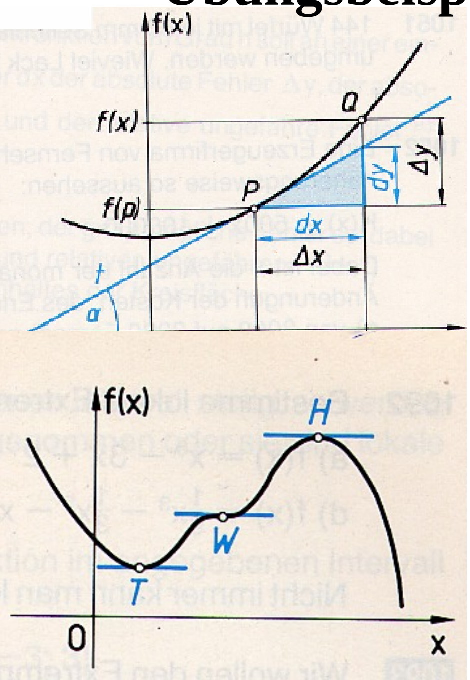
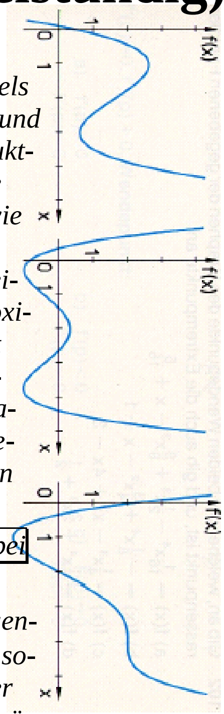
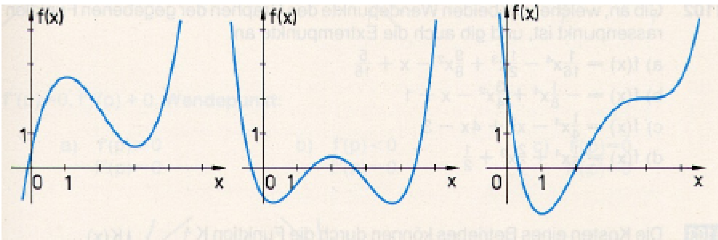
Übungsbeispiele für die 2. Schularbeit (zweistündig)

(7A, Gymnasium, 2011/12)



*Diese Beispiele sollen durch jene für den ersten Teil des Kapitels "Differentialrechnung" relevanten Grundaufgaben {Herleiten und Anwenden der Summen-, Differenzen-, Ketten-, Potenz-, Produkt- und Quotientenregel, ebenso der Differentiationsregeln für die elementartranszendenten Funktionen $y=e^x$, $y=\ln x$, $y=\sin x$ sowie $y=\cos x$, Durchführen von Kurvendiskussionen [Extrem- und Wendestellen inkl. Klassifikation selbiger, analytische Beschreibung von Tangenten (im Sinne der bestmöglichen Linearapproximation) an Graphen differenzierbarer Funktionen sowie damit einhergehender Schnitt- und Winkelberechnungsaufgaben, Beschreibung des Monotonie- und Krümmungsverhaltens, Oskulationseigenschaft der Wendetangente, verbales Erklären und Begründen sowie "Prognosen" von Kurvenverläufen] anhand von Polynomfunktionen (inkl. dem Abspalten von Lösungen – von Gleichungen der Form f(x)=0 oder f´(x)=0 oder f´´(x)=0, wobei f die in Rede stehende Polynomfunktion bezeichnet – mittels HORNER-Schema) dritten bis sechsten Grades (wobei mit steigendem Grad vermehrt nur mehr Sondertypen zu behandeln sind) sowie rationalen Funktionen (ohne Graph)} führen, die du bei der zweiten Schularbeit **in jedem Fall** unter Beweis stellen wirst müssen.*





ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!

1) Bilde die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = x^2}$ und überprüfe die Verträglichkeit mit der Spaltform der Parabeltangente!

2) Bilde die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = kx}$ (wobei k eine Konstante ist – Bedeutung von k?) und überprüfe die Verträglichkeit mit der seit der 4. Klasse bekannten Bedeutung von k!

3) Bilde die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = c}$ (wobei c eine Konstante ist) und überprüfe die Verträglichkeit mit dem aufgrund des Funktionsgraphen von f nahe liegend zu vermutenden Resultat!

