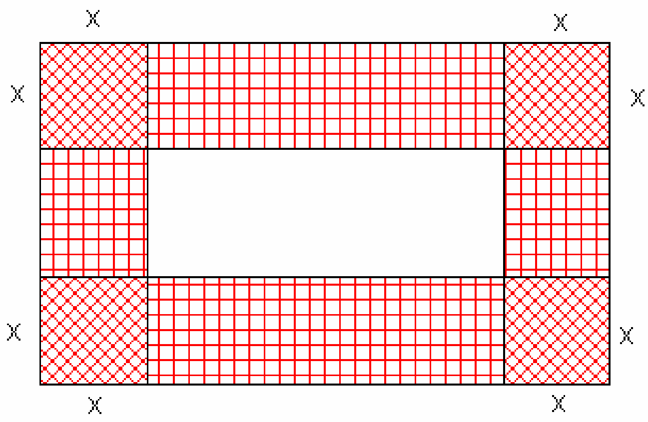
27) Für welchen Wert des Parameters t aus Aufgabe 80) der Übungsbeispiele für die 2. Schularbeit haben die beiden Wendepunkte voneinander *minimalen Abstand* und wie groß ist *dieser*?

28) Aus einem 45dm langen und 24dm breiten Rechteck soll wie in nebenstehender Abbildung illustriert durch Wegschneiden von "Eckenquadraten" eine Schachtel **von möglichst großem Volumen** hergestellt werden.

a) Wie groß ist x zu wählen, damit **das Gewünschte** eintritt? Weise das Maximum nach!

b) Berechne das maximale Volumen sowie den Anteil des Abfalls am gesamten Rechteckflächeninhalt!



29) Wie Aufgabe 28) mit einem 105cm langen und 72cm breiten Rechteck , nur dass jetzt für die Schachtel lediglich zwei Stellwände benötigt werden, sodass deshalb klarerweise nur ein Eckenquadrat weggeschnitten wird. Erstelle dazu zunächst selbst eine eigene Figur samt Beschriftung!

a) Für welche Einschnitt-Tiefe x erhält man hier die volumsgrößte Schachtel? Weise das Maximum nach!

b) Wie groß ist das maximal erreichbare Volumen und wie viel Prozent beträgt der Abfall?

30) Wie Aufgabe 28), wobei das Rechteck 70cm lang und 22cm breit ist, außerdem folgende Punkte:

c) Begründe, warum für das größtmögliche Volumen V_{max} die Ungleichung $\boxed{V_{max} < abx}$ gelten muss!

d) Zeige am konkreten Beispiel, dass sogar die stärkere Ungleichung $\boxed{V_{max} < \frac{abx}{2} \ (*)}$ gilt!

31) Wie Aufgabe 29), wobei das Rechteck 24dm lang und 9dm breit ist, außerdem die gleichen Punkte c) und d) wie bei Aufgabe 30)!

32) Wie Aufgabe 28), nur dass es sich jetzt um ein 126cm langes und 30cm breites Rechteck handelt.

a) Weise nun die Formel $\boxed{V_{max} = \frac{abx}{2} - 2x^3}$ nach, welche im nachhinein die Ungleichung (*) erklärt!

b) Versuche eine Herleitung dieser Formel, indem du anstelle von 126 und 30 mit a und b rechnest.

33) Wie Aufgabe 29), nur dass dir hier ein 120cm langes und 21cm breites Rechteck vorgesetzt wird.

a) Weise nun die Formel $\boxed{V_{max} = \frac{abx}{2} - \frac{x^3}{2}}$ nach, welche im nachhinein die Ungleichung (*) erklärt!

b) Versuche eine Herleitung dieser Formel, indem du anstelle von 120 und 21 **mit a und b rechnest**.

Dabei gilt aber jedenfalls a > b !!
↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

34) a) "Mit a km/h zu einer Freundin, mit b km/h zurück (Wir setzen voraus, dass Dave mit dem Rad, und nicht mit dem Auto fährt!)." – So soll es sein! ☺ Beweise, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit v dann **NICHT** $v = \frac{a+b}{2}$, sondern $v = \frac{2ab}{a+b}$ beträgt [Probiere es – wenn notwendig! – zuerst mit Zahlen, z.B. eignen sich die Werte a=30 und b=15 sowie eine Entfernung von Dave zu (s)einer (!) Freundin von 10km sehr gut!].

