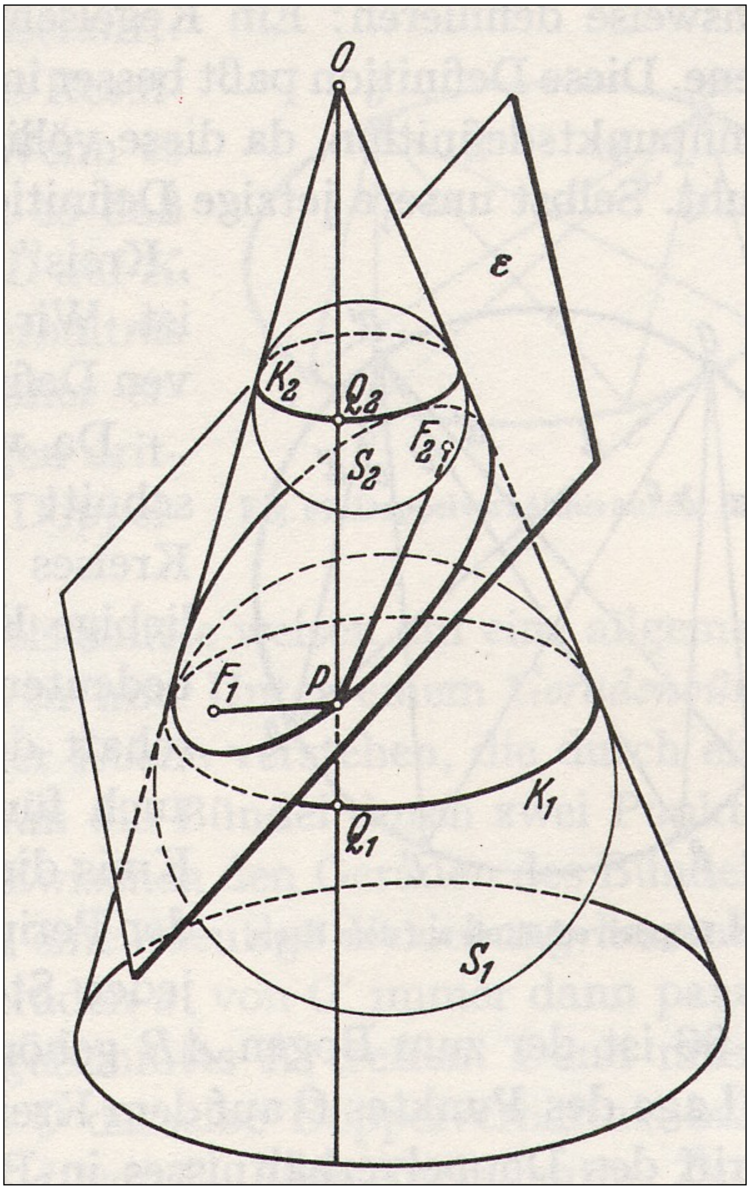
Einführung in die Geometrie der Kegelschnitte

(Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene)

7D, Realgymnasium, 2008/09

Teil 1: Die Ellipse



I) Die Ellipse als Kegelschnitt - die DANDELINschen Kugeln

In nebenstehender Abbildung wird eine Drehkegelfläche von einer Ebene ε geschnitten. Dabei ist ε gegenüber jeder Normalebene zur Kegelachse schwächer geneigt als der Kegel selbst. Dadurch schneidet ε auch nur den unteren Teil des ***gesamten Doppelkegels***. Die dabei entstehende Schnittkurve heißt ***Ellipse*** und stellt ***einen von*** insgesamt ***neun*** möglichen Typen von Kegelschnittslinien (oder kurz: ***Kegelschnitten***) dar. Doch sei beruhigt! Wir werden uns im Unterricht auf drei bzw. vier der neun Typen beschränken, da die verbleibenden fünf Fälle lediglich Sonderformen der drei bzw. vier eigentlich interessanten Fälle darstellen. Doch dazu an späterer Stelle Genaueres!

