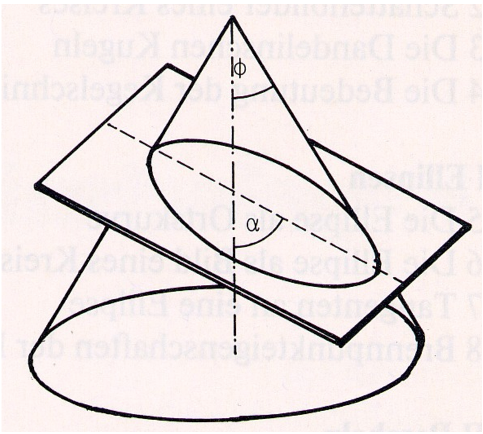
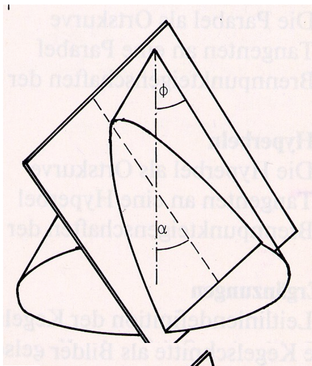
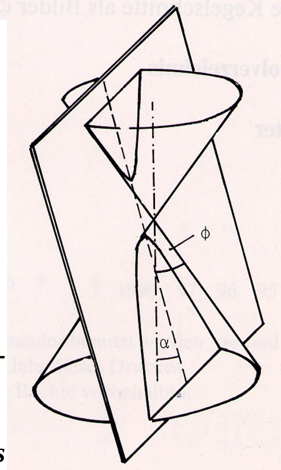
Übungsaufgaben zur Ellipse (Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene, Teil 1)

(7A, Gymnasium, Schuljahr 2011/12)





Diese Beispiele sollen durch jene für den ersten Teil der nichtlinearen analytischen Geometrie (Teil 2 bzw. 3 betrifft die Parabel und die Hyperbel!) relevanten Grundaufgaben [Gleichungen von Ellipsen in Hauptlagen, Zusammenhang zwischen a, b und e, Ablesen von a und b aus der Ellipsengleichung, Reflexionseigenschaft und Tangenten, Berührungsbedingung, Haupt- und Nebenscheitelkreis der Ellipse, Ablesen des Berührpunkts einer Ellipsentangente aus der Spaltform] führen, die du bei der Schularbeit im Oktober oder November 2011 ***in jedem Fall*** *unter Beweis stellen wirst müssen. Gutes Gelingen!!*



ACHTUNG! ***Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!***

AUFGABEN 1 BIS 3 ZUR ELLIPSE:

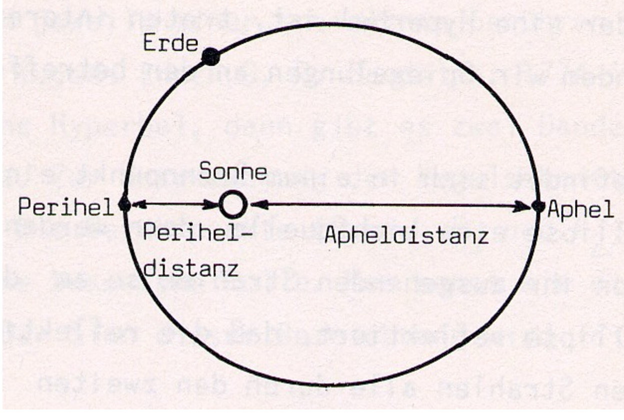
1) Welche Punkte einer Ellipse (a, b) haben von einem der beiden Brennpunkte den kleinsten bzw. größten Abstand?

2) Die neun Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun und Pluto (Merkregel: **M**EIN **V**ATER **E**RKLÄRT **M**IR **J**EDEN **S**ONNTAG **U**NSERE **N**EUN **P**LANETEN!) bewegen sich nach dem **ersten KEPLERschen Gesetz** auf Ellipsenbahnen, wobei einer der beiden Brennpunkte die Sonne ist. Das Perihel bzw. Aphel bezeichnet dabei den sonnennächsten bzw. sonnenfernsten Punkt des entsprechenden Planeten auf seiner Umlaufbahn. In nebenstehender Tabelle findest du die entsprechenden astronomischen Daten, wobei hier a für Jahr und d für Tag steht.

PLANET	UMLAUFZEIT	APHELDISTANZ (in Mio km)	PERIHELDIST. (in Mio km)
Merkur	88^d	69,4	45,6
Venus	225^d	108,3	106,7
Erde	365^d	151,1	146,2
Mars	687^d	247,6	205,4
Jupiter	$11,9^a$	810,6	735,6
Saturn	$29,5^a$	1497,3	1338,3
Uranus	84^a	2983,5	2719,1
Neptun	165^a	4505,5	4429,6
Pluto	248^a	4460	7396

a) Stelle eine Formel zur Berechnung der Halbachsenlängen a und b der jeweiligen Ellipse(nbahn) in Abhängigkeit der Apheldistanz A sowie der Periheldistanz P auf.

b) Berechne unter Verwendung von a) die entsprechenden Halbachsenlängen für die Ellipsen(bahnen) der neun aufgelisteten Planeten!



3) Informiere dich (z.B. "Faszination Physik" – der Schulbuchreferent läßt grüßen! ☺ – oder Internetdatenbank!) über den Inhalt des **dritten KEPLERschen Gesetzes** und kontrolliere es anhand der Tabelle aus Aufgabe 2)!

AUFGABEN 4 BIS 13 ZUR ELLIPSE:

4) Eigentlich zählt Pluto ebenso wie Ceres und Eris zu den sogenannten "Zwergplaneten". Berechne unter Verwendung des **dritten KEPLERschen Gesetzes** sowie der Daten aus der Tabelle die Umlaufzeiten von Ceres und Eris, wenn Ceres eine Aphel- bzw. Periheldistanz von 446,8 Mio. km bzw. von 380,5 Mio. km und Eris eine Aphel- bzw. Periheldistanz von 14593 Mio. km bzw. von 5662 Mio. km aufweist!

5) Bestimme zur vorgegebenen Ellipsengleichung die Werte von a, b und e sowie den Hauptlagentyp!

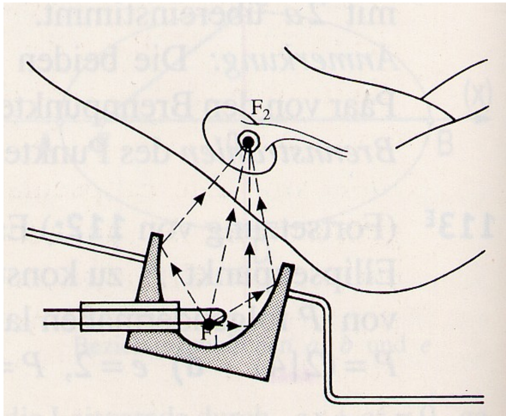
   a) ell.: $9x^2 + 4y^2 = 36$

   b) ell.: $9x^2 + 25y^2 = 900$

6) Von einer Ellipse ell in Hauptlage kennt man den Punkt $P(4|2)$ sowie mit $F_2(2\sqrt{6}|0)$ einen Brennpunkt.

   a) Berechne die Halbachsenlängen a und b von ell!

   b) (SPÄTER) Lege in P die Kurvennormale an ell und schneide diese mit der x- bzw. y-Achse, was die Schnittpunkte X und Y liefert. Verifiziere den allgemeingültigen Satz, dass $\overline{PX} : \overline{PY} = b^2 : a^2$ gilt!