! **Mathematiker nennen den Ausdruck $\frac{2ab}{a+b}$ das harmonische Mittel der Zahlen a und b.** !

b) Nun gilt für den Anteil des Abfalls (als Bruchzahl geschrieben, wenn du in Prozent umwandeln willst/sollst/darfst …, musst du noch mit …. multiplizieren!) bei den Aufgaben 28) bis 33) wie auch bei ↑↑↑ Selbst! der Aufgabe, aus einem 390cm langen und 54cm breiten Karton durch Wegschneiden von Eckenquadraten die volumsgrößte quaderförmige Schachtel mit zwei bzw. vier Stellwänden herzustellen, die nebenstehende Formel

$$\boxed{r(a,b,x) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{8x}{H(a,b)} - 1\right)}$$

[wobei r(a,b,x) für den relativen Anteil des Abfalls steht, a bzw. b für die Länge bzw. Breite des Rechtecks sowie x für die durch Differentiation erhaltene erforderlich Einschnitt-Tiefe!]. Überprüfe diese Formel und **versuche** auch, sie durch einen allgemeinen Ansatz zu beweisen!
Dabei bezeichnet H(a,b) das oben definierte harmonische Mittel!

35) Von einer Trafostation T, die an einer geraden Straße steht, soll ein Stromkabel zu einem Haus H verlegt werden. Die kürzeste Entfernung (ergo der Normalabstand!) des Hauses von der Straße beträgt 300m, für die direkte Entfernung $\overline{TH}$ gilt $\overline{TH} = 500\text{m}$. An welchem Punkt A ("Abzweigungspunkt") soll von der Verlegung längs der Straße zur Verlegung querfeldein gewechselt werden, wenn die durch die Verlegung entstehenden Kosten (die querfeldein pro Meter 2,6 mal so viel betragen als längs der Straße!) minimal (Na was denn bitte sonst?!?) werden sollen und wie hoch ist die mit Mitteln der Analysis tadellos kalkulierte Kostenersparnis gegenüber einer Verlegung längs der Luftlinie?

36) Welche Form muss ein Drehzylinder haben, wenn er bei vorgegebenem Oberflächeninhalt F maximales Volumen aufweisen soll?

37) Welche Form muss ein Drehzylinder haben, wenn er bei vorgegebenem Volumen V minimalen Oberflächeninhalt aufweisen soll?

38) Wie Aufgabe 36), nur dass der Drehzylinder jetzt durch einen Drehkegel und der Oberflächeninhalt durch den Mantelflächeninhalt ersetzt wird.

39) Wie Aufgabe 37), nur dass der Drehzylinder jetzt durch einen Drehkegel und der Oberflächeninhalt durch den Mantelflächeninhalt ersetzt wird.

40) Für die neue Metropole "Kollerkirchen" – Bürgermeisterin im Hintergrund! – wird eine Hochquellenwasserleitung geplant. Der Querschnitt des Zubringerkanals soll ein Rechteck (Länge 3m) mit einem auf die Längsseite aufgesetzten gleichschenkligen Trapez (Höhe 120cm) sein und aus Kapazitätsgründen einen Flächeninhalt von 432dm^2 aufweisen. Für die aus Hygienegründen erforderliche Verfliesung des Kanals wird ein möglichst geringer Materialaufwand verlangt. Berechne die sich daraus ergebende Gesamttiefe des Kanals! Könnte die Bürgermeisterin (wenn wir annehmen, dass sie Nichtschwimmerin ist) im Kanal stehen?

41) Nach Kollerkirchen soll jetzt auch Bernschererbrunn – Gründerin siehe Hintergrund! – eine Hochquellenwasserleitung erhalten, wobei der Zubringerkanal als Querschnitt auch hier ein 3m langes Rechteck mit einem auf die Längsseite aufgesetzten gleichschenkligen Trapez haben soll, wobei die zweite Parallelseite (die sogenannte "Sohlbreite") 60cm lang ist und der Querschnitt einen Flächeninhalt von 312dm^2 aufweisen soll. Auch in Bernschererbrunn soll die Verfliesung des Kanals möglichst kostengünstig erfolgen. Welche Gesamttiefe ergibt sich hier für den Kanal? Kann die Bürgermeisterin (wieder vorausgesetzt, dass sie Nichtschwimmerin ist!) im Kanal stehen? Wie sieht es mit der Bürgermeisterin aus Kollerkirchen aus?