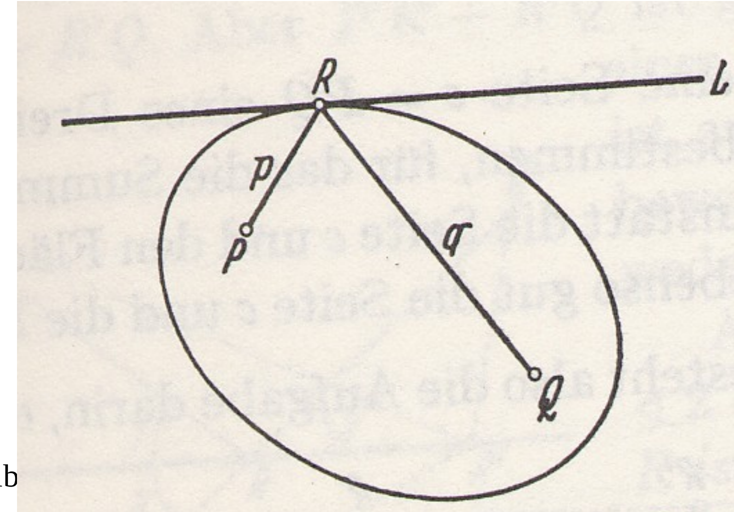
Wie aus der Abbildung ersichtlich, lassen sich der Kegelfläche genau zwei Kugeln S_1 und S_2 (S für Sphäre!) berührend einschreiben, welche nicht nur die Kegelfläche – längs der Kreise K_1 und K_2 –, sondern auch ε berühren, und zwar in F_1 und F_2. (S_1 und S_2 sind nach dem belgischen Mathematiker Pierre DANDELIN benannt, der 1822 auf die Idee kam, vermöge dieser Kugeln die nun folgende <u>planimetrische Eigenschaft</u> der Ellipse aus der Geometrie des Kegels und der Kugel abzuleiten.)

Betrachtet man jetzt einen beliebigen Punkt P der Schnittkurve – ergo: der Ellipse – und verbindet ihn mit der Kegelspitze O, so schneidet diese Kegelerzeugende K_1 bzw. K_2 in Q_1 bzw. Q_2. Jetzt sind sowohl PF_1 und PQ_1 als auch PF_2 und PQ_2 Tangenten an die Kugel (Warum? Begründe!), woraus folgt, dass sowohl $\boxed{\overline{PF_1} = \overline{PQ_1}}$ als auch $\boxed{\overline{PF_2} = \overline{PQ_2}}$ gilt. Da $\overline{PQ_1} + \overline{PQ_2}$ aber für jeden Ellipsenpunkt den gleichen Wert annimmt – Welchen? –, ist somit auch für jeden Ellipsenpunkt P die Summe $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ konstant, was uns zur folgenden grundlegenden Definition führt.

DEFINITION 1. Unter einer Ellipse ell versteht man die Menge aller Punkte X der Ebene, für welche die Summe der Abstände zu zwei festen Punkten F_1 und F_2 (Brennpunkte oder Foci – sing. zu letzteren: Focus!) konstant ist, d.h. symbolisch: $\text{ell} = \{X \mid \overline{XF_1} + \overline{XF_2} = \text{const.}\}$.

Der Einfachheit der Rechnung wegen wählen wir für die Brennpunkte F_1 und F_2 symmetrisch zum Ursprung liegende Punkte $F_1(u|v)$ und $F_2(-u|-v)$ und schreiben die konstante Summe als 2a an, was voraussetzt, dass $\boxed{2a > \overline{F_1F_2}}$ gilt, was sich zu $a^2 > u^2+v^2$ umformen läßt. Jetzt steht uns einiges an Umformungsarbeit ins Haus:

Um in einem Punkt R einer Ellipse mit den Foci P und Q die Tangente zu konstruieren, betrachten wir die folgende *elementargeometrische Problemstellung aus der ersten Klasse AHS:*



Für welchen Punkt R auf einer Gerade l ist bei zwei vorgegebenen Punkten P und Q die Abstandssumme $\overline{PR}+\overline{RQ}$ minimal?

