingt ggf. unter einer schulautonom festgelegten alternativen Bezeichnung wie "Computergestützte Geometrie", "GMC⁸") o.ä., sofern Latein oder Französisch als zweite lebende Fremdsprache nicht schon ab der siebten Schulstufe zusätzlich gewählt wurde (Diesfalls wird der Werkunterricht nicht fortgeführt und auch "GZ" entfällt.).

Im Zuge dieses Fachs (bei dem sich fächerübergreifendes Unterrichten mit der Mathematik geradezu anbietet) hat der Autor der vorliegenden Zeilen unter Verwendung des Computers (ein konstituierendes Element am vorliegenden Schulstandort, entsprechend findet der Unterricht auch in einem der EDV-Säle mit einem Active board statt), in diesem Fall konkret: der dynamischen Geometriesoftware GeoGebra, nach Absprache mit der Mathematikkollegin lineare und quadratische Funktionen (letztere aber ziemlich voraussetzungsarm) mit dem Geometrieunterricht verzahnt, um die folgende (etwas hochgestochen formuliert) Theorie hinter dem Prinzip sowohl der Parabolantenne⁹ als auch des Parabolscheinwerfers gemeinsam mit den Schülern zu entwickeln. Bevor wir nun in medias res gehen, sei an dieser Stelle noch bemerkt, dass die lange Vorrede deshalb hier platziert wurde, weil die sonst übliche Behandlung dieser Thematik entweder komplett elementargeometrisch oder mit Mitteln der Vektorrechnung erfolgt, wodurch die hier im Folgenden präsentierte Alternative eine wirklich passende Gelegenheit bietet, dieses Reflexionsprinzip im Geometrieunterricht (oder auch - was aber zeitbedingt eher schwierig sein wird - im Mathematikunterricht) der achten Schulstufe nicht nur zum Thema zu machen, sondern sogar genauer hinter die Kulissen zu blicken (ergo die damit verbundene Eigenschaft der Parabel(tangente) wirklich zu beweisen).¹⁰

⁸als Akronym für "Geometrie-Mathematik-Computer", weitere Permutationen wie "CGM" sind ebenso gebräuchlich wie etwa schlicht und einfach "Geometrie", an manchen Schulen mit je zwei Wochenstunden sowohl in der siebenten als auch achten Schulstufe sogar als autonomer Schularbeitsgegenstand installiert

⁹Selbst in Zeiten von Netflix, Amazon prime und Konsorten ist es m.E. nicht belanglos, Jugendlichen anhand der "SAT-Schüssel" etwas über die Verzahnung von Mathematik und Technik beizubringen.

¹⁰Zusätzliche didaktisch-methodische Bemerkungen werden abgesehen von den Bemerkungen am Ende des Abschnitts in weiterer Folge kaum mehr (und selbst dann nur in Klammern oder Fußnoten) eingestreut, da es in diesem Abschnitt zwar schon auch um Unterrichtsrelevanz geht (um die sich bekanntlich immer streiten lässt, und das nicht nur in der Stoffdidaktik), aber eben nicht primär. Dass man im Unterricht etwa die gleichen Abstände jedes Parabelpunkts P zum Brennpunkt F und zur Leitgeraden ℓ auch

Gemäß der letzten Fußnote studieren wir nun (in der dynamischen Variante mit einem Schieberegler für den Parameter a in der Parabelgleichung) die durch die Schargleichung

$$\text{par: } y = ax^2, \quad a > 0 \quad (*)$$

definierte Parabelschar und betrachten überdies einerseits mit $P(w|aw^2)$ einen beliebigen Punkt auf par (vgl. folgende Abbildung) sowie mit $F(0|z)$ (wobei $z > 0$) einen Punkt auf der Symmetrieachse von par. Spiegeln wir F am Parabelscheitel $S(0|0)$ und legen durch den Spiegelpunkt $F_S(0|-z)$ die Normale ℓ auf die y -Achse, so wird sich die Länge der Strecke FP im Allgemeinen vom Normalabstand $d(P, \ell)$, welcher gemäß der Abbildung als Länge der Strecke PL erscheint, unterscheiden (wie man im Unterricht **zunächst(!)** mittels Bewegung von F auf der y -Achse experimentell untersuchen kann, indem man die entsprechenden Abstände bzw. Längen digital messen lässt). Um dies **auf einer höheren Niveaustufe zu quantifizieren**, berechnen wir

$$\overline{FP}^2 = w^2 + (aw^2 - z)^2$$

und vergleichen mit

$$\overline{PL}^2 = (aw^2 + z)^2,$$

was wegen

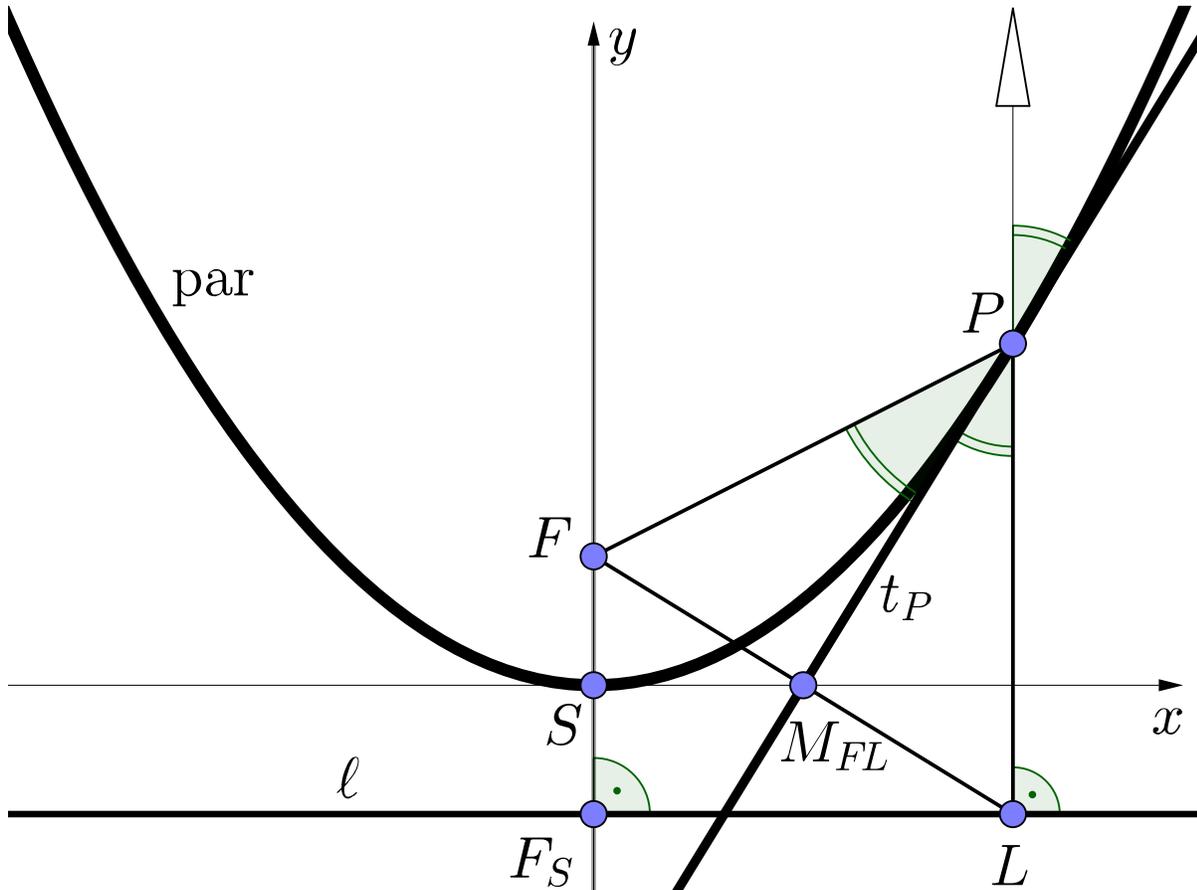
$$\overline{FP} = \overline{PL} \quad (**) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{FP}^2 = \overline{PL}^2 \quad \Leftrightarrow \quad w^2 = (aw^2 + z)^2 - (aw^2 - z)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad w^2 = 4aw^2z \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 4az \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4a} = z$$

$$\text{mit } F \left(0 \left| \frac{1}{4a} \right. \right) \quad \text{und somit } \ell : y = -\frac{1}{4a}$$

auf jenen Punkt F (Focus oder Brennpunkt) sowie jene Gerade ℓ (Leitgerade oder Direktrix) führt, welche par ebenso charakterisiert wie $(*)$ und die Eigenschaft $(**)$ für jeden Punkt P auf par sichert, wobei \boxed{FP} bzw. \boxed{PL} als $\boxed{\text{Brennstrecke}}$ bzw. $\boxed{\text{Leitstrecke}}$ bezeichnet wird. Wegen der aus $(**)$ folgenden Gleichschenkligkeit des Dreiecks $\triangle FLP$ halbiert die Trägergerade g der Verbindungsstrecke der Spitze P mit dem Mittelpunkt der Basis FL den Winkel $\angle FPL$, was für die Steigung k von g wegen

nach der Lageberechnung von F sowie ℓ dennoch mit der dynamischen Verschiebung von P längs der Parabel illustrieren wird, liegt auf der Hand (wenn man schon Jahr(zehnt)e der Unterrichtspraxis hinter sich hat und sich der (für einen Mathematiker - der man ja dennoch immer bleibt - harten) Tatsache bewusst ist, dass Schüler Demonstrationen mehr Glauben schenken als formalen Beweisen).