42) Nun eine Aufgabe, zu deren Lösung die uns zur Verfügung stehenden analytischen Mittel problemlos ausreichen, wenn die Angabe auch sehr "technisch" klingt [was daran liegen mag, dass sie eine Übungsaufgabe für KTWW-Studenten der Universität für Bodenkultur ("BOKU") ist und dir exemplarisch zeigen soll, wo Mathematik überall **im Studium** auftaucht und warum man sich **auch dort** nicht vor ihr zieren braucht – insbesondere, wenn man vom Mathematikunterricht aus der AHS ausreichend Grundlagen mitnimmt, wobei es dir diesbezüglich ja an Möglichkeiten nun wahrhaft alles andere als mangelt!]:

Der Querschnitt eines Kanals ist ein gleichschenkeliges Trapez, von dem der Flächeninhalt und der Böschungswinkel vorgegeben sind.

1. Dimensioniere die Sohlbreite und die Tiefe des Kanals derart, dass der benetzte Teil des Trapezumfangs (der sogenannte *Reibungswiderstand*) minimal wird.
2. Berechne das Verhältnis der Längen der Seitenlinien des Querschnitts und der oberen Kanalrandbreite.
3. Unter dem *Profilradius* oder der *Hydraulischen Tiefe* versteht man den Quotienten der Querschnittsfläche und des benetzten Teils des Querschnittumfangs.
   Verifiziere, dass im Fall der minimalen Bentzung in (a) der Profilradius gleich der halben Kanaltiefe ist!

Die Studenten hatten diese Übungsaufgabe **mit einem allgemeinen Flächeninhalt A sowie einem allgemeinen Böschungswinkel α durchzurechnen** und dann (mir) auf der Tafel zu präsentieren. *Hier* soll es aber reichen, die Aufgabenteile 1 und 3 für $A = 24\text{m}^2$ und $\alpha = 21°$ zu bearbeiten!

Nachtrag zu Aufgabe 42): Könnte Leonid STADNIK, mit 2,57m Körpergröße der größte Mensch der Welt (siehe Abbildung links unten; Stand August 2007!) in diesem Kanal stehen, wenn wir voraussetzen, dass er Nichtschwimmer ist? Falls nicht, wie sähe(!) es dann mit Robert WADLOW (1918-1940) aus, der mit einer Körpergröße von 2,72m (Das sind zwei sehr kleine Erstklässler übereinander!!) bis heute der größte (bekannte) Mensch war, der je gelebt hat (siehe Abbildung rechts!)?

43) **<u>Eine ehemalige (von vier) Aufgabe(n) der dreistündigen Schularbeit deines Mathematikprofessors:</u>**

Ein verankerter Schwimmkörper mit dem Volumen $V = 312\pi \mathrm{dm}^3$ hat die Gestalt eines Zylinders (Radius x; Höhe y), auf dem auf einer Seite eine Halbkugel und auf der anderen Seite ein Kegel mit der Höhe $h = \frac{4x}{3}$ aufgesetzt sind. Wie groß sind x und y zu wählen, wenn der Plastikverbrauch (Oberfläche) minimal sein soll, wie groß ist er?

44) Eine rotationssymmetrische Boje hat die Form eines Zylinders mit zwei aufgesetzten Halbkugeln. Der Radius der Halbkugeln ist die Hälfte des Zylinderradius. Das Volumen der Boje soll $V = 468\pi \mathrm{dm}^3$ betragen. Wie sind die Maße der Boje zu wählen, damit die erforderliche Blechmenge möglichst gering wird (Überprüfung mittels zweiter Ableitung!)?

45) Eprouvetten (auch Proberöhrchen genannt und in Chemie, Medizin u. v. a. Gebieten in Verwendung, siehe Abbildung rechts) bestehen für gewöhnlich aus einem drehzylindrischen Teil mit einer aufgesetzten Halbkugel, wobei die Grundfläche des Zylinders (klarerweise!) nicht materialisiert ist. Ermittle die Form jener Eprouvette, welche bei vorgegebenem Volumen V die kleinste Mantelfläche M_{min} aufweist (Die Wandstärke kann bei diesem **<u>einfachen mathematischen Modell</u>** vernachlässigt werden!). Interpretiere das Ergebnis geometrisch und erörtere praktische Konsequenzen! Bestätige insbesondere die Formel $\boxed{M_{min} = \sqrt[3]{18V^2\pi}}$!

46) Wie Aufgabe 45), nur dass der Körper jetzt unten geschlossen sein soll, also der gesamte Oberflächeninhalt F minimiert werden soll (Ziel: F_{min}!). Wieder ist das Resultat geometrisch zu interpretieren und insbesondere die Formel $\boxed{F_{min} = \sqrt[3]{45V^2\pi}}$ zu verifizieren!