Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheit 2: 11. 10. 2016 (Blatt 1/2)

38. Österreichische Mathematische Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

14. Juni 2007

3. Für reelle Zahlen $x \geq 0$ und $y \geq 0$ sind $A = \frac{x+y}{2}$ das arithmetische Mittel und $G = \sqrt{xy}$ das geometrische Mittel von x und y. Mit $W = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$ wird das arithmetische Mittel von $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$ bezeichnet.

   Man zeige, dass

$$G \leq W^2 \leq A$$

   gilt. Für welche x und y gilt $G = W^2 = A$?

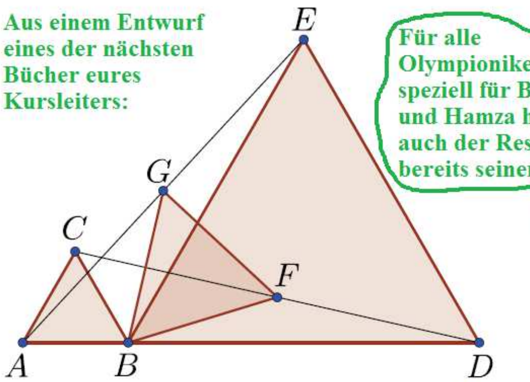
Theoriebaustein: *MITTELUNGLEICHUNGEN („QAGH-UGL")*

- Aus einem der nächsten Bücher eures Kursleiters (größere Version der Doppelseite auf eurer Undersite auf www.matheprof.at als pdf!):

4.8.2 Aus zwei mach drei (Dreiecke)

In diesem Abschnitt beweisen wir einen besonders hübschen Satz (welcher in [45], S. 29 und S. 33 abbildungsgeometrisch bewiesen wird), der in der unteren Abbildung visualisiert

Aus einem Entwurf eines der nächsten Bücher eures Kursleiters:



Für alle Olympioniken, speziell für Belinda und Hamza hat auch der Rest bereits seinen Reiz!

wird: Ausgehend von zwei gleichseitigen Dreiecken mit einem gemeinsamen Eckpunkt sowie einer gemeinsamen Trägergerade jener Seiten, welche gerade diesen Eckpunkt enthalten, wird ein neues Dreieck konstruiert, welches wiederum gleichseitig ist, wobei wir über diese Eigenschaft hinaus auch noch eine wahrhaft schöne Formel herleiten, die es ermöglicht, ausgehend von den Seitenlängen der Ausgangsdreiecke die Seitenlänge des neuen Dreiecks zu berechnen.

Dazu koordinatisieren wir die Ausgangsdreiecke ΔABC und ΔBDE via $A(-4a|0)$, $B(0|0)$, $C(-2a|2\sqrt{3}\cdot a)$, $D(4b|0)$ sowie $E(2b|2\sqrt{3}\cdot b)$ und erhalten die via

$$F := M_{CD} \text{ und } G := M_{AE}$$

definierten neuen Punkte F und G somit durch $F(-a+2b|\sqrt{3}\cdot a)$ sowie $G(-2a+b|\sqrt{3}\cdot b)$. Daraus resultiert

$$\overline{BF} = \left|\begin{pmatrix} -a+2b \\ \sqrt{3}\cdot a \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2-4ab+4b^2+3a^2} = 2\cdot\sqrt{a^2-ab+b^2},$$

$$\overline{BG} = \left|\begin{pmatrix} -2a+b \\ \sqrt{3}\cdot b \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4a^2-4ab+b^2+3b^2} = 2\cdot\sqrt{a^2-ab+b^2}$$

sowie

$$\overline{FG} = \left|\begin{pmatrix} a+b \\ \sqrt{3}\cdot(a-b) \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2+2ab+b^2+3a^2-6ab+3b^2} = 2\cdot\sqrt{a^2-ab+b^2},$$

woraus $\overline{BF} = \overline{BG} = \overline{FG}$ folgt, □.