$M_{FL} \left(\frac{w}{2} \mid 0 \right)$ sowie $P(w|aw^2)$ und daher $\Delta x = w - \frac{w}{2} = \frac{w}{2}$ sowie $\Delta y = aw^2 - 0 = aw^2$

also

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{aw^2}{\frac{w}{2}} = \frac{aw^2}{1} : \frac{w}{2} = \frac{aw^2}{1} \cdot \frac{2}{w} = 2aw$$

liefert, zunächst auf

$$g : y = 2awx + d$$

und wegen

$$P \in g \Rightarrow aw^2 = 2aw \cdot w + d \Leftrightarrow aw^2 = 2aw^2 + d \Rightarrow d = -aw^2$$

schließlich auf die Geradengleichung

$$g : y = 2awx - aw^2$$

führt, wodurch sich g wegen

$$g \cap \text{par} : ax^2 = 2awx - aw^2 \Leftrightarrow ax^2 - 2awx + aw^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2wx + w^2 = 0 \Leftrightarrow (x-w)^2 = 0$$

als **die Tangente an par in P** herausstellt¹¹, was in der Abbildung entsprechend mit t_P symbolisiert wurde.

Dadurch haben wir folgende **wesentliche Eigenschaft¹² der Parabeltangente** bewiesen:

In jedem Parabelpunkt halbiert die zugehörige Parabeltangente den Winkel zwischen der Brennstrecke und der Leitstrecke.

Als unmittelbare Folgerung **dieser Eigenschaft** ergeben sich **zwei technische Anwendungen**, wozu par zunächst einmal um ihre Symmetrieachse (In unserem Fall ist das die y -Achse.) gedreht wird, wodurch ein sogenanntes Drehparaboloid entsteht.

- **ANWENDUNG 1: DER PARABOLSCHEINWERFER** Befindet sich die Lichtquelle in F , so gelangt das Licht an die Ummantelung und wird dort gemäß des FERMATSchen Prinzips derart an der entsprechenden Meridianparabel (ergo: an der Tangente im zugehörigen Parabelpunkt) reflektiert, sodass Ausfalls- und Einfallswinkel übereinstimmen, wodurch (wie in der Abbildung durch einen schlanken Pfeil visualisiert) alle Lichtstrahlen (wegen der Verlängerung der Leitstrecke über P hinaus) parallel zur Parabel- und somit auch Paraboloidachse ausgerichtet werden (und sich die Parabel somit als die ideale Profilkurve für den Längsschnitt herausstellt, was paradigmatisch aufzeigt, welch immense Bedeutung mathematische Grundlagen für die Technik haben).
- **ANWENDUNG 2: DIE PARABOLANTENNE** Wird der Mantel einer "Satellitenschüssel" (kurz: SAT-Schüssel) in Form eines Drehparaboloids gefertigt und nach dem entsprechenden geostationären Satelliten derart ausgerichtet, dass die Sendesignale parallel zur Paraboloidachse eingehen, so werden letztere wiederum aufgrund des FERMATSchen Prinzips derart am SAT-Schüssel-Mantel reflektiert, dass sie gebündelt im Focus der SAT-Schüssel landen, von wo aus die Signale an den Receiver und dann in weiterer Folge an das Endgerät weitergeleitet werden, wodurch sich einmal mehr die Parabel als idealer Längs- oder Meridianschnitt einer SAT-Schüssel eignen.

¹¹Um **dies** auch den Schülern klar zu machen, kann man etwa auf die von uns in [20], S. 136 entwickelte Methode (welche wir ebda zu(eine)r (der zahlreichen) Herleitung(en im Rahmen dieser Bände) der kleinen Lösungsformel verwendet haben) zurückgreifen, durch zwei Punkte $S_1(x_1|ax_1^2)$ und $S_2(x_2|ax_2^2)$ auf par die eindeutig bestimmte Gerade ${}_1g_2$ zu legen und den Schnitt ${}_1g_2 \cap \text{par}$ auf die Gleichung

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \quad (\sim)$$

zurückzuführen, was wir an dieser Stelle noch mittels

$$(\sim) \Leftrightarrow x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

ergänzen, wodurch **obige Eigenschaft von t_P** schließlich aus einem intuitiven in seinen Grundzügen bereits den anschaulichen Grenzwertbegriff beinhaltenden Argument folgt, welches freilich einer behutsamen Entwicklung von selbigem seitens des Lehrers zusammen mit seinen Schülern bedarf.

¹²In [17], S. 256ff haben wir **diese Eigenschaft** durch einen Grenzübergang aus der entsprechenden Eigenschaft der Ellipsentangente hergeleitet.

| |
|--------------|
| BEMERKUNGEN: |
|--------------|

- | |
|--------------|
| BEMERKUNG 1: |
|--------------|

 Für die Berechnung der Lage von M_{FL} kann man mangels der vektoriellen Mittelpunktsformel ad hoc mit dem Strahlensatz arbeiten, was zur ...
- | |
|--------------|
| BEMERKUNG 2: |
|--------------|

 ... überleitet, in welcher wir als passende Gelegenheit in aller Kürze ergänzend einen **fächerübergreifenden Aspekt zur Physik** ausgehend von der Fallparabel (in der dann $a = \frac{g}{2}$ gilt, wobei $g \approx 9,81(\text{m/s}^2)$ die Fallbeschleunigung bezeichnet) mit der Fallhöhe $h = y_P = aw^2$ anschneiden wollen, und zwar in Form der Berechnung der Momentangeschwindigkeit v des entsprechenden Körpers beim Aufprall "in P " (also zum Zeitpunkt $t = x_P = w = \sqrt{\frac{h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$), was aufgrund der obig berechneten Steigung k von t_P demnach

$$v = 2aw = g \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

ergibt, jedoch in m/s (worunter sich Schüler ja eher weniger vorstellen können), was mit dem bekannten Umrechnungsfaktor 3,6 von m/s auf Stundenkilometer schließlich mit

$$v^* = 3,6 \cdot \sqrt{2gh} \approx 16 \cdot \sqrt{h}$$

eine (freilich grobe und nur in vernünftigen Grenzen brauchbare)

| |
|----------------|
| Näherungsregel |
|----------------|

 liefert, nämlich:

Ein Sprung aus h Metern Höhe hat beim Aufprall in etwa die gleiche Wirkung wie ein Frontalzusammenstoß mit einem unbewegten Objekt bei $16 \cdot \sqrt{h}$ Stundenkilometern.

(Bei einer Fallhöhe von 10 Metern ergibt dies demnach eine Aufprallgeschwindigkeit von ca. 50 Stundenkilometern.)

3 Themenvorschläge für den WPG-M

Nach den sieben möglichen Teasern folgen nun exemplarisch ebenso sieben Vorschläge für Themen, welche man im WPG-M behandeln kann/könnte, wobei drei davon vom Autor der vorliegenden Zeilen bereits im WPG-M durchgenommen wurden. Für weitere selbst zu entdeckende Vorschläge sei auf die Literaturliste hingewiesen (wo man womöglich auf die Frage nach $\left(\frac{1}{2}\right)!$, im \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$) auf jene nach dem Hypervolumen der Sphäre¹³ sowie in der Algebra auf die Frage nach hyperkomplexen Zahlensystemen¹⁴ stößt), wobei

$$\text{Abschnitt } \left\{ \begin{array}{c} 3.1 \\ 3.2 \\ 3.3 \\ 3.4 \end{array} \right\} \text{ aus } \left\{ \begin{array}{c} [17], \text{ S. 59ff} \\ [18], \text{ S. 87f} \\ [19], \text{ S. 44ff} \\ [20], \text{ S. 153} \end{array} \right\} \text{ stammt.}$$

¹³Nota bene: Schon zwischen den ersten beiden Fragen besteht eine spannende Verbindung, wie man in [18], S. 193ff samt aller Beweise genauer nachvollziehen kann.

¹⁴Dieser Frage wird in [19], S. 23ff durch die Behandlung des Schiefkörpers \mathbb{H} der HAMILTONSchen Quaternionen detailliert samt aller Beweise nachgegangen.

Schließlich werden im abschließenden Abschnitt 3.8 noch weitere Literaturempfehlungen gegeben, wobei anders als in den Abschnitten 3.5 bis 3.7 auf keine konkreten Textstellen hingewiesen wird.