4) Überlege (n wir gemeinsam im Unterricht!), wie man die Summen- bzw. Differenzenfunktion zweier differenzierbarer Funktionen differenziert!

5) Bilde die erste Ableitungsfunktion der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = \sqrt{x}}$ und überprüfe die Verträglichkeit mit der Spaltform der Parabeltangente!

6) Um analytisch die Tangente an einen Kreis zu bestimmen, gehe(n wir im Unterricht!) von der Kreisgleichung $\boxed{k : x^2 + y^2 = r^2 \ (*)}$ aus und überlege(n wir), wie man die (eine der!) durch Auflösen von (*) nach y resultierende(n) Funktion(en!) differenziert!

7) Bilde die erste Ableitungsfunktion der natürlichen Exponentialfunktion, also der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = e^x}$!

8) Bilde unter Verwendung der in Aufgabe 7) gewonnenen Differentiationsregel sowie der **KETTENREGEL** die erste Ableitungsfunktion der natürlichen Logarithmusfunktion, also der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = \ln x}$!

9) Alternative zu Aufgabe 7 (**HAUSÜBUNG!**):
Bilde unter Verwendung der in Aufgabe 8) gewonnenen Differentiationsregel sowie der **KETTENREGEL** die erste Ableitungsfunktion von $\boxed{y=f(x)=e^x}$!
Äußere allgemeine kritische Gedanken über diese Vorgehensweise!

10) Bilde unter Verwendung der in Aufgabe 8) gewonnenen Differentiationsregel sowie der **KETTENREGEL** die erste Ableitungsfunktion von $\boxed{y = f(x) = x^\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig, "allgemeine Potenzfunktion")!

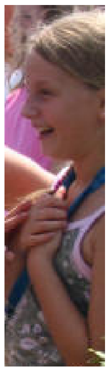
11) Beweise unter Verwendung des "Trigonometrischen PYTHAGORAS" (5. Klasse!) sowie der **KETTENREGEL** die Differentiationsregeln $\boxed{D(\sin x) = \cos x}$ sowie $\boxed{D(\cos x) = -\sin x}$!

12) Überlege (n wir gemeinsam im Unterricht!), wie man die Produktfunktion zweier differenzierbarer Funktionen differenziert (Aufgabe 8 und **KETTENREGEL** verwenden)!

13) (**HAUSÜBUNG!**): Überlege dir, wie man die Quotientenfunktion zweier differenzierbarer Funktionen differenziert (Aufgabe 8 und **KETTENREGEL** verwenden)!

Für Denker eine zweite (von vielen weiteren) Variante(n):

↓↓
Auswahl an "hochgradig Denkverdächtigen" … ☺
(… auch als sie – wie z. T. auf diesen Fotos noch jünger waren …)



Gehe von $y = \frac{u}{v}$ aus, mache diese Funktionsgleichung bruchfrei und verwende die Produktregel (Aufgabe 12)!

14) Leite aus der Produktregel die sogenannte "*REGEL VOM KONSTANTEN FAKTOR*" ab, indem du eine der beiden "Faktorfunktionen" mit einer Konstanten belegst.
Wo liegt der Unterschied zu einem konstanten Summand?

15) Differenziere die Tangensfunktion!

16) Differenziere: $y = f(x) = x^4 - 4x^3 + 27$

17) Differenziere: $y = f(x) = -x^4 + 2x^3 - 2tx + t$

18) Fortsetzung von Aufgabe 17): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

19) Differenziere: $y = f(x) = x^4 + qx^3 + q^2x^2 + q^3x + q^4$

20) Fortsetzung von Aufgabe 19): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

21) Differenziere: $y = f(x) = x^4 - 8tx^3 + 18t^2x^2$

22) Fortsetzung von Aufgabe 21): Löse die Gleichungen $f'(x) = 0$ sowie $f''(x) = 0$!

23) Differenziere: $y = f(x) = x^4 - 11x^2$

24) Fortsetzung von Aufgabe 23): Löse die Gleichung $f(x) = f''(x)$!