7) Erläutere das Wirkungsprinzip des nebenstehend abgebildeten **Nierenlithotripters**, welcher eine genuine Anwendung mathematischer Methoden in der Medizintechnik darstellt und das Zertrümmeren von Nierensteinen ohne chirurgischen Eingriff unter Verwendung von Stoßwellen ermöglicht!

8) Sieh´ im Internet nach, was du unter "Flüstergewölben" findest und stelle einen innermathematischen Zusammenhang zu Aufgabe 9) her!

9) Eine Ellipse ell in Hauptlage wird von der Gerade g [g: $3x - 2y = 90$] im Punkt $P(40|y)$ rechtwinklig geschnitten. Berechne die Koordinaten des zweiten Schnittpunkts von g und ell!

10) Von einer Ellipse ell in Hauptlage kennt man den Brennpunkt $F_2(20|0)$ sowie die Tangente t[I(5|21), II(30|1)]. Stelle eine Ellipsengleichung auf und berechne die Koordinaten des Berührungspunkts!

11) t_P[I(1|19), II(17|–17)] und t_Q[III(–19|–4), IV(17|17)] sind Tangenten an eine Ellipse in Hauptlage. Stelle eine Gleichung der Ellipse auf und berechne die Koordinaten der Berührungspunkte P und Q!

12) Drehe in der Ellipse ell [ell.: $16x^2 + 25y^2 = 400$] den rechten Hauptscheitel um +90° um den Ursprung, E bezeichnet den gedrehten Punkt (der dann auf der positiven y-Achse liegt). Nun verbinde E mit dem linken Brennpunkt von ell und lege auf diese Verbindungsstrecke die Normale g durch E. Verifiziere, dass g eine Ellipsentangente ist und berechne die Koordinaten des Berührungspunkts T! Welche Lage hat T bezüglich des rechten Brennpunkts von ell? Beschreibe in einem ganzen Satz!

13) Für jedes von drei Tangenten einer Ellipse ell (a, b) aufgespannte Dreieck ("Tangentendreieck" von ell) ΔABC gilt folgender Satz: *Bezeichnen d_1, d_2 und d_3 die Normalabstände des Ellipsenmittelpunkts zu den Trägergeraden der Seiten des* ***Mittendreiecks*** *$\Delta M_{AB}M_{BC}M_{AC}$ sowie r den Umkreisradius des Dreiecks ΔABC, dann gilt die Formel* $\boxed{a^2b^2=4rd_1d_2d_3}$. Verifiziere diesen Satz anhand der Ellipse ell [ell.: $16x^2 + 25y^2 = 400$] für jenes Tangentendreieck, welches durch die Tangenten an ell in ihrem linken Hauptscheitel, ihrem unteren Nebenscheitel sowie im Ellipsenpunkt $P\left(x_P > 0 \middle| \frac{12}{5}\right)$ aufgespannt wird.

AUFGABEN 14 BIS 22 ZUR ELLIPSE:

14) Legt man durch den rechten Brennpunkt und den oberen Nebenscheitel D einer Ellipse ell in erster Hauptlage eine Gerade g, so haben g und ell nebst D noch einen zweiten Punkt P gemeinsam, für welchen dann die Darstellung $P\left(\frac{2a^2e}{2a^2-b^2}\middle|\frac{b^3}{b^2-2a^2}\right)$ gilt (wobei e wie üblich die lineare Exzentrizität bezeichnet). Verifiziere diesen Satz anhand der Ellipse ell mit der Gleichung ell.: $9x^2 + 25y^2 = 378225$!

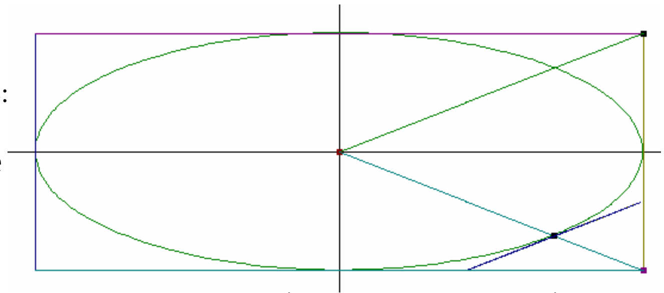
15) Fortsetzung von Aufgabe 14: Legt man in P die Tangente t_P, so gelten folgende Sätze:

Satz 1. Das Produkt der Steigungen von g und t_P ergibt stets den Wert –2.

Satz 2. Sind X und Y die Schnittpunkte von t_P mit der x- bzw. y-Achse, so gilt stets die Gleichung $\overline{XP} : \overline{PY} = \left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{e}-\frac{e}{a}\right)\right]^2$.

Verifiziere dies anhand der Ellipse aus Aufgabe 14)!

Nebenstehende Abbildung bezieht sich auf die Aufgaben 16 bis 18:



16) Zeige anhand der Ellipse ell.: $4x^2 + 9y^2 = 72$, dass die eingezeichnete Tangente parallel zu einer der beiden Halbdiagonalen des Achsenrechtecks von ell verläuft!

17) Zeige anhand der Ellipse ell.: $3x^2 + 4y^2 = 300$, dass die Tangente an ell in $P\left(\frac{a^3}{\sqrt{a^4+b^4}}\middle|\frac{b^3}{\sqrt{a^4+b^4}}\right)$ normal zur ansteigenden Diagonale des Achsenrechtecks von ell verläuft.

18) Fortsetzung von Aufgabe 17: Verifiziere anhand der Ellipse aus Aufgabe 17), dass t_P mit den Achsen der Ellipse ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $\frac{(a^2+b^2)^2}{2ab} - ab$ begrenzt.

19) SATZ. Die Tangente an eine Ellipse in erster Hauptlage (a, b) im Punkt $P\left(\frac{a\sqrt{5}}{5}\middle|\frac{-2b\sqrt{5}}{5}\right)$ verläuft parallel zur Gerade durch den linken Hauptscheitel A und den Punkt H(a|b).

Bestätige diesen Satz anhand der Ellipse ell.: $x^2 + 4y^2 = 20$!

20) Fortsetzung von Aufgabe 19: Verifiziere anhand der Ellipse aus Aufgabe 19), dass t_P mit den Achsen der Ellipse ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $\frac{5ab}{4}$ begrenzt.

21) Fortsetzung der **<u>Aufgaben 19 und 20</u>**: Mit den **<u>dort gewählten Bezeichnungen</u>** gilt stets, dass

(1) <u>*das Dreieck ΔACH*</u> (wobei C der untere Nebenscheitel von ell ist) den Flächeninhalt $\frac{3ab}{2}$ aufweist,

(2) <u>*es*</u> genau dann rechtwinklig in C ist, wenn ell gleichseitig ist.