3.1 Der Fundamentalsatz der Axonometrie von GAUSS

Einleitung

Der mittlerweile etwas in Vergessenheit geratene (obwohl auf GAUSS zurückgehende) *Fundamentalsatz der Axonometrie* (“FSDA“) gestattet eine mit gehörigen Freiheitsgraden versehene Möglichkeit, “richtige“ Normalrisse von Würfeln zu erzeugen, was bedeuten soll, dass die Grund- bzw. Auf- resp. Kreuzrisse dreier den Würfel erzeugenden Vektoren tatsächlich von einem orthogonalem Dreibein herrühren. In weiterer Folge werden Analoga für zwei weitere platonische Polyeder, nämlich das (zu sich selbst duale) Tetraeder und das (zum Würfel duale) Oktaeder behandelt. Wir beginnen mit einer für den hier vorgestellten Beweis adäquaten Formulierung des FSDA:

Satz, Beweis, Bemerkungen und Folgerungen

SATZ 1. Es sei $\mathcal{B} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ eine Orthonormalbasis (“ONB“) des \mathbb{R}^3 . Dann gilt für die den entsprechenden Grundrissen \vec{x}'_1, \vec{x}'_2 und \vec{x}'_3 zugeordneten komplexen Zahlen z_1, z_2 und z_3 die Gleichung $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ (*).

BEWEIS. Wir betrachten die orthogonale Matrix \mathcal{O} , welche den Basiswechsel von der Standardbasis des \mathbb{R}^3 zu \mathcal{B} vermittelt:

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

Dann gilt für die zugeordneten komplexen Zahlen z_i

$$z_1 = x_{11} + x_{21} \cdot i,$$

$$z_2 = x_{12} + x_{22} \cdot i \text{ sowie}$$

$$z_3 = x_{13} + x_{23} \cdot i.$$

Dies liefert

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \underbrace{(x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{13}^2)}_{=: \alpha} - \underbrace{(x_{21}^2 + x_{22}^2 + x_{23}^2)}_{=: \beta} + 2 \underbrace{(x_{11}x_{21} + x_{12}x_{22} + x_{13}x_{23})}_{=: \chi} \cdot i.$$

Da in \mathcal{O} aber nicht nur die Spaltenvektoren \vec{x}_i , sondern auch die Zeilenvektoren \vec{z}_i eine ONB bilden (Charakteristikum einer orthogonalen Matrix!), gilt somit $\vec{z}_i \cdot \vec{z}_j = \delta_{ij}$, weshalb wegen $\alpha = \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_1$, $\beta = \vec{z}_2 \cdot \vec{z}_2$ und $\chi = \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2$ somit $\alpha = \beta (= 1)$ sowie $\chi = 0$ gilt, woraus unmittelbar (*) folgt, \square .

Bemerkungen

1. Obige Beweisführung lässt deutlich erkennen, dass der Fundamentalsatz nicht nur für die den Grundrissen, sondern auch den Auf- bzw. Kreuzrissen entsprechenden komplexen Zahlen gilt, wenn man die Eigenschaft $\langle \vec{z}_i | \vec{z}_j \rangle = \delta_{ij}$ entsprechend mutatis mutandis verwendet.

2. Da durch homogene Vervielfachung der Vektoren von \mathcal{B} die Gleichung (*) erhalten bleibt, kann man zur Herstellung irgendeines Normalrisses eines Würfels also von zwei beliebigen komplexen Zahlen z_1 und z_2 ausgehen und dann z_3 aus (*) berechnen (oder auch konstruktiv unter Verwendung der geometrischen Interpretationen der vier Grundrechnungsarten in \mathbb{C} !), was aufgrund der algebraischen Abgeschlossenheit von \mathbb{C} uneingeschränkt möglich ist.
3. Einen anderen (auch mit Mitteln der linearen Algebra geführten) Beweis (u.a. unter Verwendung der Richtungscosinus) findet man in [7], S. 204!
4. Möchte man den Fundamentalsatz etwa in einem Wahlpflichtfach in der Oberstufe beweisen, hat dort aber nicht das für den obigen Beweis notwendige Instrumentarium der Linearen Algebra zur Verfügung, besteht dennoch eine Möglichkeit einen Beweis zu führen, wie im Anhang gezeigt werden wird.

Folgerungen

- Konsequenzen des FSDA für das Tetraeder:

Jedes Tetraeder lässt sich bekanntlich aus dem Würfel ableiten, indem man drei Paare windschief-normaler Flächendiagonalen des Würfels als Kanten für das Tetraeder wählt. Dies lässt übrigens für jeden Würfel zwei Möglichkeiten zu, ein Tetraeder einzuschreiben. Beide Tetraeder zusammen ergeben dann eine sogenannte “Stella octangula“, welche etwa in der Natur als Zwillingkristall auftritt (siehe z.B. [4], S. 115). Der Verschneidungskörper ist dann das dem Würfel einbeschriebene (im Gegensatz zum Tetraeder eindeutige!) Oktaeder, worauf hier an späterer Stelle noch eingegangen wird.

Sind nun z.B. \vec{x}_1 , \vec{x}_2 und \vec{x}_3 die den Würfel $ABCDEFGH$ erzeugenden Vektoren (z.B. $\vec{x}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{x}_2 = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{x}_3 = \overrightarrow{AE}$), dann wählen wir (nicht o.B.d.A., aber momentan!) A im Koordinatenursprung des \mathbb{R}^3 und betrachten das Tetraeder $BDEG$, dessen Eckpunkte somit mit den Vektoren \vec{x}_1 , \vec{x}_2 , \vec{x}_3 und $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$ identifiziert werden können.¹⁵

Ordnen wir nun den vier Tetraedereckpunkten (bzw. gleichbedeutend: den soeben aufgelisteten entsprechenden Ortsvektoren) deren Grund- (bzw. Auf- bzw. Kreuz-)risse und diesen wiederum die entsprechenden komplexen Zahlen z_1 , z_2 , z_3 und z_4 (wobei $z_4 = z_1 + z_2 + z_3$) zu, betrachten einerseits

$$\sum_{i=1}^4 z_i^2 = \sum_{i=1}^3 z_i^2 + \left(\sum_{i=1}^3 z_i \right)^2$$

und andererseits

$$\left(\sum_{i=1}^4 z_i \right)^2 = \left(2 \sum_{i=1}^3 z_i \right)^2 = 4 \left(\sum_{i=1}^3 z_i \right)^2,$$

¹⁵Sehr wohl o.B.d.A. erfolgt jedoch die beliebige Wahl eines der beiden Tetraeder, da sein “Zwillingstetraeder“ auf gleiche Weise aus einem anderen Würfel abgeleitet werden kann, welcher aus dem ursprünglichen Würfel z.B. durch die Verkettung einer Drehung um 90° um die Gerade g_{AD} (wobei hier B in E übergehen soll) und einer Translation durch den Vektor \vec{x}_1 entsteht.

dann erhalten wir unter Beachtung von $\sum_{i=1}^3 z_i^2 = 0$ (FSDA!) schließlich

$$\sum_{i=1}^4 z_i^2 = 2 \prod_{i \neq j} z_i z_j$$

bzw.

$$\left(\sum_{i=1}^4 z_i \right)^2 = 8 \prod_{i \neq j} z_i z_j$$

und somit insgesamt die Gleichung

$$\left(\sum_{i=1}^4 z_i \right)^2 = 4 \sum_{i=1}^4 z_i^2 \quad (**),$$

dies alles aber unter der Annahme, dass A im Ursprung liegt.

Um diese Annahme fallen zu lassen, unterwerfen wir jedes z_i einer Translation (nach entsprechender Zuordnung: durch eine komplexe Zahl ζ) und untersuchen die Wirkung auf die beiden Seiten ("LS" und "RS") der Gleichung (**):

LS: Aus $z_i \mapsto z_i + \zeta$ folgt, dass

$$\left(\sum_{i=1}^4 z_i \right)^2 \quad \text{in} \quad \left(\sum_{i=1}^4 z_i + 4\zeta \right)^2$$

übergeht, d.h.

$$\left(\sum_{i=1}^4 z_i \right)^2 \quad \text{ändert sich um} \quad + \left(16\zeta^2 + 8\zeta \sum_{i=1}^4 z_i \right).$$

RS: Ebenso aus $z_i \mapsto z_i + \zeta$ folgt, dass

$$4 \sum_{i=1}^4 z_i^2 \quad \text{in} \quad 4 \sum_{i=1}^4 (z_i + \zeta)^2$$

übergeht, was wegen

$$4 \sum_{i=1}^4 (z_i + \zeta)^2 = 4 \sum_{i=1}^4 z_i^2 + 8\zeta \sum_{i=1}^4 z_i + 16\zeta^2$$

bedeutet, dass sich

$$4 \sum_{i=1}^4 z_i^2 \quad \text{ebenso um} \quad + \left(16\zeta^2 + 8\zeta \sum_{i=1}^4 z_i \right)$$

ändert.