25) Differenziere: $y = f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 100x + 57$

26) Fortsetzung von Aufgabe 25): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

27) Differenziere und löse die Gleichung $f'(x) = 0$: $y = f(x) = \frac{x^3}{x^2+6x+12}$

28) Differenziere $f'(x)$ aus Aufgabe 27) nochmals und löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

29) … Differenziere und löse die Gleichung $f'(x) = 0$: $y = f(x) = \frac{x^2}{49x^2-972x+6804}$

30) Differenziere: $y = f(x) = \frac{84672}{x^2+432}$

31) Differenziere $f'(x)$ aus Aufgabe 30) nochmals!

32) a) Zur Entspannung zwischendurch (Niveau 3ABCDE, 2007/08! ☺):
Multipliziere aus: $(x^2-3x-54)\cdot(x-18)=\ldots$
b) Differenziere $f'(x)$ aus Aufgabe 29) nochmals und löse die Gleichung $f''(x) = 0$ unter Verwendung von Aufgabenteil a)!

33) Differenziere: $y = f(x) = \frac{196x^3}{x^2+363}$

34) Differenziere $f'(x)$ aus Aufgabe 33) nochmals!

35) Rechne nach, dass die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^2\cdot e^x$ die Bedingung $\boxed{y'' - 2y' + y = 2e^x}$ ("Differentialgleichung") erfüllt.

↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

Man sagt in diesem Zusammenhang auch, dass f eine (partikuläre) Lösung der Differentialgleichung ist. (Wie man Differentialgleichungen löst, lernst du – wenn überhaupt! – erst auf der Universität!)

36) Zeige, dass $y = f(x) = e^x\cdot\sin x$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y''' - 2y' + 4y = 0$ ist!

37) Zeige, dass unabhängig vom Parameter t in der Schargleichung $y = \frac{\sqrt{3}}{18}\cdot x^3 + tx^2 + 2\sqrt{3}\cdot t^2x + 4t^3$ y eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'\cdot y''\cdot y''' = y$ ist.

38) Zeige, dass $y = f(x) = \frac{x^4}{144} + \frac{x^3}{6}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y''^2 = y + x^2$ ist!

39) Differenziere: $y = f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$

40) Fortsetzung von Aufgabe 39): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

41) Differenziere: $y = f(x) = x^5 - 10x^4 + 30x^3$

42) Fortsetzung von Aufgabe 41): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

43) Differenziere: $y = f(x) = x^6 - 5x^4 + 15x^2$

44) Fortsetzung von Aufgabe 43): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

45) Differenziere: $y = f(x) = x^6 - 6x^5 + 10x^4$

46) Fortsetzung von Aufgabe 45): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

47) Differenziere: $y = f(x) = x^6 - 39x^5 + 360x^4$

48) Fortsetzung von Aufgabe 47): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

49) Differenziere: $y = f(x) = \frac{p^4x^2 + p^3x + p^2}{px + 1}$

50) Fortsetzung von Aufgabe 49): Löse die Gleichung $f'(x) = 0$!

51) Differenziere: $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 6x + 3}$

52) Fortsetzung von Aufgabe 51): Löse die Gleichung $f'(x) = 0$!

53) Differenziere: $y = f(x) = \frac{1}{9} \cdot \frac{27x^2 + 1}{3x^2 + 1}$

54) Fortsetzung von Aufgabe 53): Löse die Gleichung $f''(x) = 0$!

55) Differenziere: $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$

56) Fortsetzung von Aufgabe 55): Zeige, dass für die Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung $f'(x) = 0$ die Beziehung $x_1 \cdot x_2 = -1$ gilt! (*Hinweis:* VIETA-Gruppe 5. Klasse)

57) Differenziere: $y = f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$

58) 1. Fortsetzung von Aufgabe 57): Rechne nach, dass $f'\left(-\sqrt{3}-1\right)=f'\left(-\sqrt{3}+1\right)$ gilt!

59) 2. Fortsetzung von Aufgabe 57): Löse die Gleichung $f''(x)=0$!

60) Differenziere: $y=f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3}$

61) Fortsetzung von Aufgabe 60): Löse die Gleichung $f''(x)=0$!

62) Differenziere sowohl $y=f(x)=\frac{1}{3}\cdot x\sqrt{x}$ als auch $y=g(x)=\dfrac{12\sqrt{6}}{x}$!

63) Löse die Gleichung $f(x)=g(x)$ und berechne für die Lösung x jeweils $f'(x)$ und $g'(x)$!
Welchen Schluss ziehst du aus diesen beiden Resultaten?