22) In einer Ellipse ell in erster Hauptlage wird der untere Nebenscheitel C mit dem Eckpunkt H(a|b) des Achsenrechtecks verbunden, P bezeichnet den zweiten Schnittpunkt von g_{CH} mit ell. Dann gelten die folgenden Sätze:

Satz 1. $\overline{CP} : \overline{PH} = 4 : 1$

Satz 2. g_{CH} schneidet ell in P rechtwinklig genau dann, wenn $3a^2=8b^2$ gilt.

Verifiziere diese beiden Sätze anhand der Ellipse ell.: $3x^2 + 8y^2 = 1200$!

AUFGABEN 23 BIS 28 ZUR ELLIPSE:

23) Der Kreis um den Mittelpunkt einer Ellipse ell durch die Eckpunkte des Achsenrechtecks schneidet die Achsen von ell in vier Punkten. Diese vier Punkte bilden ein Quadrat, von dem zu zeigen ist, dass seine Seiten allesamt Tangenten von ell sind.

24) SATZ. Gilt in einer Ellipse in erster Hauptlage die fortlaufende Proportion $\boxed{a^2 : e^2 : b^2 = 3 : 2 : 1}$, so ist die durch den unteren Nebenscheitel verlaufende Gerade g mit der Steigung 1 auch Ellipsennormale.
Verifiziere diesen Satz am einfachen Beispiel der Ellipse ell.: $x^2 + 3y^2 = 3$ und berechne in diesem Zusammenhang auch die Koordinaten jenes Ellipsenpunkts, in dem ell von g rechtwinklig geschnitten wird.

25) Eine beliebige Ellipsentangente schneidet die beiden Hauptscheiteltangenten in den Punkten G und H. Beweise, dass das Produkt der Abstände von G und H sowohl zur Haupt- als auch zur Nebenachse der Ellipse konstant ist.

26) Liegen die Eckpunkte eines Dreiecks auf einer Ellipse, so gilt folgender
SATZ. Die Schnittpunkte der Tangenten an die Ellipse in den Eckpunkten des Dreiecks mit der Trägergerade der gegenüberliegenden Dreieckseite liegen auf einer Gerade g.

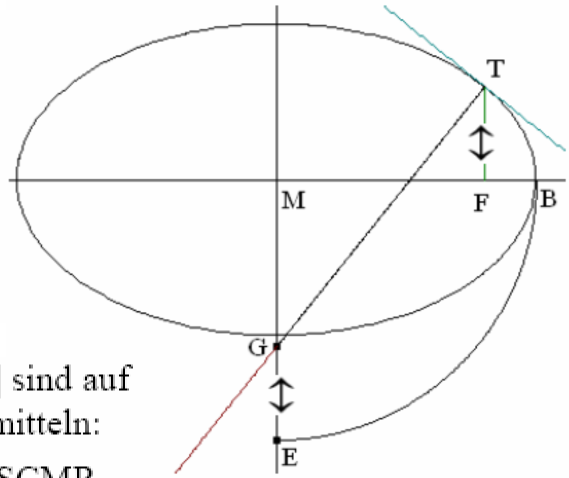
Für den Spezialfall, dass zwei der drei Eckpunkte die Hauptscheitel A und B einer Ellipse in erster Hauptlage sind, gilt darüber hinaus stets, dass sich die Steigungen von g und t_C wie 2:1 verhalten.

Verifiziere all dies anhand der Ellipse [ell.: $16x^2 + 25y^2 = 400$], wobei $C\left(x_C > 0 \middle| \frac{12}{5}\right)$ gilt.

27) Ausgehend von der Ellipse ell [ell: $9x^2 + 25y^2 = 5625$] sind auf die nebenstehende Abbildung bezugnehmend zu ermitteln:

a) die Koordinaten von B, F (rechtsseitiger Brennpunkt), T (über F liegender Ellipsenpunkt), E und G (wobei M der Mittelpunkt des Viertelkreisbogens BE ist)

b) eine Gleichung der Tangente t an ell in T sowie der Nachweis des allgemeingültigen Sachverhalts, demzufolge t normal auf g_{GT} steht

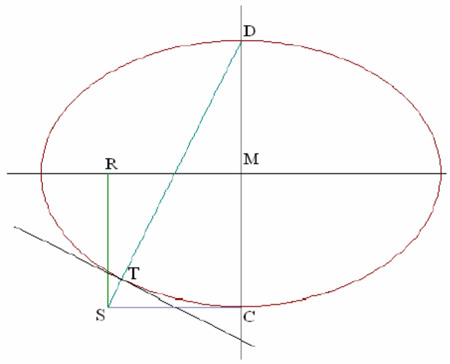


28) Ausgehend von der Ellipse ell [ell: $4x^2 + 9y^2 = 900$] sind auf die nebenstehende Abbildung bezugnehmend zu ermitteln:

a) die Koordinaten des Eckpunkts S des Quadrats SCMR

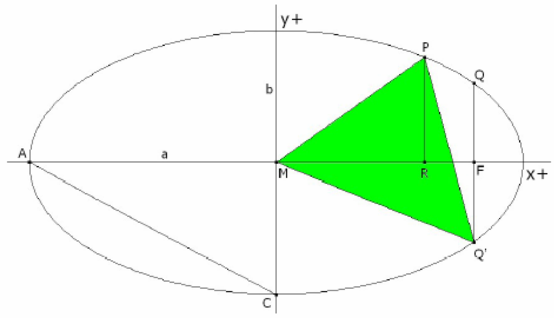
b) die Koordinaten des Schnittpunkts T der Gerade g_{DS} mit ell

c) eine Gleichung der Tangente t an ell in T sowie der Nachweis des allgemeingültigen Sachverhalts, demzufolge t normal auf g_{DS} steht



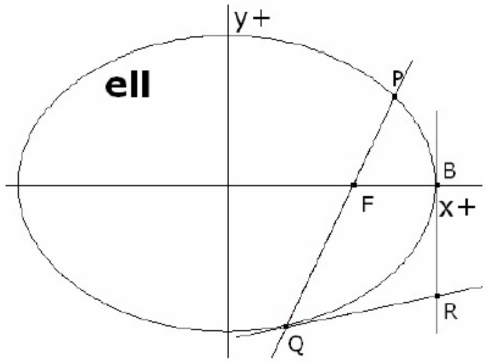
AUFGABEN 29 UND 30 ZUR ELLIPSE:

29) In der Abbildung ist F der rechtsseitige Brennpunkt der Ellipse ell [ell.: $9x^2 + 25y^2 = 5625$], ferner gilt $\overline{MR} = b$.



(a) Zeige, dass die Geraden g_{AC} und g_{PQ} zueinander parallel verlaufen.

(b) Bestätige am konkreten Beispiel der vorliegenden Ellipse die Formel $\mu = \frac{ab}{2}$ für den Flächeninhalt μ des Dreiecks $\Delta MQ'P$!