Die Lösung ist denkbar einfach und sollst du hier deshalb in Eigenregie durchführen! Als Hinweis soll genügen, dass durch Spiegelung von Q an l ein Punkt Q´ entsteht (Konstruiere Q´, deshalb ist über der Abbildung schließlich auch Platz freigelassen worden!), für den $\overline{RQ'}=\overline{RQ}$ gilt, woraus sich der gesuchte Punkt R als Schnitt von l mit der Gerade durch ………………… ergibt. **Da somit für alle anderen Punkte X auf l**

↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑
Ergänze selbst!
↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

die Abstandssumme $\overline{PX}+\overline{XQ}$ …………….. als 2a= $\overline{PR}+\overline{RQ}$ ist,
liegen all diese Punkte X somit …………….. des von der Ellipse ell (die durch R verläuft und

↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑
Ergänze selbst!
↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

die Brennpunkte P und Q besitzt) umschlossenen Bereichs.

↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓
↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓
↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

Aus dieser Eigenschaft
folgt nun aber, dass l die ………………………. an die Ellipse im Punkt R ist. So weit, so gut! ☺

Da Q´ durch Spiegelung von Q an l entstanden ist, **schließen die Brennstrecken PR und QR mit der Tangente l ……………………………. ein**. Es ergibt sich daraus automatisch, dass **diese**

↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

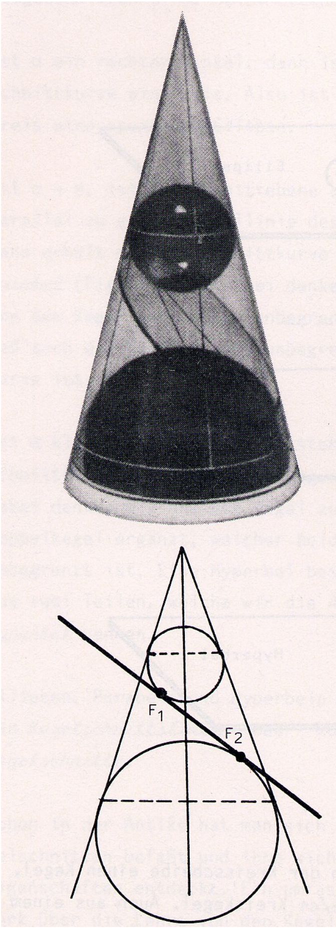
Eigenschaft auch Ergänze selbst! für die Normale n auf l durch R gilt, woraus

↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

folgt, dass n die ……………………………. der Brennstrahlen PR und QR ist. Jetzt ist aber jeder Richtungsvektor $\vec{r}$ von n

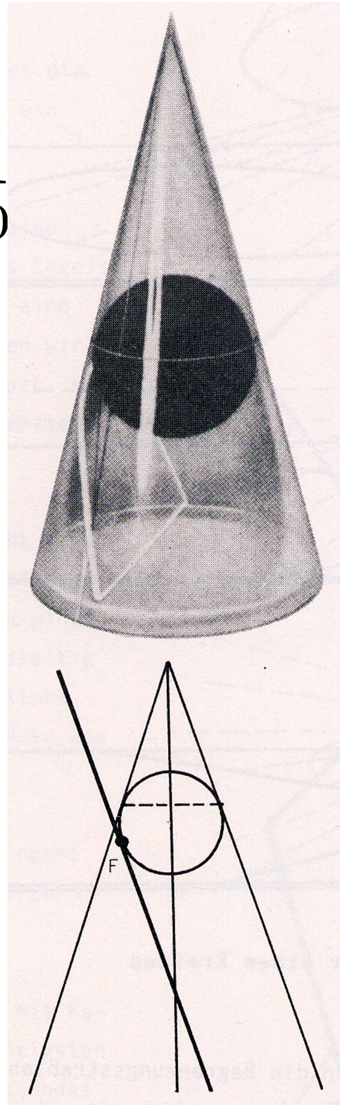
Ergänze selbst!
↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

automatisch ein ……………………………. von l, womit wir nun wissen, wie wir zum Aufstellen einer Tangentengleichung vorzugehen haben. Jetzt steht uns (wieder einmal!) einiges an Umformungsarbeit ins Haus:



Blatt 3 zum Heimstudium: Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene, Teil 1

(7D, Realgymnasium, PM3, WS 2008/09)



Zwei weitere Möglichkeiten zur Herleitung der Berühr(ungs)bedingung für die Ellipse [$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$] *und die Gerade* [$y=kx+d$]

1) Suche im Internet unter "Berührbedingung" nach einer weiteren Herleitung der Berührungsbedingung für die Ellipse und die Gerade.

   a) Welche Nachteile hat die "konventionelle Form" (eine andere wirst du wohl im www nicht finden; oder doch?!) der Herleitung gegenüber "unserer" Herleitung in der SÜ?

   b) Solltest du welche finden: Erläutere Vorteile der konventionellen Herleitung!

