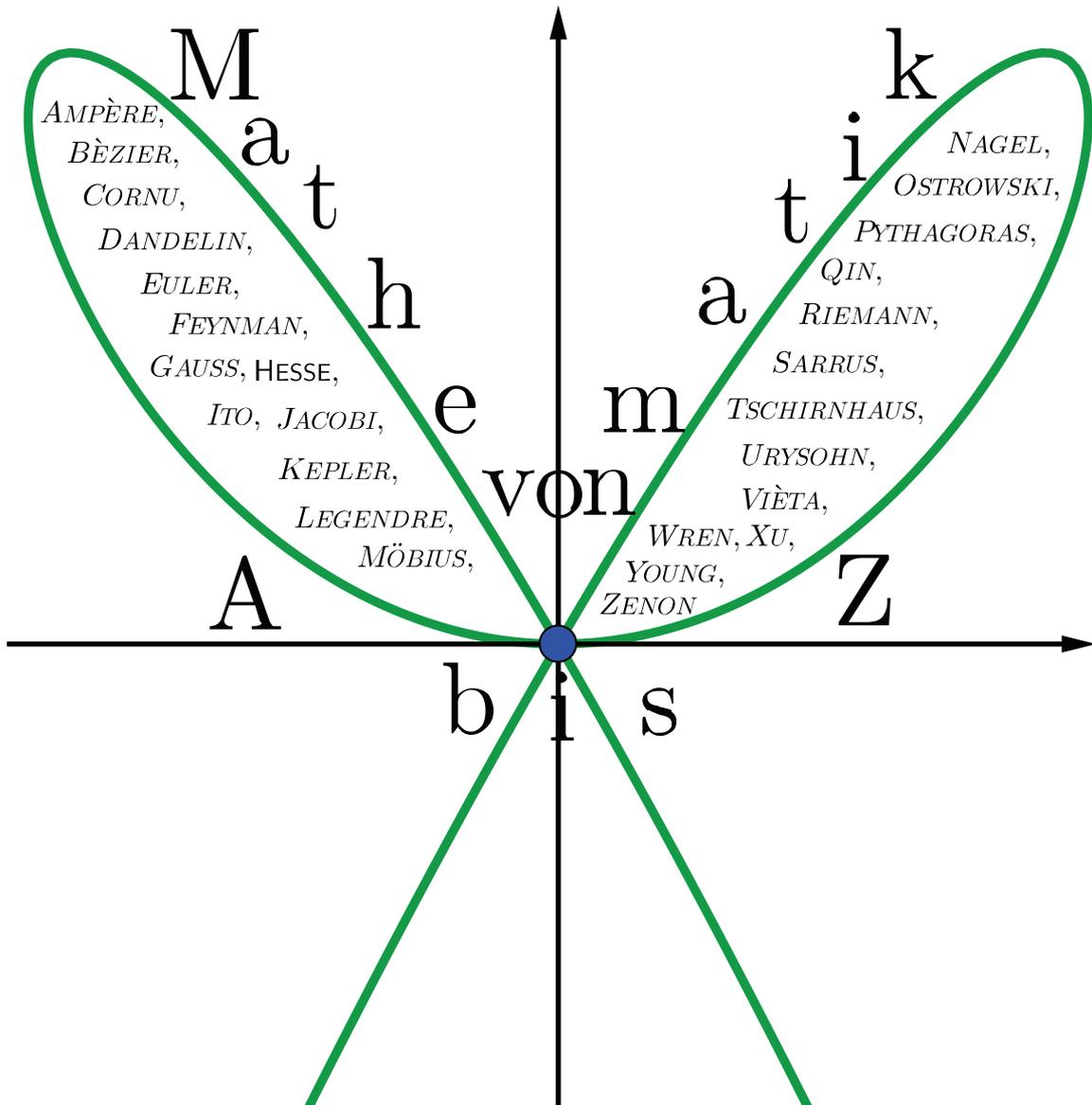


Robert Resel



erscheint 2020 im Logos-Verlag

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Analysis</b>	<b>7</b>
2.1	Eine schöne Ungleichung . . . . .	7
2.2	Ergänzung zur Regel von DE L'HOSPITAL ... . . . .	10
2.3	... sowie zur Fakultät und Gammafunktion . . . . .	12
2.4	Eine unerwartete Herleitung der EULERSchen Formel . . . . .	24
2.5	Zum Flächeninhalt des Kreises sowie ... . . . .	28
2.6	... des Hypervolumens der 4D-Kugel . . . . .	29
2.7	Eine kurze Bemerkung zur integralen Potenzregel . . . . .	29
2.8	Ein interessanter Integrationstrick: FEYNMAN-Parameter . . . . .	30
2.9	Durchschnittliche Entfernung der Erde zur Sonne . . . . .	34
2.10	Mit Iteration zum $\ln(-1)$ . . . . .	36
2.11	Bescheidene Beiträge zur CASAS-ALVERO-Vermutung . . . . .	40
2.11.1	Ein Spezialfall zum Aufwärmen . . . . .	40
2.11.2	Beweis für Polynomfunktionen dritten Grades . . . . .	41
2.11.3	Beweis für Polynomfunktionen vierten Grades . . . . .	42
2.11.4	Beweis(versuch) der CAV mittels Differentialgleichungen(?) . . . . .	43
2.12	Algebr. Geometrie - didaktisch/methodisch motiviert . . . . .	46
2.13	Optimierung ohne Differentialrechnung . . . . .	51