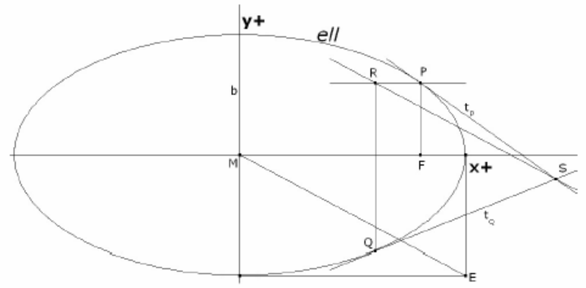
30) Ausgehend von obiger Abbildung sind für die Ellipse ell mit der Gleichung ell.: $9x^2 + 25y^2 = 250000$ folgende Aufgabenstellungen zu bearbeiten:

(a) Für den Punkt $P(b|y_P)$ ist eine Gleichung der Gerade g_{FP} aufzustellen. Anschließend sind die Koordinaten von Q zu berechnen.

(b) Stelle eine Gleichung der Tangente an ell in Q auf und berechne die Koordinaten von R.

(c) Verifiziere, dass $\overline{BR} = e$ gilt!

AUFGABEN 31 BIS 33 ZUR ELLIPSE:

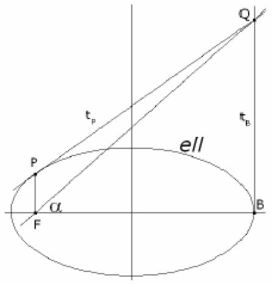


31) Ausgehend von obiger Abbildung sind für die konkrete Ellipse ell mit der Gleichung ell.: $9x^2 + 25y^2 = 5625$ die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten:

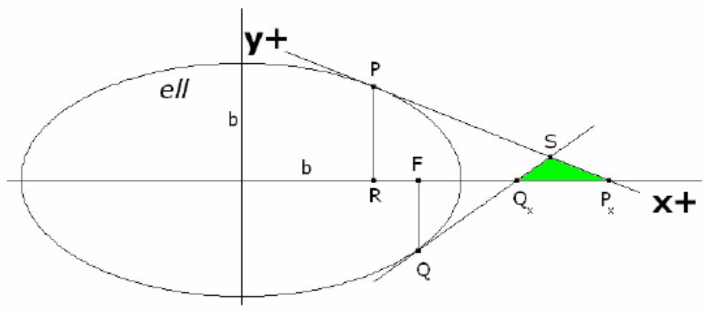
(a) Stelle in den Ellipsenpunkten P (über dem rechten Brennpunkt F) und $Q(x_Q|y_Q)$ mit $x_Q = b$ und $y_Q < 0$ Gleichungen der Tangenten auf.

(b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S.

(c) Kontrolliere, dass die Gerade g_{RS} zur Gerade g_{ME} parallel verläuft!

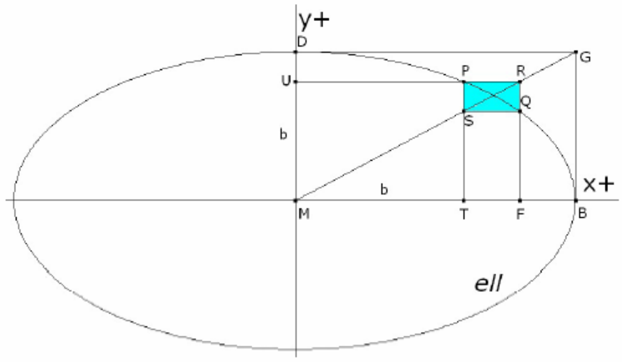


32) Ausgehend von obiger Abbildung ist für die konkrete Ellipse ell mit der Gleichung ell.: $9x^2 + 25y^2 = 5625$ zu verifizieren, dass der Schnittpunkt Q auf der Gerade g durch F mit dem Steigungswinkel $\alpha = 45°$ liegt.

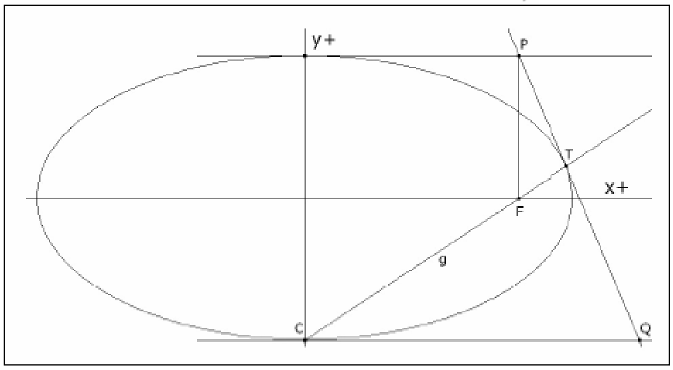


33) Ausgehend von obiger Abbildung ist für die konkrete Ellipse ell mit der Gleichung ell.: $9x^2 + 25y^2 = 810000$ zu verifizieren, dass für den Flächeninhalt μ des gefärbten Dreiecks $\Delta Q_x P_x S$ die Formel $\mu = \frac{a}{2e} \cdot (e - b)^2$ gilt.

AUFGABEN 34 BIS 37 ZUR ELLIPSE:



34) In obiger Figur ist die Ellipse ell [ell:$9x^2+25y^2=5625$] abgebildet, an deren Beispiel verifiziert werden soll, dass $\mu_{SQRP}=\mu_{MBGD}-2\cdot\mu_{MTPU}$ gilt (Oder du führst einen Beweis dieser Formel!) und ferner die Punkte M, R und G kollinear liegen.

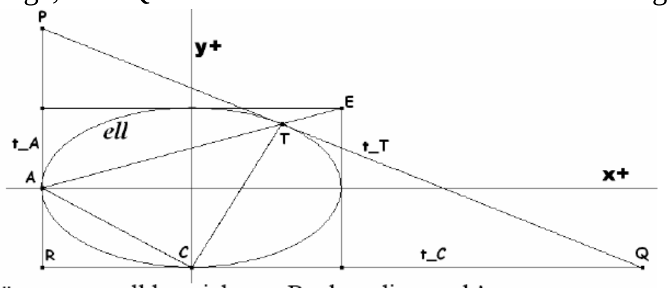


35) In Zusammenhang mit der gerahmten Abbildung sind anhand der Ellipse ell [ell: $9x^2+25y^2=1512900$] die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten bzw. elementargeometrischen Lehrsätze zu verifizieren:

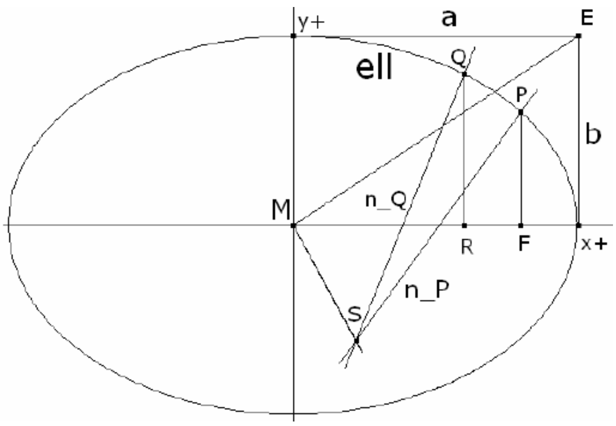
(a) Ermittle die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts T von ell mit g_{CF} und stelle eine Gleichung der entsprechenden Tangente t auf!