Dies bedeutet also, dass (**) translationsinvariant ist, womit die Beschränkung $A(0|0|0)$ aufgehoben ist, und wir nun uneingeschränkt formulieren können:

SATZ 2. Es seien z_1, z_2, z_3 und z_4 die den Grund-, Auf- oder Kreuzrissen der Eckpunkte eines Tetraeders zugeordneten komplexen Zahlen. Dann gilt

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^4 z_i\right)^2 = 4 \sum_{i=1}^4 z_i^2.}$$

- Konsequenzen des FSDA für das Oktaeder:

Bekanntlich bildet die konvexe Hülle der Mittelpunkte der Begrenzungsquadrate eines Würfels ein regelmäßiges Oktaeder, welches sich somit (im Gegensatz zum Tetraeder, wie wir zuvor gesehen haben!) eindeutig aus dem Würfel ableiten lässt.

Um diese Eigenschaft auszunutzen, gehen wir ähnlich wie zuvor beim Tetraeder vor und führen im Würfel $ABCDEFGH$ die Bezeichnungen $\overrightarrow{AB} = 2\vec{x}_1$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{x}_2$ und $\overrightarrow{AE} = 2\vec{x}_3$ ein, woraus dann das Oktaeder $PQRSTU$ durch die Identifikationen $P = \vec{x}_1 + \vec{x}_3 =: \vec{y}_1$, $Q = 2\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 =: \vec{y}_2$, $R = \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3 =: \vec{y}_3$, $S = \vec{x}_2 + \vec{x}_3 =: \vec{y}_4$, $T = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 =: \vec{y}_5$ und $U = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + 2\vec{x}_3 =: \vec{y}_6$ entsteht.

Wieder ordnen wir nun den Vektoren \vec{x}_i die ihren Grund-, Auf- bzw. Kreuzrissen entsprechenden komplexen Zahlen z_i zu, ebenso ordnen wir den neuen Vektoren \vec{y}_i die ihren Grund-, Auf- bzw. Kreuzrissen entsprechenden komplexen Zahlen w_i zu. Dann besteht zwischen den z_i s und den w_i s der in obigen Identifikationen ausgedrückte Sachverhalt, wobei eben stets x durch z und y durch w ersetzt werden muss. In diesem Sinne betrachten wir nun (wieder unter Beachtung des FSDA) einerseits

$$\sum_{i=1}^6 w_i^2 = 8 \sum_{i=1}^3 z_i^2 + 12 \prod_{i \neq j} z_i z_j$$

und andererseits

$$\left(\sum_{i=1}^6 w_i\right)^2 = \left(6 \sum_{i=1}^3 z_i\right)^2 = 36 \sum_{i=1}^3 z_i^2 + 72 \prod_{i \neq j} z_i z_j,$$

woraus wegen FSDA also

$$\sum_{i=1}^6 w_i^2 = 12 \prod_{i \neq j} z_i z_j$$

bzw.

$$\left(\sum_{i=1}^6 w_i\right)^2 = 72 \prod_{i \neq j} z_i z_j,$$

und somit insgesamt die Gleichung

$$\left(\sum_{i=1}^6 w_i\right)^2 = 6 \sum_{i=1}^6 w_i^2 \quad (***)$$

folgt, dies alles aber (wie schon beim Tetraeder) unter der Annahme, dass A im Ursprung liegt.

Dass diese Annahme aufgrund der Tatsache, dass sich bei einer Translation (nach entsprechender Zuordnung: durch eine komplexe Zahl ζ) jedes w_i s beide Seiten von $(***)$ um $+ \left(36\zeta^2 + 12\zeta \sum_{i=1}^6 w_i \right)$ ändern, für jedes Oktaeder im \mathbb{R}^3 gilt, sei hier ohne Beweis nur mitgeteilt, da selbiger analog zum Tetraeder geführt werden kann.

Ebenso lässt sich eine entsprechende Formel mutatis mutandis für den Würfel beweisen, sie wird im Anschluss an Satz 3 in Satz 4 (ohne Beweis, selbiger erfolgt ebenso analog zu Satz 2 und Satz 3!) formuliert werden, bevor wir zum bereits angekündigten Anhang übergehen.

SATZ 3. Es seien z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 und z_6 die den Grund-, Auf- oder Kreuzrissen der Eckpunkte eines Oktaeders zugeordneten komplexen Zahlen. Dann gilt

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^6 z_i \right)^2 = 6 \sum_{i=1}^4 z_i^2.}$$

SATZ 4. Es seien $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ und z_8 die den Grund-, Auf- oder Kreuzrissen der Eckpunkte eines Würfels zugeordneten komplexen Zahlen. Dann

gilt $\boxed{\left(\sum_{i=1}^8 z_i \right)^2 = 8 \sum_{i=1}^4 z_i^2.}$

Anhang: Beweis des FSDA im Wahlpflichtfach Mathematik (“WM“)

Anstatt zum Beweis des FSDA charakteristische Eigenschaften orthogonaler Matrizen heranzuziehen, ist es m.E. für das WM weitaus passender (bzw. aufgrund der fehlenden Kenntnisse entsprechender Begriffe der Linearen Algebra schlicht und einfach notwendig!), ganz bestimmte Eigenschaften des (aus dem Mathematikunterricht bekannten) vektoriel- len Produkts zu verwenden, und zwar wie folgt (wobei die hier gewählte Darstellung im WM aufgrund eines anderen Adressatenkreises eher nicht so prägnant sein sollte!):

Wir gehen von zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ aus, welche die Bedingungen

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \text{ sowie } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

erfüllen.

Für den via

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

konstruierten Vektor \vec{c} gelten somit aufgrund bekannter Eigenschaften des vektoriiellen Produkts automatisch die Folgerungen

$$|\vec{c}| = 1 \quad \text{sowie} \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$$

Unter Benutzung all der drei Bedingungen und der drei Folgerungen berechnen wir nun für

$$z_1 := a_1 + a_2 \cdot i, \quad z_2 := b_1 + b_2 \cdot i \quad \text{sowie} \quad z_3 := (a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot i$$

“straight forward“ die Quadratsumme $S := \sum_{k=1}^3 z_k^2$, und zwar (zwecks besserer Übersichtlichkeit!) getrennt nach Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \Re(S) &= a_1^2 + b_1^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 - [a_2^2 + b_2^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2] \\ \Re(S) &= a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 - a_2^2 - b_2^2 - a_3^2 b_1^2 + 2a_1 a_3 b_1 b_3 - a_1^2 b_3^2 \\ \Re(S) &= a_1^2 \underbrace{(1 - b_3^2)}_{b_1^2 + b_2^2} + b_1^2 \underbrace{(1 - a_3^2)}_{a_1^2 + a_2^2} - a_2^2 \underbrace{(1 - b_3^2)}_{b_1^2 + b_2^2} - b_2^2 \underbrace{(1 - a_3^2)}_{a_1^2 + a_2^2} - \underbrace{2a_3 b_3}_{2(a_2 b_2 + a_1 b_1)} (a_2 b_2 - a_1 b_1) \\ \Re(S) &= (a_1^2 - a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) + (b_1^2 - b_2^2)(a_1^2 + a_2^2) + 2(a_2^2 b_2^2 - a_1^2 b_1^2) \\ \Re(S) &= a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 - a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_1^2 - a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 + 2a_2^2 b_2^2 - 2a_1^2 b_1^2 \\ &\Rightarrow \Re(S) = 0 \\ \Im(S) &= 2[a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_3 b_1 - a_1 b_3)] \\ \Im(S) &= 2(a_1 a_2 + b_1 b_2 + a_2 a_3 b_1 b_3 - a_3^2 b_1 b_2 - a_1 a_2 b_3^2 + a_1 a_3 b_2 b_3) \\ \Im(S) &= 2[a_1 a_2 \underbrace{(1 - b_3^2)}_{b_1^2 + b_2^2} + b_1 b_2 \underbrace{(1 - a_3^2)}_{a_1^2 + a_2^2} + \underbrace{a_3 b_3}_{-(a_1 b_1 + a_2 b_2)} (a_1 b_2 + a_2 b_1)] \\ \Im(S) &= 2[a_1 a_2 b_1^2 + a_1 a_2 b_2^2 + a_1^2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1 b_2 - a_1^2 b_1 b_2 - a_1 a_2 b_2^2 - a_1 a_2 b_1^2 - a_2^2 b_1 b_2] \\ &\Rightarrow \Im(S) = 2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$S = 0 + 0 \cdot i = 0,$$

womit nun auch dieser elementare(re¹⁶) Beweis abgeschlossen ist.