2.13.1	Die billigste Dose . . . . .	51
2.13.2	Kostengünstigste Stromleitung . . . . .	52
2.13.3	Maximaler Sehgenusswinkel . . . . .	54
2.13.4	VolumsgröÙte Pyramide mit Netz aus einem Quadrat . . . . .	56
2.14	MÖBIUS-Transformationen diskret, kontinuierlich und geometrisch . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Algebra</b>	<b>62</b>
3.1	Ergänzungen zu den binomischen Formeln . . . . .	62
3.2	Ergänzung zu den GRASSMANNschen Entwicklungssätzen . . . . .	63
3.3	Geometrische Reihen & Quadrate . . . . .	66
3.4	Zum Zentrum in $\mathbb{R}^{(2,2)}$ . . . . .	68
3.5	Links- und Rechtssysteme – Orientierte Volumina . . . . .	69
3.6	Ein geometrischer Weg zur CRAMERSchen Regel: Ansatz . . . . .	74
3.7	Ausblick auf algebraische Gleichungen höheren Grades . . . . .	79
3.7.1	Zum Aufwärmen: Auflösung quartischer Gleichungen . . . . .	80
3.7.2	Ausblick: Auflösbarkeit quintischer Gleichungen . . . . .	82
3.8	Hineinschnuppern in ausgewählte Beweismethoden . . . . .	86
3.8.1	Vollständige Induktion . . . . .	86
3.8.2	Rekursive und konstruktive Beweisverfahren (exemplarisch!) . . . . .	90
3.8.3	Vermischte Übungsaufgaben . . . . .	94
3.9	Ein 28. Weg zur kleinen Lösungsformel . . . . .	96