64) Überprüfe, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=\dfrac{x^4}{x+1}$
eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'=\dfrac{4y}{x}-\dfrac{y^2}{x^4}$ ist.

65) Verifiziere, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^3}$
eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'=\dfrac{3}{(x+1)^4}-\dfrac{2y}{x}$ ist.

66) Kontrolliere, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$
für $x\in\mathbb{R}^+\backslash\{2\}$ eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'=\sqrt{\dfrac{y}{x}}-\dfrac{2y}{x^2}-\dfrac{8x}{(x-2)^3}$ ist.

67) Zeige, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^5}$
eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'=\dfrac{5}{(x+1)^6}-\dfrac{4y}{x}$ ist.

68) Weise nach, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=\dfrac{x^2}{x^5+1}$
eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'=\dfrac{2y}{x}-5x^2y^2$ ist.

69) Beweise, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=\dfrac{x^5}{x+1}$
eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'=\dfrac{5y}{x}-\dfrac{y^2}{x^5}$ ist.

70) Überprüfe, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^4}$ ist.

71) Verifiziere, dass die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^3}$

eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{6}{(x^2+1)^4} - \frac{5y}{x}$ ist.

72) Satz. Jeder Vertreter der durch die gerahmte Gleichung definierte Kurvenschar weist genau zwei Extrempunkte auf, die auf der Parabel p [p: $y=2\cdot x^2$] liegen.

$$\boxed{y = f_t(x) = \frac{x^4 + 3t^4}{x^2 + t^2}}$$

Verifiziere diesen Satz für f_1 und klassifiziere die Extrempunkte!

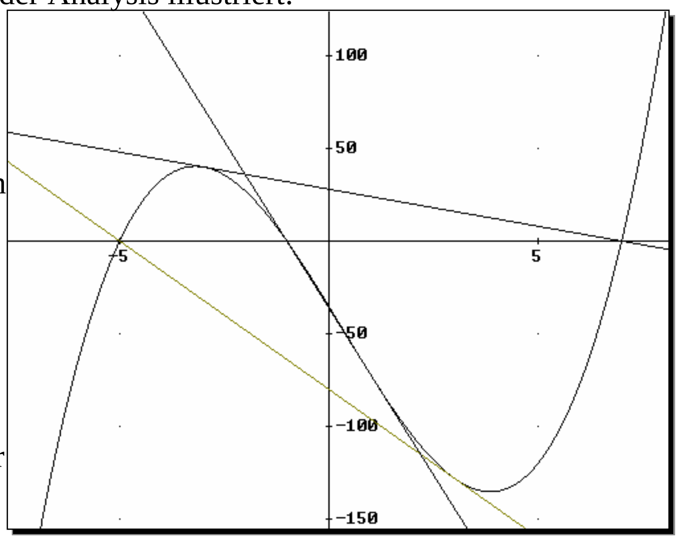
73) Diskutiere die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 504x$.

74) Diskutiere die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 + 6x^2 - 135x$.

75) Diskutiere die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 - 39x^2 + 360x$.

76) In nebenstehender Abbildung ist folgender Lehrsatz der Analysis illustriert:

SATZ. Sind $N_1(a|0)$, $N_2(b|0)$ und $N_3(c|0)$ die Nullstellen einer Polynomfunktion dritten Grades f und ferner $P_1(x_1|f(x_1))$, $P_2(x_2|f(x_2))$ sowie $P_3(x_3|f(x_3))$ samt ihren Tangenten t_1, t_2 und t_3 an Γ_f in P_1, P_2 und P_3 jene Punkte auf Γ_f, die durch $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = \frac{b+c}{2}$ sowie $x_3 = \frac{a+c}{2}$ festgelegt sind, dann gelten stets die Inzidenzen $N_3 \in t_1$, $N_1 \in t_2$ sowie $N_2 \in t_3$.



Verifiziere diesen Satz anhand der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 - x^2 - 37x - 35$.

77) Zeige, dass für die zweite Ableitung y'' von $y = \frac{x^2 + a}{x + b}$ die Darstellung $y'' = 2\cdot\frac{a+b^2}{(x+b)^3}$ gilt. Was folgt daraus differentialgeometrisch?