Ergänzende Bemerkung (zu [17], S. 59ff resp. S. 65):

In der prä-kompetenzorientierten pädagogischen Ära und da insbesondere Ende der 2000er- sowie Anfang der 2010er-Jahre hat der Autor der vorliegenden Zeilen über die geometrische Interpretation der Grundrechnungsarten in \mathbb{C} zu zwei vorgegebenen Vektoren des \mathbb{R}^2 über eben gerade den Fundamentalsatz der Axonometrie jene beiden Lösungen für einen dritten Vektor, der zusammen mit den ersten beiden Vektoren die Grundrisse eines orthogonalen Dreiecks bildet, konstruiert und damit zahlreiche axonometrische Darstellungen für Würfelaufgaben aus der analytischen Raumgeometrie erzeugt, wovon man sich auf der Homepage des Autors überzeugen kann. Schade, dass die (vielleicht gut gemeinte) Maturareform dies alles zunichte gemacht hat und sowohl die ebene als vor allem auch die räumliche analytische Geometrie nur mehr ein Schattendasein führt, was Mathematik-Wahlpflichtfächer umso bedeutsamer werden lässt.

¹⁶Hier zeigt sich wieder einmal, dass Beweise (wenn sie auch elementar sein mögen) umso länger werden, je schwächeres Rüstwerkzeug man ihn ihnen zum Einsatz bringt!

3.2 Potenzfunktion, Exponentialfunktion oder keines von beiden?

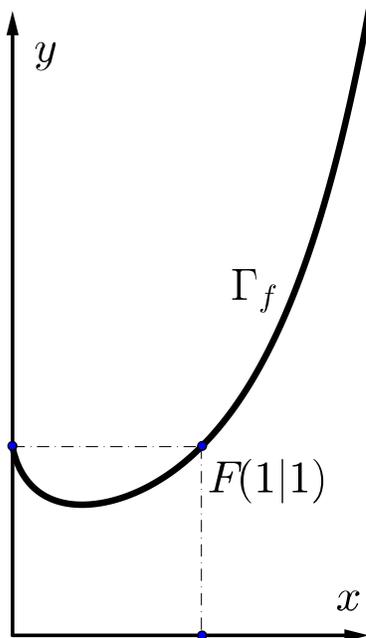
In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der durch $f(x) = x^x$ definierten reellen Funktion f , wobei wir gleich an den Anfang die Frage nach ihrer ersten Ableitungsfunktion f' stellen. Diesbezüglich kann man zwei (wie sich zwar herausstellen wird, **falsche**, aber nichtsdestotrotz lehrreiche¹⁷) Standpunkte einnehmen:

- STANDPUNKT 1: Man interpretiert f als Potenzfunktion $f_1(x) = x^x$ und erhält

$$f'_1(x) = x \cdot x^{x-1} = x^x$$

- STANDPUNKT 2: Man interpretiert f als Exponentialfunktion $f_2(x) = x^x$ und erhält

$$f'_2(x) = x^x \cdot \ln x.$$



Wie man anhand der linken Abbildung erkennt, kann ...

- ... $f'(x) = f'_1(x)$ **nicht** stimmen, weil $f'_1(0) = 0^0 = 1$ (was sich via

$$\begin{aligned} 0^0 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x^x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{1/x}} \end{aligned}$$

und schließlich unter Anwendung der Regel von DE L'HOSPITAL via

$$0^0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1/x}{-1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = e^0 = 1$$

ergibt) im Widerspruch zur fallenden Tangente an Γ_f in $(0|1)$ steht.

- ... $f'(x) = f'_2(x)$ **nicht** stimmen, weil $f'_2(1) = 1^1 \cdot \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0$ gilt, in F aber weder ein Extrem-, noch ein Sattelpunkt vorliegt.

Richtig verfährt, indem man $y = x^x$ zunächst logarithmiert und umformt ...

$$\ln y = \ln(x^x) \quad \text{bzw.} \quad \ln y = x \cdot \ln x$$

..., dann differenziert ...

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = y \cdot (\ln x + 1) \quad \text{bzw.} \quad (\text{wegen } y = x^x) \quad y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

¹⁷Die Geschichte der Mathematik lehrt uns, dass Irrwege nicht selten erst zu wahrhaften letztlich richtigen Erkenntnissen führen, vgl. dazu auch das gleichnamige Buch [13]!

... und somit zur Ableitungsregel $y = f(x) = x^x \Rightarrow f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$ gelangt.

BEMERKUNGEN:

- Merkwürdig ist jedenfalls der Umstand, dass aufgrund von

$$f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x) \text{ scheinbar "FALSCH + FALSCH = RICHTIG" gilt!}$$

- Bemerkenswert ist das Resultat $\int_0^1 x^x \cdot dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} \pm \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$,

was sich (siehe [25], S. 255) unter Verwendung von $x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln x}$ sowie

$$\int_0^1 (x \cdot \ln x)^n \cdot dx = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(n+1)^{n+1}} \text{ durch Reihenentwicklung beweisen lässt}$$

(\rightarrow Übung für den werten L $\overset{e}{\ddot{o}}$ ser!).

Ergänzende Bemerkung (zu [18], S. 87f resp. S. 88, aus einem der Folgebände von [21]):

In [18], S. 87f haben wir uns bereits einige Gedanken über die erste Ableitungsfunktion der via

$$y = f(x) = x^x$$

definierten reellen Funktion gemacht, was wir in diesem kurzen Abschnitt noch durch zusätzliche Betrachtungen ergänzen wollen, wozu wir zunächst einmal den (freilich falschen) Standpunkt einnehmen, dass es sich bei f um eine Potenzfunktion handelt, was

$$f'(x) = x \cdot x^{x-1} = x^x$$

impliziert und somit im Widerspruch zu folgendem Satz steht:

SATZ. Der Lösungsraum \mathcal{L} der Differentialgleichung

$$y' = y$$

ist via

$$\mathcal{L} = \{y \mid y = c \cdot e^x, c \in \mathbb{R}\}$$

gegeben.

BEWEIS. Dass dies für $k = 1$ stimmt, folgt aus der Ableitungsregel für die natürliche Exponentialfunktion (welche wir etwa in [19], S. 224f bewiesen haben). Nehmen wir nun an, dass eine Lösung

$$y_2 = k(x) \cdot e^x$$

mit einer in weiterer Folge noch zu bestimmenden Funktion k existiert, so ergibt sich einerseits

$$y_2' = k'(x) \cdot e^x + k(x) \cdot e^x = [k'(x) + k(x)] \cdot e^x$$

wegen der Produktregel (vgl. etwa unsere Überlegungen in [18], S. 81f) bzw. andererseits

$$y_2' = y_2 = k(x) \cdot e^x$$

(weil ja y_2 eine Lösung der obigen Differentialgleichung ist) und damit wegen

$$[k'(x) + k(x)] \cdot e^x = k(x) \cdot e^x$$

schließlich

$$k'(x) \cdot e^x = 0,$$

woraus wegen

$$e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

schließlich zwingend

$$k'(x) \equiv 0$$

folgt, was

$$k(x) = c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

impliziert, \square .

BEMERKUNG 1. Einen schönen alternativen Beweis (welcher anstelle der im obigen Beweis verwendeten Produktregel von der Quotientenregel Gebrauch macht) findet man etwa in [14], ergänzend sei auch noch auf [15] verwiesen.

BEMERKUNG 2. Der vor dem Satz behauptete Widerspruch ergibt sich nun aus der Unmöglichkeit der Zugehörigkeit von f zu \mathcal{L} via

$$x^x = c \cdot e^x \quad \Leftrightarrow \quad c = x^x \cdot e^{-x} \neq \text{const}$$

Fassen wir f hingegen als Exponentialfunktion auf, so liefert Differentiation

$$y' = x^x \cdot \ln x,$$

was impliziert, dass f eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = y \cdot \ln x \quad (1)$$

ist.

Lösen von (1) liefert

$$(1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y \cdot \ln x \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \ln x \cdot dx$$

bzw. (wobei man eine Stammfunktion der natürlichen Logarithmusfunktion etwa so bestimmen kann wie wir es in [20], S. 44 getan haben)

$$\ln |y| = x \cdot \ln x - x + C \Rightarrow y = e^{x \cdot \ln x - x + C} \quad \text{resp.} \quad y = e^{\ln(x^x)} \cdot e^{-x} \cdot \underbrace{e^C}_{=:k},$$

also die Lösungsschar

$$y = \varphi_k(x) = k \cdot x^x \cdot e^{-x} \quad (2) \quad \text{mit } k \in \mathbb{R},$$

der f wegen

$$x^x = k \cdot x^x \cdot e^{-x} \Leftrightarrow k = e^x \neq \text{const}$$

nicht angehört.