<b>4</b>	<b>Geometrie</b>	<b>100</b>
4.1	Fraktale Geometrie und ...	100
4.1.1	... lineare Differenzgleichungen	101
4.1.2	FIBONACCI-Zahlen	111
4.2	Dreiecksgeometrie	118
4.2.1	Ergänzungen zum Inkreis	118
4.2.2	GERGONNEScher Punkt und GERGONNESche Gerade	120
4.2.3	NAGELSche Punkte sowie eine GERGONNESche Ergänzung	124
4.2.4	Ergänzung zu den GERGONNESchen Punkten	127
4.2.5	Ein später Nachfolger von MENALAOS und CEVA	130
4.2.6	Höhenfußpunktdreieck, Cosinus-Summensatz und Ungleichungen	131
4.2.7	Vier Punkte in kollinear Lage	134
4.2.8	$\Sigma$ - ein neuer merkwürdiger Dreieckspunkt	135
4.2.9	Erste Ergänzung zu $\Sigma$	136
4.2.10	Zweite Ergänzung zu $\Sigma$	138
4.2.11	Ein hübscher Satz aus der Dreiecksgeometrie ...	139
4.2.12	Der FERMAT-Punkt	141
4.3	BÉZIER-Kurven	144
4.3.1	Genese	144
4.3.2	Aufgaben zu BÉZIER-Kurven	151
4.4	Ergänzungen zur höherdimensionalen Geometrie	170
4.4.1	Einstimmung auf die höherdimensionale Geometrie: Kugelvolumen	170
4.4.2	Hypervolumen der vierdimensionalen Sphäre via Kugelkoordinaten	174
4.4.3	Sphären: Höhere Dimensionen	175
4.5	Neue Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes	181
4.5.1	Beweis (1)1	181
4.5.2	Beweis (1)2	183
4.5.3	Eine aus dem (1)2. Beweis generierte Kubik mit Focus auf ihre Schleife	184
4.5.4	Beweis (1)3	189
4.5.5	Beweis (1)4	190
4.5.6	Weitere Beweise des Lehrsatzes von PYTHAGORAS	192
4.5.7	Unendliche geometrische Reihen und der Lehrsatz des PYTHAGORAS	208
4.5.8	Geometrische Reihen, der Satz des PYTHAGORAS und die Kardioide	209
4.5.9	33. PLS-Beweis	213
4.5.10	Weitere Kurven aus einer PYTHAGORAS-Figur	218
4.6	SODDY-Kreise	226
4.6.1	Problemstellung und Gleichung von DESCARTES	226
4.6.2	Von den Krümmungen zu den Radien	231
4.7	Kegelschnitte	234
4.7.1	Schnitt zweier Kegelschnitte in allgemeiner Lage	237
4.7.2	Die Parabel als Kegelschnitt	244
4.8	Augensterne der Geometrie	248
4.8.1	Partielle Dreieckspartition	248
4.8.2	Aus zwei mach drei (Dreiecke)	250
4.8.3	Aus allgemein mach speziell	252
4.8.4	Peripheriewinkel und Umkreis	254
4.8.5	Parallele Sehnen berührender Kreise	256

4.8.6	Kopunktale Geraden aus zwei Kreisen . . . . .	258
4.8.7	Rechtecksgenerierte Höhenschnittpunkte . . . . .	260
4.8.8	Die Trinität der Beweisführung . . . . .	262
4.8.9	Über Höhen, Schwerlinien und Winkelsymmetralen . . . . .	264
4.8.10	Über Höhen, Parallelen und Umkreispunkte . . . . .	265
4.8.11	Aus zwei mach drei (Kreise) . . . . .	267
4.8.12	Sehnenlängensummen . . . . .	269
4.8.13	Ein besonderes Paar kongruenter Strecken . . . . .	271
4.9	Pyramidenhalbierung und eine Überraschung . . . . .	273
4.10	Die Scherenkurve . . . . .	275
4.11	Tetraederinkugeln . . . . .	277
4.12	Würfel durch Würfel . . . . .	279
4.13	Das einschalige Rotationshyperboloid . . . . .	282
4.14	Ergänzungen zur Traktrix und zur Pseudosphäre . . . . .	290
4.15	Trapeze mit Inkreis . . . . .	299
<b>5</b>	<b>Zahlentheorie</b>	<b>301</b>
5.1	Motivation zur Rekursion bzw. Iteration . . . . .	301
5.2	Disl: Ein Muster auf verschiedenen Niveaustufen . . . . .	302