78) Gegeben ist die Polynomfunktion dritten Grades mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 - 2x^2$.

a) Skizziere den Graphen Γ_f ("Kurvendiskussion light")!

b) Rechne nach, dass Γ_f von der Tangente an Γ_f im Kurvenpunkt $P(1|f(1))$ nochmals im Hochpunkt *geschnitten* wird.

c) Kontrolliere durch Rechnung, dass die Kurvennormale n an Γ_f in ebenjenem Punkt P durch die rechtsseitige Nullstelle von f verläuft und berechne auch die Koordinaten des dritten Schnittpunkts von n mit Γ_f!

79) Diskutiere die Funktionen f und g mit nebenstehenden Funktionsgleichungen und verifiziere, dass Γ_f und Γ_g einander im *gewöhnlichen Wendepunkt* von Γ_g rechtwinklig schneiden!

$$y = f(x) = \frac{\sqrt{7}}{56} \cdot \left(x^4 - 4x + 3\right)$$

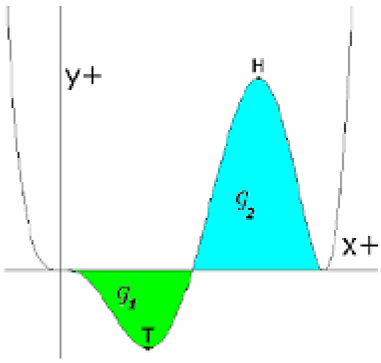
$$y = g(x) = \frac{\sqrt{7}}{56} \cdot \left(x^4 - 4x^3 + 27\right)$$

80) Beweise, dass jede Kurve aus der Kurvenschar mit der Gleichung $\boxed{y = -x^4 + 2x^3 - 2tx + t}$ genau zwei Wendepunkte besitzt und berechne deren Koordinaten in Abhängigkeit des *Scharparameters* t!

81) a) Weise nach, dass die Kurven mit den Gleichungen $y = x^4 - 4tx^3$ und $y = 18t^2x^2 - 108t^3x + 135t^4$ einander im gemeinsamen Tiefpunkt T oskulieren und berechne die Koordinaten von T in Abhängigkeit des *Scharparameters* t!

b) Begründe, warum die beiden Kurven noch einen zweiten gemeinsamen Punkt S aufweisen müssen und berechne dessen Koordinaten (wiederum in Abhängigkeit von t).

82)



In obiger Figur ist der Graph der Funktion f $[y = f(x) = x^3(x-6)(x-12)^2]$ zusammen mit ihrem Hochpunkt H sowie einem Tiefpunkt T abgebildet. Berechne deren Koordinaten!

83) Zur Entspannung ein klein wenig reine Rechentechnik für zwischendurch:
Differenziere die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=x^3\cdot(x-4)\cdot(x-7)^2$!

84) Für die via $y = x^4 - 8tx^3 + 18t^2x^2$ festgelegte Kurvenschar sind folgende Punkte zu bearbeiten:

a) Beweise, dass jeder Vertreter der Schar einen Sattelpunkt aufweist.

b) Welche Aussagen lassen sich aufgrund von a) über Nullstellen, Extremstellen und weitere Wendestellen treffen?

c) Quantifiziere deine Erkenntnisse aus a) und b)!

+d) Zeige, dass die Wendepunkte der Kurvenschar auf den Kurven mit den Gleichungen $y = \frac{1}{3} \cdot x^4$ und $y = 11x^4$ liegen.

85) a) Zeige, dass die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $\boxed{y = f(x) = \mathbf{2x^2}}$ und $\boxed{y = g(x) = \mathbf{32x^3 + 10x^2}}$ einen gemeinsamen Tiefpunkt T besitzen (Achtung! Auch mit Brüchen muss nach wie vor gerechnet werden können!), also einander in T berühren. Wie viele Schnittpunkte fallen daher zusammen?

b) Begründe, warum Γ_f und Γ_g wegen a) noch einen weiteren Schnittpunkt S aufweisen müssen, berechne seine Koordinaten und zeige, dass Γ_f und Γ_g einander in S rechtwinklig schneiden.