Bemerkenswerterweise können wir aber durch Differentiation von (2) via Vergleich mit (1) wie folgt zur ersten Ableitungsfunktion von f gelangen:

$$y = k \cdot x^x \cdot e^{-x} \Rightarrow y' = k \cdot \frac{d}{dx} x^x \cdot e^{-x} - k \cdot x^x \cdot e^{-x}$$

bzw.

$$\begin{aligned} y' &= y \cdot \ln x = k \cdot x^x \cdot e^{-x} \cdot \ln x \\ \Rightarrow k \cdot \frac{d}{dx} x^x \cdot e^{-x} - k \cdot x^x \cdot e^{-x} &= k \cdot x^x \cdot e^{-x} \cdot \ln x \end{aligned}$$

resp.

$$\frac{d}{dx} x^x - x^x = x^x \cdot \ln x \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} x^x = x^x \cdot (\ln x + 1)}$$

3.3 Schmankerln aus der Linearen Algebra: Matrizen und lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt soll demonstriert werden, wie man von ganz einfachen Voraussetzungen ausgehend durch freudiges Experimentieren bereits zu durchaus nicht-trivialen Aussagen gelangen kann, und zwar anhand von Matrizen sowie deren Addition, Subtraktion, Multiplikation, Spur, Determinante und Einheitsmatrix, wobei wir uns auf Matrizen aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$ beschränken¹⁸.

3.3.1 Spuren, Determinanten, Satz von CAYLEY-HAMILTON

Dazu gehen wir von einer beliebigen Matrix A aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$ aus, ergo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

und bilden deren Quadrat, d.h. wir berechnen

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

Die Umformung

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

motiviert unter Verwendung von

$$\text{sp}A = a + d$$

zunächst die Darstellung

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & \text{sp}A \cdot b \\ \text{sp}A \cdot c & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

¹⁸In [17], S. 302ff bzw. [18], S. 183ff wird selbiges anhand des Quadratwurzelziehens bzw. des charakteristischen Polynoms für Matrizen aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$ bzw. $\mathbb{R}^{(3,3)}$ exemplifiziert.

Um dies auch für die Einträge in der Hauptdiagonale von A^2 zu ermöglichen, formen wir zu

$$A^2 = \begin{pmatrix} a(a+d) + bc - ad & \text{sp}A \cdot b \\ \text{sp}A \cdot c & d(a+d) + bc - ad \end{pmatrix}$$

um, was unter Einbeziehung von

$$\det A = ad - bc$$

zu

$$A^2 = \begin{pmatrix} \text{sp}A \cdot a - \det A & \text{sp}A \cdot b \\ \text{sp}A \cdot c & \text{sp}A \cdot d - \det A \end{pmatrix}$$

bzw.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \text{sp}A \cdot b & \text{sp}A \cdot b \\ \text{sp}A \cdot c & \text{sp}A \cdot d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\det A & 0 \\ 0 & -\det A \end{pmatrix}$$

resp.

$$A^2 = \text{sp}A \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also unter Verwendung der Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

schließlich zur Identität

$$A^2 = \text{sp}A \cdot A - \det A \cdot E$$

führt.

Schreibt man letztere in der äquivalenten Form

$$A^2 - \text{sp}A \cdot A + \det A \cdot E = \underline{0} \quad (*)$$

an¹⁹, dann lässt sich (*) auch so interpretieren, dass jede Matrix eine Nullstelle des ihr zugeordneten **charakteristischen Polynoms**

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{sp}A \cdot \lambda + \det A$$

ist²⁰ (Satz von CAYLEY-HAMILTON).

3.3.2 Matrizeninversion

Unter der Annahme, dass die zu A inverse Matrix A^{-1} (für welche $A^{-1} \cdot A = E$ gilt) existiert, multiplizieren wir (*) mit ebenjener von links²¹, was wegen der Assoziativität der Matrizenmultiplikation zu

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A^2}_{(A^{-1} \cdot A) \cdot A} - \text{sp}A \cdot A^{-1} \cdot A + \det A \cdot A^{-1} \cdot E = \underline{0}$$

¹⁹Darin bezeichnet $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die sogenannte Nullmatrix.

²⁰Der Zusammenhang mit Eigenwerten und -vektoren ist an dieser Stelle freilich (noch!) nicht ersichtlich (wird aber in einem späteren in diesem Skriptum jedoch nicht enthaltenen Abschnitt erarbeitet, weshalb an dieser Stelle ausdrücklich auf [19], S. 47ff hingewiesen sei).

²¹Man beachte, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist!

resp.

$$A - \text{sp}A \cdot E + \det A \cdot A^{-1} = \underline{0}$$

bzw.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{sp}A \cdot E - A) \quad (**)$$

führt.

An (**) erkennt man nun unschwer die Bedingung

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

Zwecks expliziter Berechnung von A^{-1} setzen wir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

in (**) ein und erhalten

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left[\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right],$$

ergo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\#),$$

was via *Elemente bzw. Vorzeichen in der Haupt- bzw. Nebendiagonale vertauschen und dann mit dem Inversen der Determinante multiplizieren* auch verbalisiert werden kann.²²

Schließlich wollen wir via (#) noch das Gleichungssystem

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad (\#\#)$$

vektoriell analysieren, indem wir (##) in die äquivalente Darstellung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=:x} = \underbrace{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}_{=:s}$$

überführen und durch Multiplikation mit A^{-1} von links zunächst

$$x = A^{-1} \cdot s$$

bzw. wiederum explizit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

resp.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} ed-bf \\ af-ec \end{pmatrix},$$

²²Eine andere Möglichkeit zur Herleitung von (#) findet man etwa in [17], S. 51!

ergo mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

die sogenannte CRAMERSche Regel²³ zur Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

erhalten.

Dabei sei aber an dieser Stelle dezidiert bemerkt, dass die hier präsentierte Herleitung der CRAMERSchen Regel ungleich einfacher ist als jene in der Fußnote zitierte, da letztere zwar neben Vektoren auch Matrizen (aber nur als Symbole!) und deren Determinanten verwendet, jedoch im Gegensatz zum hier gebrachten Beweis keine Matrizenmultiplikation und -inversion, was wieder einmal zeigt, dass man mit starkem Equipment auch in der Mathematik effektiver (rascher) vorankommt.

Bemerkung z w e c k s Ergänzung: In [19], S. 47ff werden im Anschluss an die beiden vorherigen Unterabschnitte (in diesem Skriptum als 3.3.1 und 3.3.2 bezeichnet) auch noch in genetischer Weise die Themen

- **I) Eigenwerte und Eigenvektoren,**
- **II) doppelt-stochastische Matrizen**

sowie die

- **III) geometrische Bedeutung der Determinante von Matrizen aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$** (samt einer Exkursion in die mehrdimensionale Analysis bis hin zu Funktionaldeterminanten bei Doppelintegralen)

behandelt.

Ad **I)** sei noch der folgende Impuls gegeben:

Betrachtet man das charakteristische Polynom als Polynom in einer komplexwertigen Variable und ermittelt die Nullstellen, so führt dies auf

$$\lambda^2 - \text{sp}A \cdot \lambda + \det A = 0 \quad (\sim) \quad \text{bzw. explizit} \quad \lambda^2 - (a + d) \cdot \lambda + ad - bc = 0,$$

was

$${}_1\lambda_2 = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - ad + bc} \quad \text{resp.} \quad {}_1\lambda_2 = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc}$$

hervorbringt.

²³Einen anderen Zugang findet man etwa in [18], S. 165(f)!

3.4 Summenformeln, Teil 3

Auf Basis der im vorletzten²⁴ Abschnitt (teilweise durch den wertem $L \begin{smallmatrix} e \\ \ddot{o} \end{smallmatrix} \text{ser}$) kombinatorisch hergeleiteten Summenformeln

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1) \quad \text{sowie} \quad \sum_{k=1}^n 2k - 1 = n^2 \quad (2)$$

wollen wir in diesem Abschnitt vor allem durch geschickte Verwendung von (2) eine Summenformel für den Ausdruck

$$s_n := \sum_{k=1}^n k^2$$

herleiten, wozu wir s_n geeignet zerlegen ...

$$+ \left\{ \begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ 2^2 = 1 + 3 \\ 3^2 = 1 + 3 + 5 \\ 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 \\ \dots \\ n^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) \end{array} \right.$$

... und wie durch das Additionszeichen am linken Rand bereits suggeriert wieder zusammensetzen, was auf

$$\left\{ \begin{array}{l} s_n = n + 3n + 5n + 7n + \dots + (2n-1)n \\ \quad \quad \quad - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 - \dots - (n-1)(2n-1) \end{array} \right\}$$

bzw.

$$s_n = n \cdot (1 + 3 + 5 \dots + 2n - 1) - \sum_{k=1}^{n-1} k(2k + 1)$$

resp. [u.a. wegen (2)] auf

$$s_n = n^3 - \sum_{k=1}^n k(2k + 1) + n(2n + 1),$$

ergo wegen (1) sowie einer geschickten Aufteilung "offener Quadrate" weiters auf

$$s_n = n^3 + n^2 - 2s_n - \frac{n(n+1)}{2} + n(n+1)$$

und somit nach einer vorletzten Vereinfachung auf

$$3s_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (2n-1+2) \quad \text{und schließlich auf} \quad s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

führt.²⁵

²⁴freilich auf [20] - und nicht dieses Skriptum! - bezogen

²⁵In [20] befinden sich in den Nachbarabschnitten ("Summenformeln, Teil 2" sowie "Summenformeln, Teil 4") zwei weitere Herleitungen der entsprechenden Summenformel für s_n , zudem werden auch in [19], S. 7f und S. 11f wiederum zwei andere Herleitungen durchgenommen.