(b) Zeige, dass $P \in t$ gilt.

(c) Setze F in die Spaltform von ell ein und zeige, dass Q auf der dadurch entstehenden Gerade liegt.



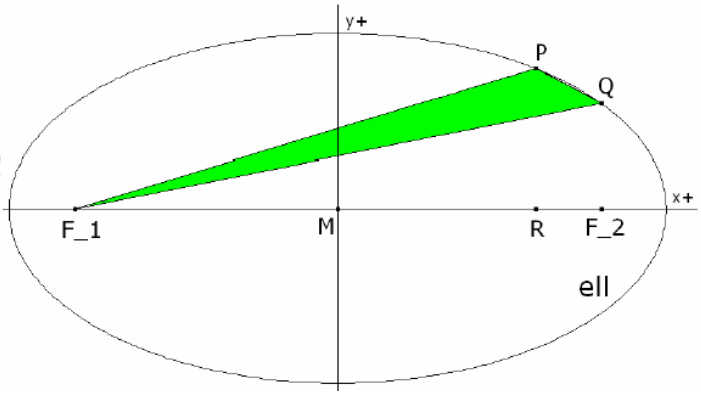
36) In der rechten Abbildung ist die Ellipse ell mit der Gleichung ell.: $9x^2+25y^2=5625$ zusammen mit weiteren Punkten und Tangenten abgebildet. Für den in der Abbildung eingezeichneten Punkt $T(x_T|y_T)$ gilt dann für die Flächeninhalte μ_2 und μ_1 der Dreiecke ΔPQR und ΔACT die Proportion $\mu_2:\mu_1=\frac{a}{x_T}+\frac{b}{y_T}+\frac{ab}{x_T y_T}$, wobei a und b die Halbachsenlängen von ell bezeichnen. Rechne dies nach!

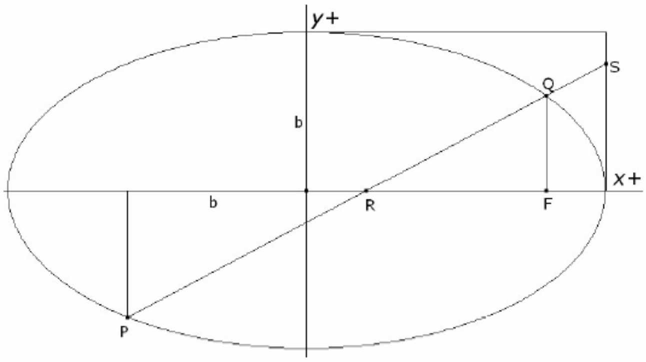


37) In nebenstehender Abbildung gilt $\overline{MR}=b$, F ist der rechtsseitige Brennpunkt von ell. S ist der Schnittpunkt der Normalen an ell in P und Q. Unter diesen Voraussetzungen besagt ein allgemeingültigerLehrsatz, dass $\sphericalangle EMS=90°$ gilt. Verifiziere dies am Beispiel der konkreten Ellipse ell mit der Gleichung ell.: $9x^2+25y^2=6890625$!

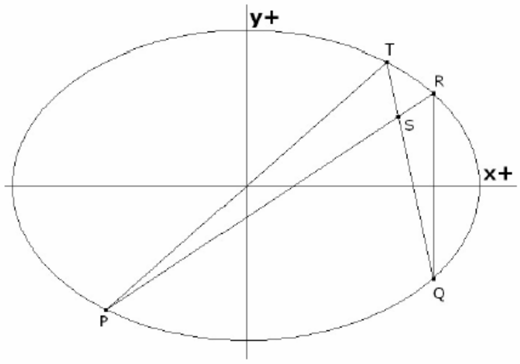
AUFGABEN 38 BIS 40 ZUR ELLIPSE:

38) In nebenstehender Abbildung gilt $\overline{MR} = b$, F_2 ist der rechtsseitige Brennpunkt von ell, F_1 der linksseitige. P und Q liegen unmittelbar über R und F_2. Für den Flächeninhalt μ des Dreiecks ΔF_1PQ gilt dann die allgemeingültige Formel $\mu = \frac{1}{2} \cdot |y_P - y_Q| \cdot (\overline{MR} + \overline{F_1F_2})$.
Verifiziere diese Formel anhand der konkreten Ellipse ell mit der Gleichung ell.: $9x^2 + 25y^2 = 22500$!



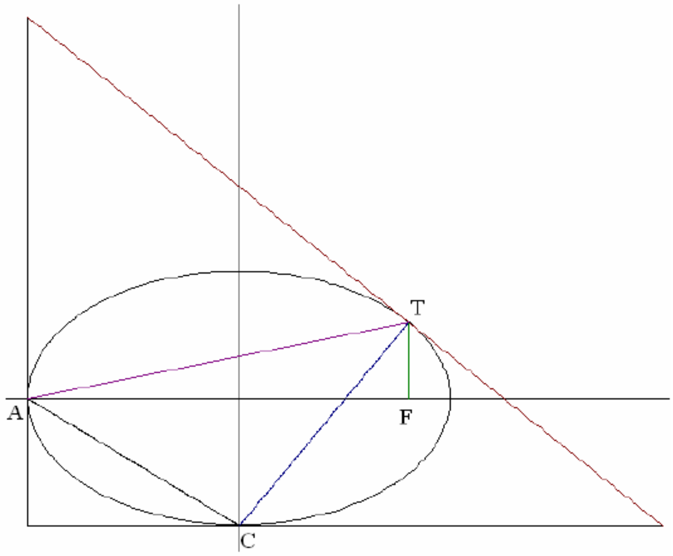


39) Ausgehend von obiger Abbildung ist für die Schnittpunkte $R(x_R|y_R)$ und $S(x_S|y_S)$ zu zeigen, dass $x_R = e - b$ und $y_S = b + y_P + y_Q$ gilt, und dies optional allgemein (Beweis!) oder am konkreten Beispiel der Ellipse ell.: $9x^2 + 25y^2 = 5625$.



40) In obiger Abbildung liegen die Ellipsenpunkte Q und R derart übereinander, dass der Mittelpunkt M_{QR} der rechtsseitige Brennpunkt der Ellipse ist. P und T liegen derart spiegelbildlich zum Ellipsenmittelpunkt, sodass $|x_P| = |x_T| = b$ gilt.
Zeige am konkreten Beispiel der Ellipse ell [ell: $9x^2 + 25y^2 = 90000$], dass für den Schnittpunkt $\{S\} = g_{PR} \cap g_{QT}$ die Darstellungen $x_S = \frac{a}{e} \cdot (a + y_P)$ und $y_S = \frac{a}{e} \cdot b + y_P$ gelten!