86) Die Polynomfunktionen f und g mit den rechts angeführten Funktionsgleichungen weisen offensichtliche Ähnlichkeiten auf.

$$\boxed{\begin{aligned} y = f(x) &= \frac{1}{80}\cdot\left(x^4 - 12x^3 + 30x^2 + 100x + 57\right) \\ y = g(x) &= \frac{-1}{80}\cdot\left(x^4 - 12x^3 + 30x^2 - 28x - 167\right) \end{aligned}}$$

a) Welche gemeinsamen Eigenschaften (bis auf den Grad! ☺) lassen sich a priori feststellen?

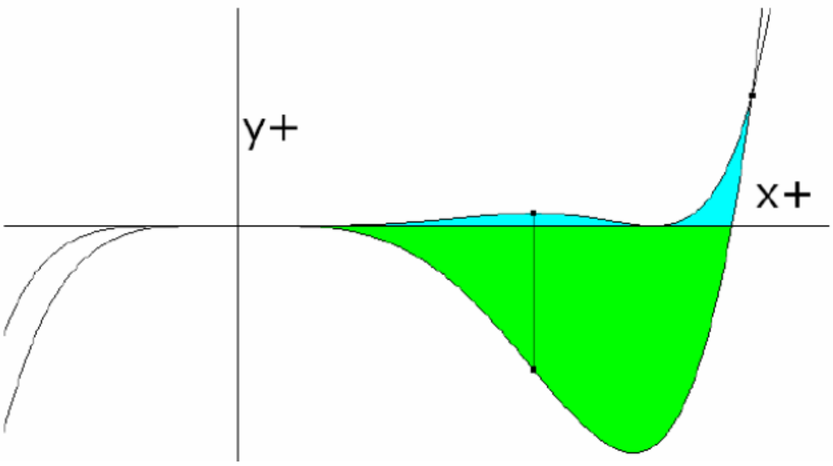
b) Diskutiere beide Funktionen, wobei die exakte Bestimmung der Nullstellen von g unterbleiben kann.

87) Die Graphen der Polynomfunktionen f $[y=f(x)=650x^4\cdot(x-25)]$
g $[y=f(x)=x^5\cdot(x-21)^2]$ sind in der unteren Figur abgebildet.

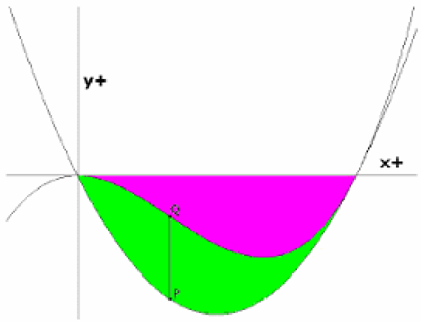
a) Ordne zunächst jedem Graphen die entsprechende Funktionsgleichung zu (Begründung!).

b) Zeige, dass eine Extremstelle eine der beiden Funktionen mit einer Wendestelle der anderen Funktion zusammenfällt.

c) Beträgt der kleine gefärbte Teil mehr oder weniger als 10% des gesamten von den beiden Graphen begrenzten Gebiets?



88)



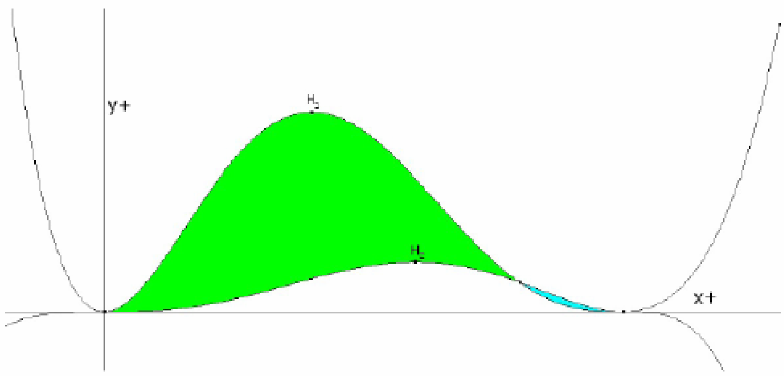
In obiger Figur sind die Kurven mit den Gleichungen $y = x^3 - 3x^2$ und $y = 3x^2 - 9x$ abgebildet.

(a) Ordne der jeweiligen Kurve die entsprechende Gleichung zu und begründe deine Wahl jeweils!

(b) Zeige, dass die beiden Kurven gemeinsame Nullstellen haben und einander in einer davon sogar berühren!