## Literatur

- [1] ANTON, Howard (1999<sup>6</sup>): Calculus. A new horizon. Wiley & sons, New York.
- [2] AUMANN, Günter (2009<sup>3</sup>): Euklids Erbe. Ein Streifzug durch die Geometrie und ihre Geschichte. WBG, Darmstadt.
- [3] BAPTIST, Peter (1992): Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie. BI-Verlag, Mannheim.
- [4] BASIEUX, Pierre (2004<sup>5</sup>): Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze. Rowohlt, Reinbek.
- [5] BAULE, Bernhard (1963<sup>6</sup>): Variationsrechnung. Hirzel, Leipzig.
- [6] BEHR, Reinhart (1993): Fraktale - Formen aus Mathematik und Natur. Klett, Stuttgart.
- [7] BEHREND, Erhard (2004). Analysis Band 2. Vieweg, Braunschweig.
- [8] BORWEIN, Jonathan und Keith DEVLIN (2011): Experimentelle Mathematik. Spektrum, Heidelberg.
- [9] BOYCE, William E. und Richard C. DI PRIMA (1995): Gewöhnliche Differentialgleichungen. Spektrum, Heidelberg.
- [10] BRAUNER, Heinrich (1986): Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie. Springer / Fachbuchverlag Leipzig, Berlin / Leipzig.
- [11] CASAS-ALVERO, Eduardo (2001): Higher order polar germs. In: Journal of Algebra 240, S. 326-337.
- [12] CIGLER, Johann (1992): Grundideen der Mathematik. BI-Verlag, Mannheim.
- [13] COURANT, Richard und Herbert ROBBINS (1992<sup>4</sup>): Was ist Mathematik? Springer, Berlin.
- [14] ELSTRODT, Jürgen (1996): Maß- und Integrationstheorie. Springer, Berlin.
- [15] FARIN, Gerald und Dianne HANSFORD (2003): Lineare Algebra: Ein geometrischer Zugang. Springer, Berlin.
- [16] FORDER, Henry George (1941): The Calculus of extension. Cambridge University Press.
- [17] FUNK, Paul (1962): Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg.
- [18] GISCH, David und Jason M. RIBARDO (2004): Appolonius' problem: A study of solutions and their connections. In: American journal of undergraduate research Vol. 3/1, S. 15-26.

- [19] GLAESER, Georg und Konrad POLTHIER (2009): Bilder der Mathematik. Spektrum, Heidelberg.
- [20] HAAG, Wilfried (2003): Wege zu geometrischen Sätzen. Klett, Stuttgart.
- [21] HAVIL, Julian (2007): Gamma. Eulers Konstante, Primzahlstrände und die Riemannsche Vermutung. Springer, Berlin.
- [22] HELLUS, Michael (2013<sup>3</sup>): Lineare Algebra nicht-vertieft. Logos, Berlin.
- [23] HLAWKA, Edmund, Johannes SCHOISSENGEIER und Rudolf TASCHNER (1986): Geometrische und analytische Zahlentheorie. Manz, Wien.
- [24] HOFFMANN, Dieter und Friedrich-Wilhelm SCHÄFKE (1992): Integrale. BI-Verlag, Mannheim.
- [25] HUMENBERGER, Johann und Hans-Christian REICHEL (1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. BI-Verlag, Mannheim.
- [26] JAROS, Albert, Alfred NUSSBAUMER und Peter NUSSBAUMER (2012): Physik compact Basiswissen 7. öbv, Wien.
- [27] KAMKE, Erich (1965<sup>5</sup>): Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen II: Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Funktion. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig.
- [28] KOECHER, Max (1992<sup>3</sup>): Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Springer, Berlin.
- [29] KORECKY, Jan (2015): Der Goldene Schnitt. Vorwissenschaftliche Arbeit, Wien.
- [30] KÖHLER, Günter (2006): Analysis. Heldermann, Lemgo.
- [31] KÖNIG, Wolfgang und Jürgen Sprekels (2016) (Hrsg.): Karl Weierstraß (1815-1897). Aspekte seines Lebens und Werkes. Springer Spektrum, Wiesbaden.
- [32] KÖNIGSBERGER, Konrad (1999<sup>4</sup>): Analysis 1. Springer, Berlin.
- [33] MATTHIESSEN, Ludwig (1878): Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. B.G. Teubner, Leipzig.
- [34] MESCHKOWSKI, Herbert (1968): Mathematiker-Lexikon. BI-Verlag, Mannheim.
- [35] PILLWEIN, Gerhard, Andreas ASPERL, Robert MÜLLNER und Michael WISCHOUNIG (2006): Raumgeometrie. Konstruieren und Visualisieren. öbv&hpt, Wien.
- [36] REICHEL, Hans-Christian, Erich WINDISCHBACHER, Robert RESEL, Volkmar LAUTSCHAM und Stefan GÖTZ (1997): Wege zur Mathematik - Anregungen und Vertiefungen. öbv&hpt, Wien.
- [37] RESEL, Robert (1995): Reihenentwicklungen - Potenzreihen. Fachbereichsarbeit, Wien.