3.5 Ein Beweis der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung ...

..., welcher sich an Eleganz und Allgemeinheit (weil er für jedes beliebige Skalarprodukt eines euklidischen Vektorraums Gültigkeit besitzt²⁶.) kaum noch überbieten lässt und deshalb auch in [1], dem "Buch der Beweise" zu finden ist (das sich in seiner Konzeption durch die deutschen Mathematiker Martin AIGNER und Günter M. ZIEGLER auf die Ansicht des ungarischen Mathematikers Paul ERDOS (1913-1996) stützt, derzufolge die schönsten Beweise von Gott in einem Buch (der Beweise) gepflegt werden, da es seines und G.H. Hardys (vgl. Einleitung!) Erachtens nach keinen Platz für hässliche Mathematik auf der Welt gebe), wird an dieser Stelle mit Verweis auf [1], S. 101 nicht reproduziert (wobei von [1] zwei Jahre später auch eine deutsche Übersetzung erschienen ist).

3.6 Erweiterungen des Lehrsatzes von PYTHAGORAS ...

... sowohl über Höhensatz und Kathetensätze als auch über rechtwinklige Dreiecke hinaus findet man in Form von

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

(bezogen auf die Standardnotation rechtwinkliger Dreiecke) sowie

$$a^2 + bd = c^2$$

für gleichschenklige Dreiecke (Schenkellänge c , Transversalenlänge a durch die Spitze, welche die Basis in die Teilstrecken b und d gliedert) in [2], S. 87(f), wobei in [2] auch noch viele andere (gemäß des Buchtitels) *bezaubernde Beweise* entdeckt werden können (ebenso in Form von herausfordernden Übungsaufgaben, wie etwa die in [2], S. 236 zu beweisende Formel

$$V = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2) \cdot (a^2 - b^2 + c^2) \cdot (-a^2 + b^2 + c^2)}{72}}$$

für das Volumen eines *gleichschenkligen Tetraeders* - i.e. ein Tetraeder, bei dem gegenüberliegende Kanten jeweils gleiche Längen haben - mit den Seitenlängen a , b und c), womit [2] ein ähnliches (aber nach Ansicht des Autors der vorliegenden Zeilen für den L^e ser leicht-

²⁶Auf diesem Wege erhält man dann beispielsweise für das via

$$\langle f|g \rangle := \int_I f(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

definierte Skalarprodukt zwischen Elementen f und g eines geeigneten aus bestimmten (jedenfalls über I integrierbaren) Funktionen bestehenden Vektorraums (etwa der \mathcal{L}^2 -Funktionen, was geradewegs in die **Funktionalanalysis** führt) die Ungleichung

$$-1 \leq \frac{\int_I f(x) \cdot g(x) \cdot dx}{\sqrt{\int_I f^2(x) \cdot dx} \cdot \sqrt{\int_I g^2(x) \cdot dx}} \leq 1,$$

deren Verifikation für $I = [0; 1]$ sowie für $f(x) = x^a$ und $g(x) = x^b$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ sowie $b \in \mathbb{R}^+$ eine gute Vorübung für den in Rede stehenden Beweis darstellt.

ter zugängliches) Konzept als [1] verfolgt. **Jedenfalls** sind sowohl [1] als auch [2] sehr empfehlenswert für den WPG-M, wobei je nach Sprachbegabung eventuell auf eine bereits erwähnte deutsche Übersetzung von [1] ausgewichen werden sollte.

Schließlich sei an dieser Stelle noch die Bemerkung angebracht, dass speziell in [5], aber auch in [17], [20] sowie im demnächst erscheinenden [21] weitere Beweise des klassischen Lehrsatzes von PYTHAGORAS zu finden sind, wobei der Autor der vorliegenden Zeilen in den bislang sechs von ihm unterrichteten vierten Klassen stets besonders gerne einen in [5] zu findenden auf (so die Legende) den elfjährigen Albert EINSTEIN zurückgehenden Beweis mit seinen Schülern im Unterricht erarbeitet hat (dabei selbstverständlich stets mit einem Einstein-T-shirt gekleidet, um dem Anlass auch gebührend Tribut zu zollen).

3.7 Mathematik und Physik: Die Kettenlinie

Schließlich sei mit [24], S. 76ff (bzw. ohne Kenntnis von Hyperbelfunktionen: S. 74ff) noch ein interessanter Abschnitt eines generell äußerst ungewöhnlichen Büchleins aus dem guten alten Harri Deutsch Verlag hervorgehoben, der entweder für Kollegen mit der klassischen Fächerkombination M/PH oder für gegenüber der Physik sehr aufgeschlossenen Kollegen sicher eine interessante Herausforderung für den WPG-M (womöglich auch für den WPG-PH?) darstellt und die Frage beantwortet, warum eine Kette, die an zwei Punkten frei aufgehängt wird, mathematisch durch eine affine Transformation einer hyperbolischen Cosinusfunktion beschrieben wird.

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll an dieser Stelle ergänzend zur Fragestellung von diesem Abschnitt noch die (den Autor der vorliegenden Zeilen zuweilen quälende) Frage aufgeworfen werden, wie die EULERSche Zahl e eigentlich in die Hyperbelfunktionen kommt, wenn man selbige analog zu den Winkelfunktionen am Einheitskreis an der Einheitshyperbel definiert. Dazu wurden vom Autor der vorliegenden Zeilen sowohl in [16] als (gut vierzehn Jahre später) auch in [19], S. 225ff Antworten gegeben, wobei im zweiten Fall auch noch ein alternativer Weg zu den Hyperbelfunktionen über komplexe Elemente aufgezeigt wird, welcher freilich weitaus abstrakter ausfällt.

3.8 Weitere Literaturempfehlungen für den WPG-M

Ohne konkrete Bezüge (wie schon eingangs dieses Kapitels angekündigt) seien an dieser Stelle noch die folgenden durchaus ebenso für den WPG-M geeigneten Werke angeführt:

- [3] (auf Figuren fußend), [8] (auf Ideen fokussierend),
- [26] (auch immer wieder hinter die Kulissen blickend)

Literatur

- [1] AIGNER, Martin & Günter ZIEGLER (1998): Proofs from the book. Springer, Berlin.
- [2] ALSINA, Claudi & Roger NELSON (2013): Bezaubernde Beweise. Springer, Berlin.
- [3] ALSINA, Claudi & Roger NELSON (2015): Perlen der Mathematik. Springer, Berlin.
- [4] ASPERL, Andreas (2005): GZ-Handbuch. R. Oldenbourg Verlag, Wien.

- [5] BAPTIST, Peter (1998): Pythagoras und kein Ende? Klett, Stuttgart.
- [6] BRÜDERN, Jörg (1995): Einführung in die analytische Zahlentheorie. Springer, Berlin.
- [7] COFMAN, Judita (2001): Einblicke in die Geschichte der Mathematik II. Spektrum, Heidelberg.
- [8] ESCHENBURG, Jost-Hinrich (2017): Sterstunden der Mathematik. Springer, Berlin.
- [9] HELMBERG, Gilbert (2018): Divergente Reihen. Mathe-Brief (91) der ÖMG (Österreichische Mathematische Gesellschaft, via <https://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/index.html> abrufbar)
- [10] HELMBERG, Gilbert (2018): Analytische Zahlentheorie. De Gruyter, Berlin.
- [11] HUMENBERGER, Johann und Hans-Christian REICHEL (1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. BI-Verlag, Mannheim.
- [12] KANIGEL, Robert (1995²): Der das Unendliche kannte. Vieweg, Braunschweig.
- [13] PEIFFER, Jeanne und Amy DAHAN-DALMEDICO (1994): Wege & Irrwege - Eine Geschichte der Mathematik. Birkhäuser, Basel.
- [14] REICHEL, Hans-Christian, Robert MÜLLER und Günter HANISCH (1993²): Lehrbuch der Mathematik 8. öbv&hpt, Wien.
- [15] RESEL, Robert (1999): Ausbaumöglichkeiten der Oberstufen-Schulmathematik. Diplomarbeit, Universität Wien.
- [16] RESEL, Robert (2001): Didaktisch-methodische Überlegungen zu ausgewählten Kapiteln des Geometrieunterrichts der AHS-Oberstufe. Dissertation, Universität Wien.
- [17] RESEL, Robert (2014): Reise zum Mittelpunkt der Mathematik. Logos, Berlin.
- [18] RESEL, Robert (2014): In 101 Abschnitten um die mathematische Welt. Logos, Berlin.
- [19] RESEL, Robert (2017²): 20000 Kurven unter der Enveloppe. Logos, Berlin.
- [20] RESEL, Robert (2017): Von der Addition bis zur z -Koordinate. Logos, Berlin.
- [21] RESEL, Robert: Mathematik(er) von A bis Z. Logos, Berlin. → to appear 2019/20
- [22] RIBENBOIM, Paulo (2006): Die Welt der Primzahlen. Springer, Berlin.
- [23] RIBENBOIM, Paulo (2009): Meine Zahlen, meine Freunde. Springer, Berlin.
- [24] SCHARK, Rainer (1992): Konstanten in der Mathematik - variabel betrachtet. Harri Deutsch, Frankfurt.
- [25] STILLWELL, John (2002): Mathematics and its history. Springer, Berlin.
- [26] TOENNIESSEN, Fridtjof (2010): Das Geheimnis der transzendenten Zahlen. Spektrum, Heidelberg.