AUFGABEN 41 BIS 45 ZUR ELLIPSE:



41) Ausgehend von der Ellipse ell [ell: $9x^2 + 25y^2 = 5625$] sind auf die nebenstehende Abbildung bezugnehmend zu ermitteln:

a) die Koordinaten von A, C und F (rechtsseitiger Brennpunkt) sowie des über F liegenden Ellipsenpunktes T

b) der Flächeninhalt μ_1 des Dreiecks ΔACT inkl. Überprüfung der allgemeingültigen Formel $\boxed{\mu_1 = \frac{b}{2} \cdot (a + b + e)}$, wobei a bzw. b bzw. e (wie üblich) die halbe Haupt- bzw. Nebenachsenlänge bzw. die lineare Exzentrizität (Brennweite) von ell bezeichnet.

c) der Flächeninhalt μ_2 jenes Dreiecks, welches durch die Tangenten an ell in den Punkten A, C und T gebildet wird inkl. Überprüfung der allgemeingültigen Formel $\boxed{\mu_2 = \frac{2}{ey_T} \cdot \mu_1^2}$

42) Analog zu 41), nur dass jetzt der linksseitige Brennpunkt betrachtet wird ($\boxed{\mu_1 = \frac{b}{2} \cdot (a + b - e)}$ usw.)

43) Der linke Hauptscheitel P, beide Nebenscheitel Q (unterhalb der x-Achse) und S (oberhalb der x-Achse) sowie der über dem rechtsseitigen Brennpunkt F liegende Punkt R der Ellipse ell [ell: $9x^2 + 25y^2 = 5625$] bilden ein Ellipsenviereck PQRS, für welches die Punkte $\{S_1\} = g_{PS} \cap g_{QR}$, $\{S_2\} = g_{PQ} \cap g_{RS}$ und $\{S_3\} = g_{PR} \cap g_{QS}$ zu berechnen sind. Setzt man S_1, S_2 und S_3 in die Spaltform von ell ein, so entstehen drei Geraden p_1, p_2 und p_3 (Wen´s interessiert: Man nennt diese Geraden dann die Polaren von S_1, S_2 und S_3 bezüglich ell. Genaueres kannst du – bei Interesse! ☺ – im 7D-Bereich von 2008/09 auf www.matheprof.at nachlesen!). Verifiziere am konkreten Beispiel den folgenden Satz:

SATZ. $S_2 \in p_1 \wedge S_3 \in p_1 \wedge S_1 \in p_2 \wedge S_3 \in p_2 \wedge S_1 \in p_3 \wedge S_2 \in p_3$

44) Zeige: Für jeden von $A(x_A<0|0)$ und $B(x_B>0|0)$ verschiedenen Punkt P auf der Ellipse ell [ell.: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$] liegt der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ΔABP auf der Ellipse ell´ [ell´: $a^2x^2 + b^2y^2 = a^4$].

45) Ein Auszug aus …

Klasse: 7D(Rg) **26. 11. 2008**

Schularbeit (zweistündig)

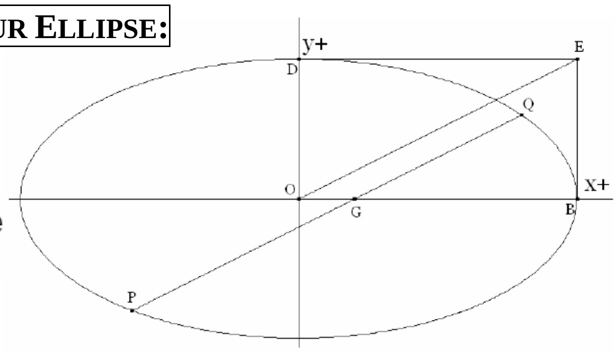
Pflichtmodul PM3: *Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene (und komplexe Zahlen)*

Nachtragstermin für Manuel FÜRHOLZER und Tina VORSTANDLECHNER

1) a) Stelle eine Gleichung jener Ellipse ell in Hauptlage auf, welche im Punkt $T(3|y_T)$ von der Gerade t [t: $x+3y = 15$] berührt wird. (Zwischenresultat: ell.: $4x^2 + 9y^2 = 180$)

b) Ermittle die Koordinaten der Brennpunkte F_1 und F_2 von ell und verifiziere am konkreten Beispiel den allgemeingültigen Satz, demzufolge für das Produkt d_1d_2 der Normalabstände von t zu F_1 sowie F_2 die Formel $d_1d_2 = b^2$ gilt, wobei b die halbe Nebenachsenlänge von ell bezeichnet. Fertige eine saubere Skizze an, welche diesen Satz illustriert!

AUFGABEN 46 BIS 49 ZUR ELLIPSE:

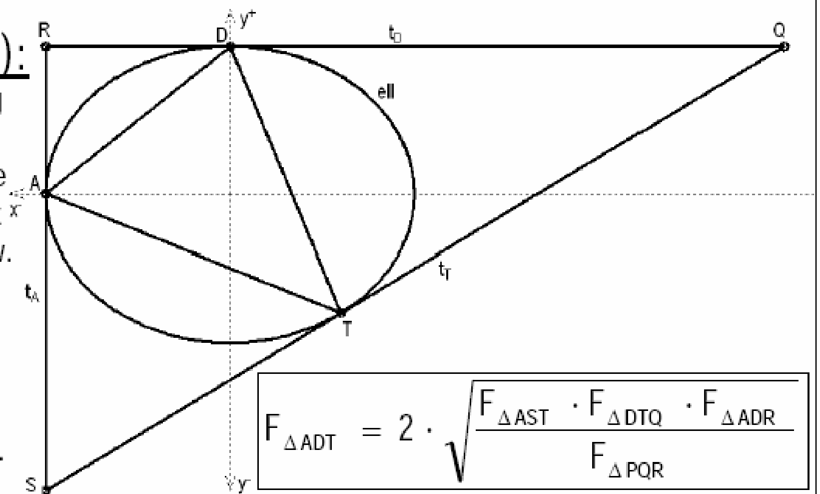


46) Sind P und Q wie in nebenstehender Abbildung jene Punkte auf einer Ellipse in erster Hauptlage mit $x_P=-b$ und $x_Q=e$, so verläuft die Gerade g_{PQ} parallel zur Gerade g_{OE}, wobei $\overline{PQ}:\overline{OE}=\frac{b+e}{a}$ gilt.
Verifiziere dies für die Ellipse ell [ell: $9x^2+25y^2=5625$]

47) Ein Auszug aus …

Klasse: 7A(Rg) **2. Schularbeit (zweistündig), Gruppe A** 20. 12. 2002

Aufgabe 1 (Ellipse):



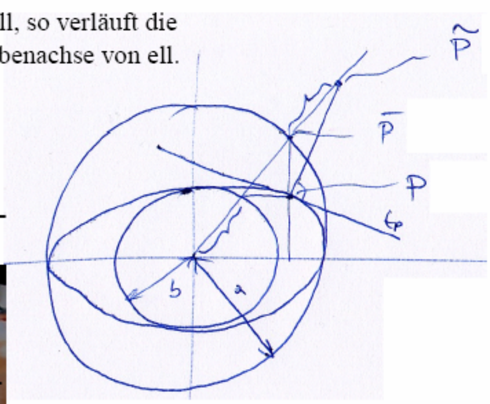
In nebenstehender Abbildung ist eine Ellipse ell sowie einer ihrer Punkte T samt Tangente t_T illustriert. Letztere begrenzt zusammen mit der linken bzw. oberen Scheiteltangente t_A bzw. t_D ein Dreieck ΔQRS, welches in die Dreiecke ΔAST, ΔDTQ, ΔADR und ΔATD unterteilt werden kann.