(c) Ermittle die Koordinaten der Endpunkte des größten vertikalen Durchmessers der von den beiden Kurven begrenzten Fläche!

89)



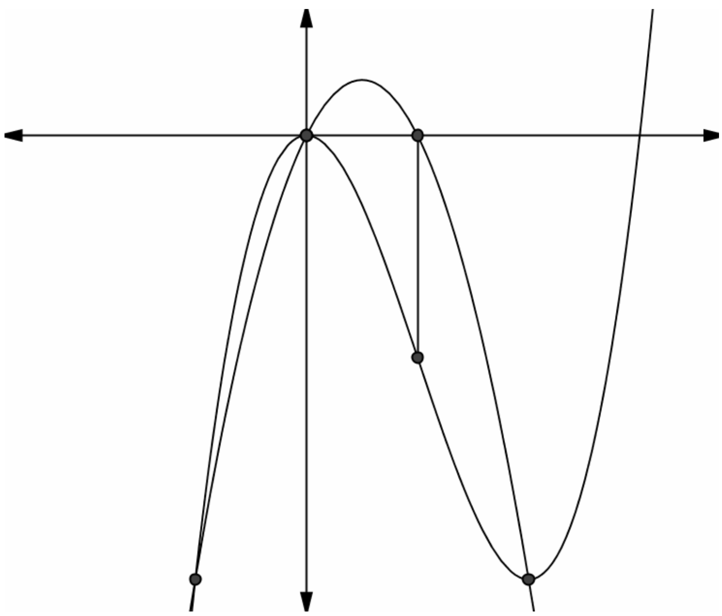
In obiger Figur sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y = f(x) = x^3(x-5)^2$ und $y = g(x) = 4x^2(5-x)^3$ abgebildet.

(a) Berechne die Koordinaten von H_1 und H_2 und begründe deine Zuordnungen!

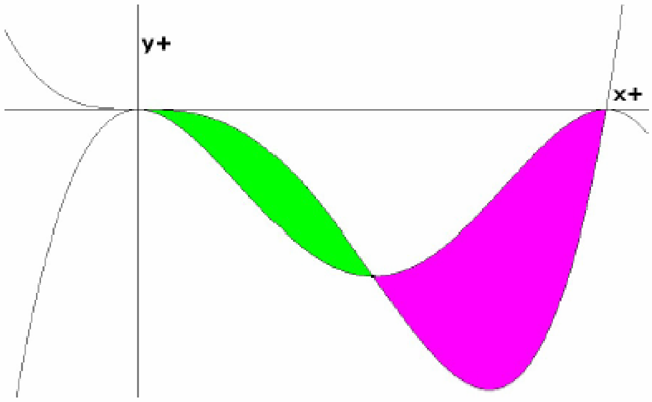
90) $y=f(x)=x^3-3x^2$ und $y=g(x)=-2x^2+2x$ sind die Funktionsgleichungen zweier Polynomfunktionen, deren Graphen in nebenstehender Figur abgebildet sind.

a) Ordne den Kurven den jeweils passenden Funkttionsgraphen zu und begründe deine Wahl genau!

b) Zeige, dass die beiden Kurven einander in den Extrempunkten einer der beiden Kurven (Welcher? Begründe!) schneiden, von denen eine auch eine gemeinsame Nullstelle ist. Zeige ferner, dass eine andere Nullstelle ebenso die Wendestelle der anderen Funktion ist!



91)



In obiger Figur sind die Kurven mit den Gleichungen $y = x^4 - 4x^3$ und $y = -x^4 + 8x^3 - 16x^2$ abgebildet.

(a) Ordne der jeweiligen Kurve die entsprechende Gleichung zu und begründe deine Wahl jeweils!

(b) Zeige, dass die beiden Kurven gemeinsame Nullstellen haben und einander in einer davon sogar berühren!

(c) Zeige ferner, dass die beiden Kurven einander ferner in einem Tiefpunkt einer der beiden (Welcher? Begründe!) Kurven schneiden!

92) **<u>Eine (von fünf) Aufgabe(n) aus einer dreistündigen Schularbeit (< 3 Stunden Arbeitszeit):</u>**

Eine Polynomfunktion vierten Grades f, deren Graph durch den Koordinatenursprung verläuft, erfüllt die Differentialgleichung $y''^2 = y + x^2$.