4 Anhang: Wienweiter schulübergreifender WPG-M bei Dr. Resel (2017/18 bzw. 2018/19 am Amerlinggymnasium bzw. am Sigmund Freud Gymnasium)

Am Montag, den 5.11.2018 wurde bereits das vierte Mal (nach dem Jänner sowie Dezember 2016 sowie dem November 2017) von Herrn Landesschulinspektor Hofrat Mag. Helmut Zeiler via e-mail eine Mitteilung an alle (Sekretariate/Administrationen/Direktionen der) Wiener AHSen geschickt, welche neben der eigentlichen Mitteilung ferner ein vom Autor der vorliegenden Zeilen verfasstes Informationsblatt enthält. Darin wird auf die Möglichkeit eines wienweit angebotenen schulübergreifenden WPG-M aufmerksam gemacht, welches aufgrund der geringen Gesamtanzahl von Mathematik-Wahlpflichtfächern in den knapp hundert Wiener AHSen (jedenfalls im Vergleich zu "populären" WPGen wie etwas Biologie, Englisch oder Psychologie und Philosophie) ventiliert wurde und nun schon das zweite Jahr erfolgreich läuft.

Die Idee zu diesem schulübergreifenden WPG-M ergab sich aus der Erfahrung des Autors der vorliegenden Zeilen, in seinen M-WPGen (welche er seit 2007/08 durchgehend an seiner Stammanstalt, dem BG-BRG-BORG Wien 22 Heustadelgasse, abhält, seit 2014/15 sogar nunmehr das fünfte Jahr mit zwei Gruppen, nämlich der einen mit Siebt- und der anderen mit Achtklässlern) immer wieder (natürlich gerne) auch Schüler aus anderen Schulen aufgenommen zu haben (über die bereits erreichte Eröffnungszahl hinaus), was zum Teil auch über die Bezirksgrenzen (bis in die Stubenbastei) hinausgegangen ist. Nach Anfrage beim für die o.g. Stammanstalt zuständigen Landesschulinspektor, nämlich Herrn Hofrat Mag. Helmut Zeiler, über die Position der Schulaufsicht bezüglich einer dergestaltigen Initiative seitens eines an der Förderung von talentierten Schülern interessierten Mathematiklehrers (in diesem Fall der Autor der vorliegenden Zeilen) stieß diese Idee umgehend auf positive Resonanz und wurde unmittelbar zugesichert, bei ausreichender Anmeldezahl die notwendigen Werteinheiten bereitzustellen, was äußerst unkompliziert vonstatten ging, da insbesondere keine anteiligen Werteinheiten der involvierten Schulen von selbigen entrichtet werden mussten, womit keinerlei bürokratische Hürden für die betroffenen Administrationen zu befürchten waren.

Dadurch wurden diesem ambitionierten (und freilich mit viel logistischer Tätigkeit des Autors der vorliegenden Zeilen einhergehenden) Ansinnen jedenfalls nicht von vornherein durch administrative Hindernisse Steine in den Weg gelegt, wodurch im Laufe des letzten und des heurigen Schuljahres insgesamt 14 Schüler (4w, 10m) aus 10 Schulen in 7 Bezirken (Leopoldstadt, Landstraße, Mariahilf, Josefstadt, Simmering, Hietzing und Donaustadt) an diesem speziellen WPG-M teilgenommen haben bzw. aktuell (aus 8 Schulen in 5 Bezirken: 2w, 8m, von letzteren 3 schon das zweite Lernjahr) teilnehmen.

Auf der letzten Seite dieses Skriptums ist das Informationsblatt vom Autor der vorliegenden Zeilen (nochmals) zu finden, welches bitte an interessierte Schüler weitergeleitet werden möge, denen an der eigenen Schule mangels Zustandekommen kein Besuch des M-WPGs möglich ist.



AHS HEUSTADELGASSE

www.heustadelgasse.at

Wahlpflichtfach Mathematik ("WM"): **Angebot für alle Gymnasien Wiens ohne WM**

- 1) Du gehst in eine 5., 6. oder 7. Klasse, hast **Interesse und Freude an der Mathematik**, könntest kein WM besuchen und willst zusammen mit Gleichgesinnten dennoch **mehr über diese faszinierende Wissenschaft erfahren?** ©
- 2) Du möchtest eventuell abseits des regulären Mathematikunterrichts in **Mathematik mündlich maturieren** (mit **8 statt 18 Themen im Themenpool**)?
- 3) Du ziehst womöglich nach der Matura ein **Studium der Mathematik** in Erwägung?

Dann ist das **WM** vermutlich **genau das Richtige für dich**, um deine **mathematischen Interessen** geeignet **ausleben** zu können. Auch wenn an deiner Schule kein eigenes WM zustande kommen sollte, besteht die Möglichkeit eines **schulübergreifenden ein- bis zweijährigen Kurses**, welcher in Koordination mit dem Stadtschulrat für Wien für Interessenten der heurigen 5., 6. und 7. Klassen in den Schuljahren 2019/20 und/oder 2020/21 angeboten wird [mit der zusätzlichen exkl. Möglichkeit 2) für 5. und 6. Klassen].

Auch **Vorträge** der insgesamt bereits **über zehn** ehemaligen WM-Teilnehmer und **nunmehr Mathematikstudenten** finden gelegentlich statt und geben über die damit in Zusammenhang stehende (Ma-)Thematik des Vortrags hinaus den Teilnehmern des WM die Gelegenheit, Einblicke in das "Unileben" aus der Sicht junger Studierender zu gewinnen.

- Anmeldung für dieses spezielle schulübergreifende WM über robert.resel@chello.at bis **spätestens Freitag, den 25. Jänner 2019**
- Kurszeit und Ort werden nach Einlangen aller Anmeldungen festgelegt.
- Schnuppermöglichkeit in den Kursen der heurigen siebenten (freitags ab 16.25 im Klassenraum der 7A) sowie achten (donnerstags ab 14.45 in der 4C) Klassen der AHS Heustadelgasse sowie in einem bereits laufenden schulübergreifenden Wahlpflichtfach im Sigmund Freud Gymnasium (donnerstags ab 17.15 im Klassenraum der 3A), bei Interesse bitte ebenso eine e-m@il senden!
- 8 Themen für den Themenpool unter <http://matheprof.at/WPGM20161718.htm> abrufbar, wo 12 Themen angeboten werden, aus denen dann eine Auswahl getroffen wird (wo auch vom Kursleiter verfasste Literatur für das WM angeführt wird)
- **Auswahl weiterer Themen**, welche wir über den Themenpool hinaus in den letzten Jahren im WM gemeinsam **aktiv erforschend** durchdrungen haben (**Vorschläge zusätzlicher Themen** für die Zukunft immer gerne **willkommen!**): Kurven 2. Ordnung, Differentialgleichungen, Verallgemeinerung der Fakultät ("Gammafunktion"), Hyperbelfunktionen, Parameterdarstellung von Kurven (samt Differential- & Integralrechnung), elementare Differentialgeometrie (Krümmung, Evolute, Enveloppen), Taylor-Reihen, mehrdimensionale Differential- und Integralrechnung, Bézier-Kurven, HP-Flächen, Gleichungen höheren Grades, höherdimensionale Geometrie (insbesondere Würfel, Tetraeder und Oktaeder in höheren Dimensionen sowie Volumina höherdimensionaler Sphären), Fibonacci-Zahlen & Goldener Schnitt, Kreisinvolution, numerische Mathematik (Newtonverfahren & Simpson-Regel), Eulersche Formeln, Matrizen (mit geometrischen Anwendungen), Kinematik, Hundekurve & Pseudosphäre, Logarithmen vom höheren Standpunkt, Irrationalitätsbeweise, fraktale Geometrie, transfinite Mengenlehre, Mathematik & Big Bang theory

Ich freue mich über dein Interesse, welches nicht nur dir, sondern auch Gleichgesinnten zugute kommen kann, indem ein schulübergreifender Kurs die an zahlreichen Schulen bestehende WM-Lücke schließt und die Möglichkeit bietet, die Mathematik von einer anderen Seite als im Vormittagsunterricht zu erforschen (auch mit Computereinsatz).

Wir sehen einander im schulübergreifenden WM.

Bis dahin beste mathematische Grüße!

Wien, im November 2018.

Dr. Robert Resel, e. h.