$$F_{\Delta ADT} = 2\cdot\sqrt{\frac{F_{\Delta AST}\cdot F_{\Delta DTQ}\cdot F_{\Delta ADR}}{F_{\Delta PQR}}}$$

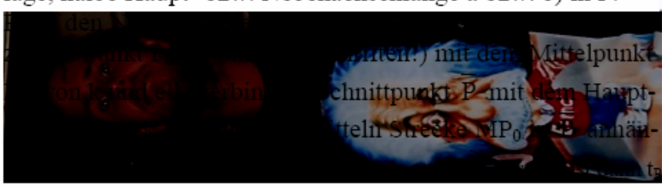
Dann läßt sich der Flächeninhalt $F_{\Delta ADT}$ des Dreiecks ΔADT durch nebenstehende allgemeingültige Formel berechnen.

Verifiziere diese Formel für jene Ellipse in Hauptlage, welche in $P(x_P|12)$ von t_P [t_P: $16x + 15y = 500$] berührt wird. Wähle für T den Punkt $T(x_T|-16)$!

48) **Satz.** Sind C und D die Nebenscheitel einer Ellipse ell in erster Hauptlage, für welche $e = b\sqrt{2}$ gilt sowie E ein beliebiger Punkt auf ell, so verläuft die EULERsche Gerade[1] des Dreiecks ΔCDE parallel zur Nebenachse von ell.
Verifiziere diesen Satz für den Punkt E(9|3)!



49) Nebenstehende (Zumutung[2] einer! ☺) Skizze illustriert eine Tangentenkonstruktion für die Tangente t_P an ell (erste Hauptlage, halbe Haupt- bzw. Nebenachsenlänge a bzw. b) in P.



Beweise diese Konstruktion oder/und(!) überprüfe sie für $P(15|y_P>0)$ und $\boxed{\text{ell.: } 16x^2+25y^2=10000}$!

Anmerkung: Dein matheprof(.at) und Albert EINSTEIN (1879–1955) verdecken deshalb einen Teil des Textes, weil du zunächst selbst probieren soll(te)st, die illustrierte Konstruktion ohne zusätzliche verbale Beschreibungen nachzuvollziehen. Für alle Fälle findest du diesen Textteil ohne Hintergrundbild bei den Lösungen! ☺

[1] Zur Erinnerung: Auf der EULERschen Gerade eines Dreiecks liegen die merkwürdigen Dreieckspunkte H, S und U (… und dies übrigens so, dass stets $\overline{HS}=2\cdot\overline{SU}$ gilt und S zwischen H und U liegt).

[2]: ……………… aber **gut beschriftet**, und **dies** ist die halbe Miete! ☺

Aufgaben 50 bis 54 zur Ellipse:

50) Dreht man den rechtsseitigen Brennpunkt F einer Ellipse ell in erster Hauptlage um 90° um den Ursprung in die positive y-Achse, so sei der gedrehte Punkt mit P bezeichnet.
T sei der im ersten Quadranten liegende Berührungspunkt einer der beiden Tangenten, die man durch P an ell legen kann.
Dann gilt folgender

SATZ. Die Normale n auf t_T durch T schneidet die Nebenachse von ell in jenem Punkt Q, welcher durch auch durch Spiegelung von P am Ellipsenmittelpunkt entsteht.

Bestätige diesen Satz für jene Ellipse durch $R\left(5\middle|\frac{24}{7}\right)$ mit $F(5|0)$!

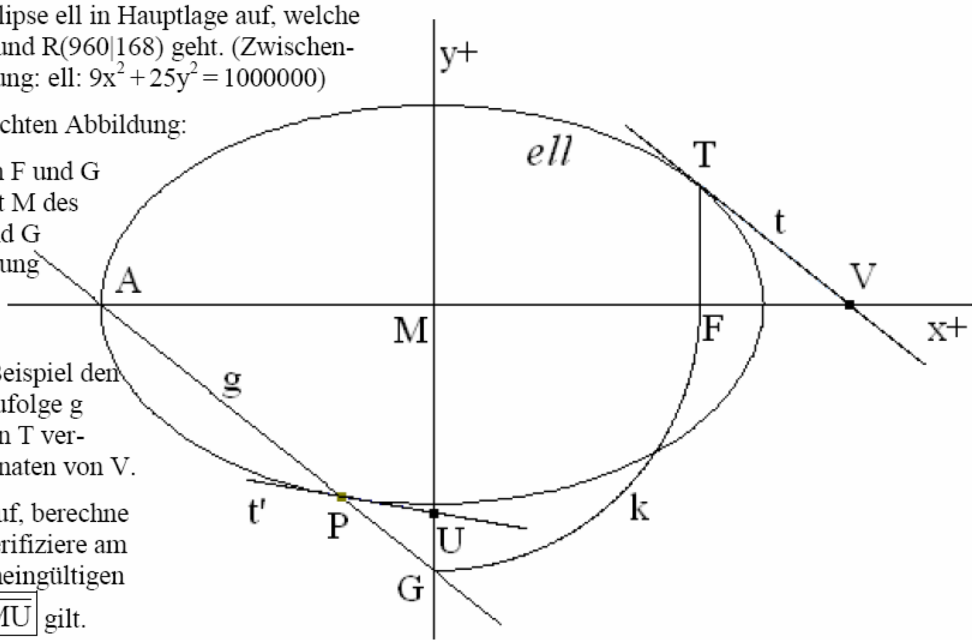
51) a) Stelle eine Gleichung jener Ellipse ell in Hauptlage auf, welche durch die Punkte $Q(600|480)$ und $R(960|168)$ geht. (Zwischenresultat für die weitere Rechnung: ell: $9x^2+25y^2=1000000$)

Bearbeite unter Beachtung der rechten Abbildung:

b) Berechne die Koordinaten von F und G [Beachte, dass der Mittelpunkt M des (Viertel-)Kreises k durch F und G in M liegt!], stelle eine Gleichung von g auf und berechne die Koordinaten von P.

c) Verifiziere am vorliegenden Beispiel den allgemeingültigen Satz, demzufolge g parallel zur Tangente t an ell in T verläuft und berechne die Koordinaten von V.

d) Stelle eine Gleichung von t´ auf, berechne die Koordinaten von U und verifiziere am konkreten Beispiel den allgemeingültigen Satz, demzufolge $\boxed{\overline{MV}=2\cdot\overline{MU}}$ gilt.