2) Dritte Variante (die du wohl kaum im www finden wirst; oder doch?!):

   Ausgehend von $\boxed{t: \frac{x_T}{a^2}x + \frac{y_T}{b^2}y = 1}$ stellst du einen Koeffizientenvergleich (wie bei der Lösung der Aufgaben 11 und 12 in der SÜ!) mit $t: y = kx + d$ her, indem du umformst …

   $\boxed{t: \left(-\frac{k}{d}\right)x + \frac{1}{d}y = 1}$

   (Das hättest du an und für sich selbst schaffen müssen!)

   … und schließlich vergleichst:

Koeffizientenvergleich:

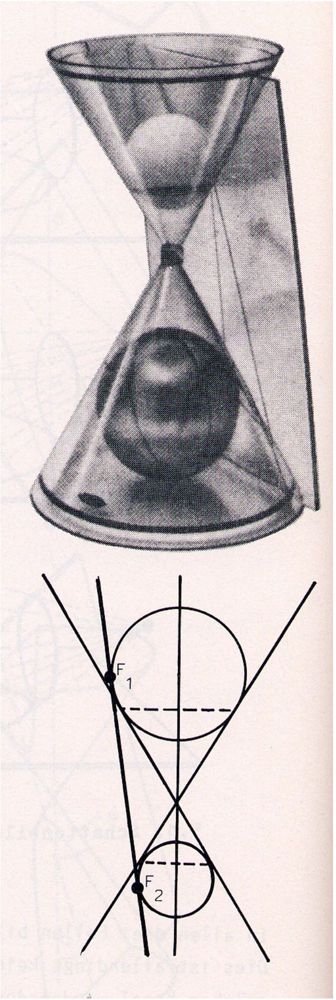
$$\frac{x_T}{a^2} = -\frac{\dots}{\dots} \Rightarrow x_T{}^2 = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \Rightarrow b^2x_T{}^2 = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$\frac{y_T}{b^2} = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow y_T{}^2 = \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow \qquad a^2y_T{}^2 = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

Addieren ergibt dann ………………………

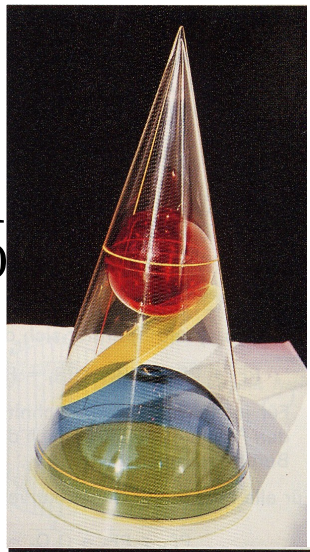
bzw. ………………………

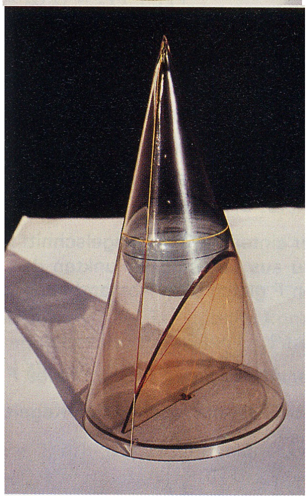
bzw. $d^2 = a^2k^2 + b^2$, w. z. z. w.