$\boxed{\text{Bemerkung:}}$ Wegen der Seitenlängendarstellungen

$$s_1 := \ell_{\Delta ABC} = 4a \text{ und } s_2 := \ell_{\Delta BDE} = 4b$$

der beiden Ausgangsdreiecke ΔABC und ΔBDE kann man die Seitenlänge $s_3 := \ell_{\Delta BFG}$ des aus ihnen hervorgehenden Dreiecks ΔBFG aufgrund der obigen Berechnungen von $\overline{BF}$, $\overline{BG}$ und $\overline{FG}$ via

$$s_3 = 2\cdot\sqrt{\frac{{s_1}^2}{16} - \frac{s_1 s_2}{16} + \frac{{s_2}^2}{16}} \text{ bzw. } s_3 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{{s_1}^2 - s_1 s_2 + {s_2}^2}$$

resp. wegen der Formel $u^3+v^3 = (u+v)\cdot(u^2-uv+v^2)$ schließlich via

$$s_3 = \sqrt{\frac{{s_1}^3+{s_2}^3}{s_1+s_2}}$$

darstellen.

$\boxed{\text{Übungsaufgabe 1 für den werten L}\overset{\text{E}}{\text{Ö}}\text{ser:}}$ Man beweise für den via $\varphi := \measuredangle GBC$ definierten Winkel φ die schöne Darstellung

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(a+b)^3}{a^3+b^3}}.$$

$\boxed{\text{Übungsaufgabe 2 für den werten L}\overset{\text{E}}{\text{Ö}}\text{ser:}}$ Für den via $\psi := \measuredangle FBE$ definierten Winkel ψ beweise man die Kongruenz $\psi \cong \varphi$.

$\boxed{\text{Übungsaufgabe 3 für den werten L}\overset{\text{E}}{\text{Ö}}\text{ser:}}$ Man beweise, dass die Geraden g_{AE} und g_{CD} unabhängig von den Seitenlängen s_1 und s_2 stets die gleichen Winkel (nämlich 60° und 120°) einschließen.

$\boxed{\text{Übungsaufgabe 4 für den werten L}\overset{\text{E}}{\text{Ö}}\text{ser:}}$ Man beweise ohne Verwendung der Formel aus Übungsaufgabe *1* und damit ohne Gebrauch der Beschränktheit der reellen Cosinusfunktion, dass

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{a^3+b^3}} \leq 2$$

gilt, indem man letztere Ungleichung auf die zu ihr äquivalente Ungleichung

$$(a-b)^2\cdot(a+b) \geq 0$$

zurückführe.

AHS HEUSTADELGASSE

Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheit 2: 11. 10. 2016 (Blatt 2/2)

ÜBUNGSAUFGABE *4* FÜR DEN WERTEN L$\overset{\text{E}}{\underset{\text{Ö}}{}}$SER: Man beweise ohne Verwendung der Formel aus Übungsaufgabe *1* und damit ohne Gebrauch der Beschränktheit der reellen Cosinusfunktion, dass

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{a^3+b^3}} \le 2$$

gilt, indem man letztere Ungleichung auf die zu ihr äquivalente Ungleichung

$$(a-b)^2 \cdot (a+b) \ge 0$$

zurückführe.

- Außerdem eine schöne Möglichkeit, aus der Lösung der obigen Aufgabe eine Faktorisierung für a^3+b^3 herzuleiten, und dies nicht nur durch fantasieloses Ausmultiplizieren der MOMENTAN NOCH FEHLENDEN rechten Seite der entsprechenden Faktorisierungsformel sowie eine erste Annäherung an das PASCALsche Dreieck [(noch?) ohne sogenannte Binomialkoeffizienten]

- Zur Herausforderung ein Beispiel aus einem Gebietswettbewerb (für Fortgeschrittene!):

37. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

27. April 2006

1. Es seien $0 < x < y$ reelle Zahlen und

$$H = \frac{2xy}{x+y}, \quad G = \sqrt{xy}, \quad A = \frac{x+y}{2}, \quad Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

das harmonische, geometrische, arithmetische und quadratische Mittel von x und y. Bekanntermaßen gilt $H < G < A < Q$.
Man ordne die Intervalle $[H, G]$, $[G, A]$ und $[A, Q]$ aufsteigend nach ihrer Länge.