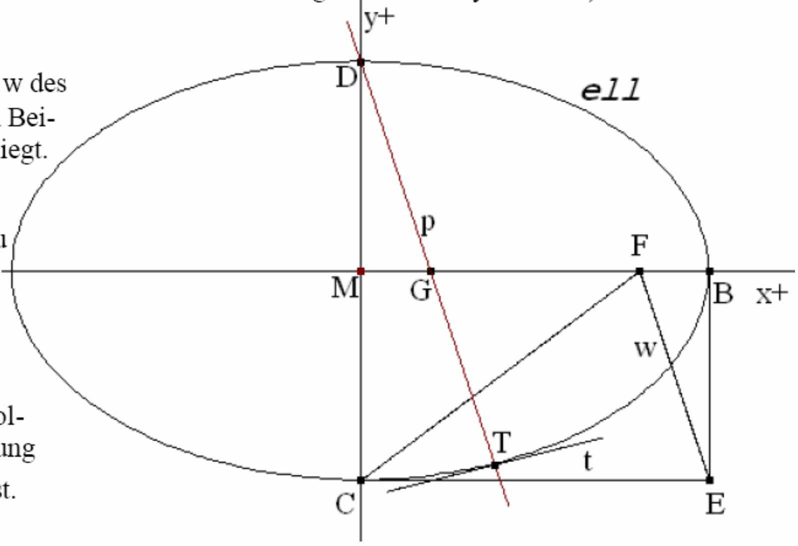
52) a) Stelle eine Gleichung jener Ellipse ell in Hauptlage mit dem rechtsseitigen Brennpunkt $F(52|0)$ auf, welche durch den Punkt $Q(25|-36)$ geht. (Zwischenresultat für die weitere Rechnung: ell: $9x^2+25y^2=38025$)

Bearbeite unter Beachtung der rechten Abbildung:

b) Ermittle eine Gleichung der Winkelsymmetrale w des Winkels $\angle CFB$ und kontrolliere am konkreten Beispiel den allgemeingültigen Satz, dass E auf w liegt.

c) G ist jener Punkt auf der Strecke MB, für den $\overline{MG}=\overline{FB}$ gilt. Lege durch G die Parallele p zu w und kontrolliere am konkreten Beispiel den allgemeingültigen Satz, dass D auf p liegt.

d) Ermittle die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts T von ell mit p und stelle eine Gleichung der Tangente t an ell in T auf. Kontrolliere den allgemeingültigen Satz, dass die Steigung k von t durch die Formel $\boxed{k=\frac{b(a-e)}{e(e-2a)}}$ gegeben ist.



53) SATZ. Die durch den Nebenscheitel $C(0|-b)$ der Ellipse ell [ell.: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$] verlaufende Gerade g mit der Steigung $k=\frac{b}{\sqrt{e^2-b^2}}$ (wobei e die Brennweite von ell bezeichnet) schneidet ell im zweiten Schnittpunkt unter 90°.

Verifiziere diesen Satz am konkreten Beispiel der Ellipse ell [ell.: $9x^2+34y^2=191250$]!

54) Legt man durch einen Punkt $T(x_T|y_T)$ einer Ellipse in erster Hauptlage mit den Brennpunkten F_1 und F_2 sowohl die Tangente t_T als auch die Normale n_T, so begrenzen die Hautpachse von ell, t_T und n_T ein Dreieck, für dessen Flächeninhalt μ die Formel $\boxed{\mu=\frac{y_T}{x_T}\cdot\overline{F_1T}\cdot\overline{F_2T}}$ gilt. Verifiziere dies für $T(20|12)$, $F_1(-15|0)$ und $F_2(15|0)$!

AUFGABEN 55 BIS 58 (BZW. 60) ZUR ELLIPSE:

55) SATZ. Legt man im Punkt $T\left(\sqrt{\frac{a\cdot(a+b)}{2}} \mid y_T < 0\right)$ die Tangente t_T an eine Ellipse in Hauptlage mit dem rechtsseitigen Brennpunkt F(e|0) und dem unteren Nebenscheitel C(0|–b), so verläuft t_T parallel zur Gerade g_{CP}, wobei P der direkt über F liegende Ellipsenpunkt ist.

Bestätige diesen Satz für F(24|0) und C(0|–7)!

56) SATZ. Legt man im Punkt $T\left(\sqrt{\frac{a\cdot(a-e)}{2}} \mid y_T < 0\right)$ die Tangente t_T an eine Ellipse in Hauptlage mit dem rechtsseitigen Brennpunkt F(e|0) und dem linken Hauptscheitel A(–a|0), so verläuft t_T parallel zur Gerade g_{AP}, wobei P der direkt über F liegende Ellipsenpunkt ist.

Bestätige diesen Satz für F(14|0) und A(–50|0)!

57) SATZ. Legt man im Punkt $T\left(\sqrt{\frac{a\cdot(a+e)}{2}} \mid y_T < 0\right)$ die Tangente t_T an eine Ellipse in Hauptlage mit dem linksseitigen Brennpunkt F(–e|0) und dem linken Hauptscheitel A(–a|0), so verläuft t_T parallel zur Gerade g_{AP}, wobei P der direkt über F liegende Ellipsenpunkt ist.

Bestätige diesen Satz für F(–7|0) und A(–25|0)!

58) SATZ. Legt man im Punkt $T\left(\sqrt{\frac{a\cdot(a-b)}{2}} \mid y_T < 0\right)$ die Tangente t_T an eine Ellipse in Hauptlage mit dem linksseitigen Brennpunkt F(–e|0) und dem oberen Nebenscheitel D(0|b), so verläuft t_T parallel zur Gerade g_{DP}, wobei P der direkt über F liegende Ellipsenpunkt ist.

Bestätige diesen Satz für F(–24|0) und D(0|7)!

Zusätzliche Übungsaufgaben (für besonders Fleißige, welche dann u.a. im Internet recherchieren, worum es bei den Sätzen von BRIANCHON und PASCAL geht):

59) Zeige, dass das Sechseck ABCDEF[A(60|–15), B(60|10), C(12|42), D(–84|6), E(–30|–30), F(20|–30)] Tangentensechseck einer Ellipse in Hauptlage ist, stelle eine Gleichung von ell auf und verifiziere anhand dieses konkreten Tangentensechsecks den Satz von BRIANCHON!

60) A(–19|–4) und D(20|2,5) sind Punkte einer Ellipse ell in Hauptlage.

a) Stelle eine Gleichung von ell auf und bestimme den Hauptlagentyp!

b) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte B und F ($x_B > x_F$) der Gerade g[I(–9|–1), II(–1|–19)] mit ell sowie der Schnittpunkte C und E ($y_C < y_E$) der Gerade h[III(1|4), IV(7|–2)] mit ell.

c) Verifiziere anhand des Sechsecks ABCDEF den Satz von PASCAL!

Viel Freude beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im April 2011. Dr. Robert Resel, e. h.

Lösung zu 49):

Verdeckter Text:	P auf den Nebenscheitelkreis k (Radius b) projizieren, projizierten Punkt P_0 (in Skizze beschriften!) mit dem Mittelpunkt M (von k und ell) verbinden, Schnittpunkt $\overline{P}$ mit dem Hauptscheitelkreis k´ (Radius a) ermitteln Strecke MP_0 in $\overline{P}$ anhängen, Endpunkt $\widetilde{P}$ mit P verbinden, Normale auf $P\widetilde{P}$ durch P ist dann t_P.