Blatt 4 zum Heimstudium: Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene, Teil 1

(7D, Realgymnasium, PM3, WS 2008/09)





Eine weitere Möglichkeit zur Herleitung der Orthogonalitätsbedingung für die Ellipse $[b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2]$ *und die Gerade* $[y=kx+d]$

Ausgehend von $n: \frac{y_T}{b^2}x - \frac{x_T}{a^2}y = \frac{x_T y_T}{b^2} - \frac{x_T y_T}{a^2}$

bzw. $n: \frac{....}{....}x - \frac{.....}{.....}y = \frac{.............}{.............}$

bzw. $n: \frac{...........}{...........}\frac{....}{....}x - \frac{...........}{...........}\frac{....}{....}y = 1$

bzw. $n: \frac{a^2}{e^2 x_T}x - \frac{b^2}{e^2 y_T}y = 1$

stellst du einen Koeffizientenvergleich (wie bei der Lösung der Aufgaben 14 und 15 in der SÜ!) mit $t: y = kx + d$ her, indem du umformst ….

$$\boxed{t: \left(-\frac{...}{...}\right)x + \frac{...}{...}y = 1}$$

…. und schließlich vergleichst:

Koeffizientenvergleich: $\frac{........}{........} = -\frac{..}{..} \Rightarrow x_T^{\,2} = \frac{........}{........} \Rightarrow b^2 x_T^{\,2} = \frac{............}{............}$

$$-\frac{........}{........} = \frac{..}{..} \Rightarrow y_T^{\,2} = \frac{........}{........} \Rightarrow a^2 y_T^{\,2} = \frac{............}{............}$$

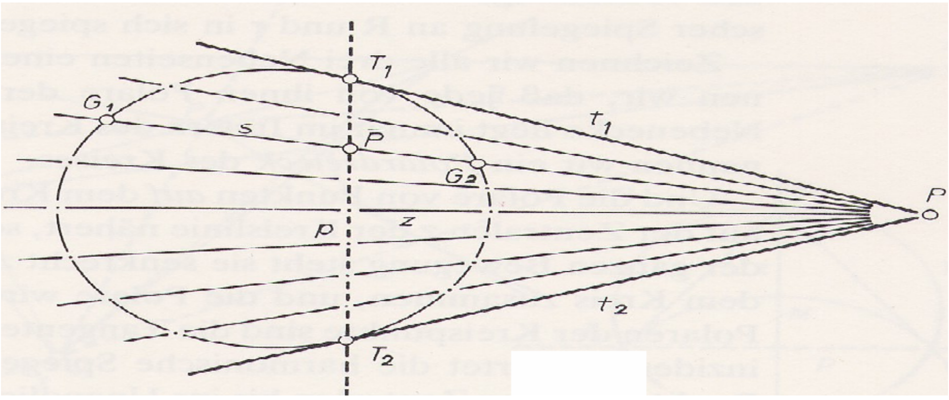
Addieren ergibt dann ……………………………….

bzw. ……………………………….

bzw. $e^4k^2 = a^2d^2 + b^2d^2k^2$, w. z. z. w.

Blatt 5 zum Heimstudium: Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene, Teil 1 [7D(Rg), PM3, WS 2008/09]

<u>Tangenten an eine Ellipse durch einen Punkt außerhalb des von der Ellipse umschlossenen Bereichs (Teil I)</u>



In der Abbildung siehst du eine Ellipse ell sowie einen außerhalb des von ell umschlossenen Bereichs liegenden Punkt P, durch den insgesamt neun Geraden gelegt wurden.

……… davon haben mit ell …… Punkte gemeinsam, ….. davon genau ……. .

Letztere sind demnach …………. an ell, wobei .. die Ellipse in … und ... die Ellipse in …. berührt.

Sind ell.: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sowie $P(x_P|y_P)$ nun vorgegeben, so überlegen wir jetzt schrittweise, wie wir uns eine Gleichung der Gerade p durch T_1 und T_2 verschaffen können:

- Gehen wir von $T_1(x_1|y_1)$ aus, dann gilt $t_1: \frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = 1$ (*).
- Ausgehend von $T_2(x_2|y_2)$ erhalten wir $t_2: \frac{x_2}{a^2}x + \frac{y_2}{b^2}y = 1$ (**).
- Mit den Ansätzen $t_1: y = k_1x + d_1$ und $t_2: y = k_2x + d_2$ gelten dann wegen $P \in t_1 \wedge P \in t_2$ die "***Gleichungen***" $d = y_P - kx_P$ (***wenn man anstelle von k und d jeweils k_1 und d_1 bzw. k_2 und d_2 schreibt!***).