- [38] RESEL, Robert (1999): Ausbaumöglichkeiten der Oberstufen-Schulmathematik. Diplomarbeit, Universität Wien.
- [39] RESEL, Robert (2001): Didaktisch-methodische Überlegungen zu ausgewählten Kapiteln des Geometrieunterrichts der AHS-Oberstufe. Dissertation, Universität Wien.
- [40] RESEL, Robert (2014): Reise zum Mittelpunkt der Mathematik. Logos, Berlin.
- [41] RESEL, Robert (2014): In 101 Abschnitten um die mathematische Welt. Logos, Berlin.
- [42] RESEL, Robert (2017<sup>2</sup>): 20000 Kurven unter der Enveloppe. Logos, Berlin.
- [43] RESEL, Robert (2017): Von der Addition bis zur  $z$ -Koordinate. Logos, Berlin.
- [44] RICHTER-GEBERT, Jürgen und Thorsten ORENDT (2009): Geometriekalküle. Springer, New York/Berlin/Heidelberg.
- [45] ROTH-SONNEN, Nicole, Gunter STEIN und Astrid STENGEL (2005): Knobelaufgaben für die 7. und 8. Klasse. Cornelsen Scriptor, Berlin.
- [46] SCHARK, Rainer (1992): Konstanten in der Mathematik - variabel betrachtet. Harri Deutsch, Frankfurt.
- [47] SCHECHTER, Martin (2002<sup>2</sup>): Principles of Functional Analysis. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.
- [48] SCHEID, Harald (1997): Folgen und Funktionen. Einführung in die Analysis. Spektrum, Heidelberg.
- [49] SCHEID, Harald und Wolfgang SCHWARZ (2007<sup>4</sup>): Elemente der Geometrie. Spektrum, Heidelberg.
- [50] SCHEID, Harald und Wolfgang SCHWARZ (2008<sup>5</sup>): Elemente der Arithmetik und Algebra. Spektrum, Heidelberg.
- [51] SCHUMANN, Heinz (2011): Elementare Tetraedergeometrie. Franzbecker, Hildesheim/Berlin.
- [52] SCHUPP, Hans und Heinz DABROCK (1995): Höhere Kurven. Situative, mathematische, historische und mathematische Aspekte. BI-Verlag, Mannheim.
- [53] SCRIBA, Christoph J. und Peter SCHREIBER (2001): 5000 Jahre Geometrie. Springer, Berlin.
- [54] SOMINSKIJ, I.S., L.I. GOLOVINA und I.M. JAGLOM (1986): Die vollständige Induktion. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [55] SONAR, Thomas (2011): 3000 Jahre Analysis. Geschichte, Kulturen, Menschen. Springer, Berlin/Heidelberg.
- [56] STEWART, Ian (2015<sup>4</sup>): Galois theory. CRC Press, Boca Raton.

- [57] STRAUSS, Walter A. (1995): Partielle Differentialgleichungen. Eine Einführung. Vieweg, Braunschweig.
- [58] TASCHNER, Rudolf (1999): Mathematik 2. Übungs- und Lehrbuch für die 6. Klasse AHS. Oldenbourg, Wien.
- [59] TVEITO, Aslak und Ragnar WINTHER (2002): Einführung in partielle Differentialgleichungen. Ein numerischer Zugang. Springer, Berlin.
- [60] WERNER, Dirk (1995): Funktionalanalysis. Springer, Berlin.
- [61] WONG, Baoswan Dzung (2003): Bézierkurven gezeichnet und gerechnet. Orell Füssli, Zürich.
- [62] ZEITLER, Herbert und Dusan PAGON (2000): Frakale Geometrie - Eine Einführung. Vieweg, Braunschweig.