(a) Ermittle die Funktionsgleichung von f [Res.: $y = x^4/144 + x^3/6$].

(b) Diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen.

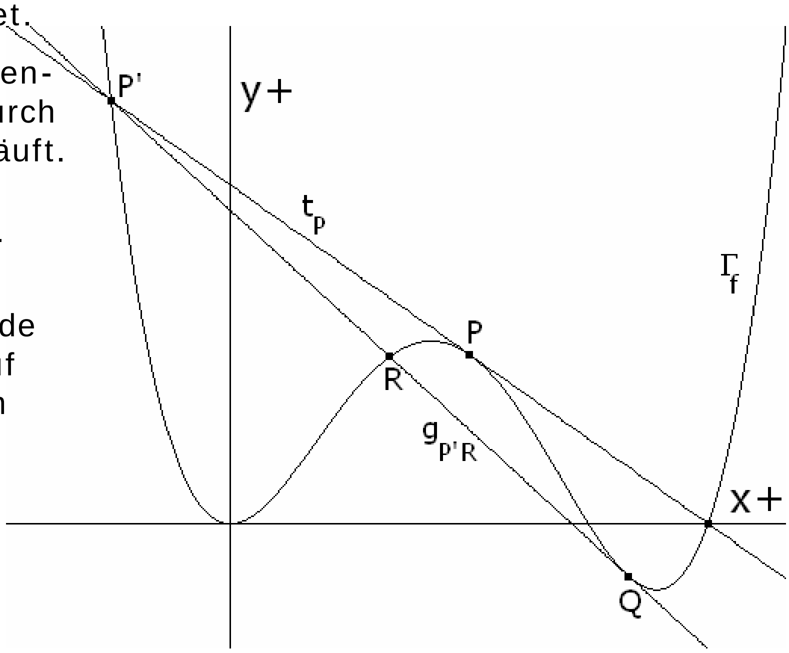
(c) Zeige, dass die Wendetangentenabschnitte zwischen den Schnittpunkten mit dem Graphen von f einander in ihrem Schnittpunkt im Verhältnis 3:1 teilen.

93) Nebenstehend ist der Graph der Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=x^4-21x^3+108x^2$ zusammen mit seinen Kurvenpunkten P(6|f(6)) und R(4|f(4)) abgebildet.

a) Stelle eine Gleichung der Tangente t_P auf und zeige, dass sie durch die größte Nullstelle von f verläuft.

b) Berechne die Koordinaten des in der Abbildung eingezeichneten Schnittpunkts P'!

c) Stelle eine Gleichung der Gerade g durch die Punkte P' und R auf und begründe, dass es sich um eine Tangente an Γ_f handelt. Wie lauten die Koordinaten des Berührungspunkts Q?



94) Stelle im Punkt $P(1|y_P)$ des Funktionsgraphen Γ_f der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^4 + 6x^3 + x^2$ eine Gleichung der Tangente t_P an Γ_f auf!

b) Berechne die Koordinaten weiterer gemeinsamer Punkte von t_P und Γ_f.
Was fällt dir auf? Verbalisiere deine Erkenntnis und ziehe daraus Schlüsse sowohl
i. (differential)geometrischer
als auch
ii. lerntechnischer Natur (Wie kannst du unter Verwendung dieser Erkenntnis deinen geschätzten Sitznachbarn sofort mit einer parallelen Übungsaufgabe beglücken?)!

95) Satz. Jeder Vertreter der durch die gerahmte Gleichung definierte Kurvenschar weist genau zwei Extrempunkte auf, die auf der Kurve k [k: $y=4\cdot x^3$] liegen.

$$\boxed{y = f_t(x) = \frac{x^4 + 2048t^4}{x + 5t}}$$

Verifiziere diesen Satz für f_1 und klassifiziere die Extrempunkte!

96) Nebenstehend ist der Graph der Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{1}{4}\cdot(x^4 - 69x^3 + 1080x^2)$ zusammen mit seinen Kurvenpunkten $P(10|f(10))$ und $Q(36|f(36))$ abgebildet.

a) Stelle Gleichungen der Tangenten t_P und t_Q auf und zeige, dass beide Tangenten durch den Ursprung gehen.

b) Berechne die Koordinaten der in der Abbildung eingezeichneten Schnittpunkte P' und Q'!