- Koeffizientenvergleich von (*) mit $t_1: \left(-\frac{k_1}{d_1}\right)x + \frac{1}{d_1}y = 1$ liefert $\frac{x_1}{a^2} = -\frac{k_1}{d_1}$ bzw. wegen der "***Gleichungen***" $\frac{x_1}{a^2} = -\frac{k_1}{y_P - k_1x_P}$, was zu $\boxed{x_1 = \frac{-a^2k_1}{y_P - k_1x_P}}$ führt. Ferner erhalten wir $\frac{y_1}{b^2} = \frac{1}{d_1}$ bzw. wegen der "***Gleichungen***" $\frac{y_1}{b^2} = \frac{1}{y_P - k_1x_P}$, was zu $\boxed{y_1 = \frac{b^2}{y_P - k_1x_P}}$ führt.

- Analog ergibt sich für x_2 bzw. y_2 die Darstellung $\boxed{x_2 = \frac{-a^2k_2}{y_P - k_2x_P}}$ bzw. $\boxed{y_2 = \frac{b^2}{y_P - k_2x_P}}$.

Blatt 6 zum Heimstudium: Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene, Teil 1 [7D(Rg), PM3, WS 2008/09]

Tangenten an eine Ellipse durch einen Punkt außerhalb des von der Ellipse umschlossenen Bereichs (Teil II)

- Zwecks Aufstellen einer Gleichung von p berechnen wir zunächst den Vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$, wobei wir hier durch Multiplikation mit den beiden auftauchenden Nennern gleich einen kollinearen Richtungsvektor von p aufstellen, nundenn:

$$\overrightarrow{T_1T_2} \parallel \begin{pmatrix} -a^2k_2(y_P-k_1x_P)+a^2k_1(y_P-k_2x_P) \\ b^2(y_P-k_1x_P)-b^2(y_P-k_2x_P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2y_P(k_1-k_2) \\ -b^2x_P(k_1-k_2) \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a^2y_P \\ -b^2x_P \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b^2x_P \\ a^2y_P \end{pmatrix}$$

Da $\begin{pmatrix} b^2x_P \\ a^2y_P \end{pmatrix}$ somit ein Normalvektor von p ist, ergibt sich damit via p: $b^2x_Px+a^2y_Py = c$

[wobei $c = b^2x_P \cdot \dfrac{-a^2k_1}{y_p-k_1x_P} + a^2y_P \cdot \dfrac{b^2}{y_p-k_1x_P} = \dfrac{a^2b^2}{y_p-k_1x_P}\cdot(y_p-k_1x_P) = a^2b^2$] sofort

↑↑↑ ↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑ ↑↑↑↑

$T_1 \in p$! Ergo: Koordinaten von T_1 einsetzen!! Herausheben und ……….. … vereinfachen!!!!

eine Gleichung von p, *die man demnach einfach durch Einsetzen von P in die Spaltform erhält!*

Diese dem Punkt P zugeordnete Gerade p bekommt nun eine eigene Bezeichnung:

Definition. Die zum Punkt $P(x_P|y_P)$ zugehörige Gerade p mit der Gleichung $\boxed{p: b^2x_Px+a^2y_Py = a^2b^2}$ heißt **Polare des Punktes P** bezüglich der Ellipse ell [ell.: $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$]. Umgekehrt ist P der **Pol von p bezüglich ell**.

Aus unseren soeben angestellten Überlegungen ergibt sich folgender

Satz. Für einen außerhalb des von einer Ellipse ell umschlossenen Bereichs liegenden Punkt P trägt seine Polare p bezüglich ell gerade die Berührungspunkte jener Tangenten, die man von P aus an ell legen kann.

Abschließende Bemerkungen:

(1) Liegt P innerhalb des von ell umschlossenen Gebiets, so ist p eine Passante von ell (was man sich intuitiv auch erwartet, da man durch einen Punkt "innerhalb einer Ellipse" ell keine Tangenten an ell legen kann, da ja jede Gerade durch P ell in zwei Punkten schneidet!).

(2) Liegt P auf der Ellipse, dann ….
Ja, was gilt denn dann?
Überlege selbst, notiere deine
Überlegung in eigenen Worten
und sei auch darauf vorbereitet,
in der nächsten Mathematikstunde
darauf angesprochen zu werden!