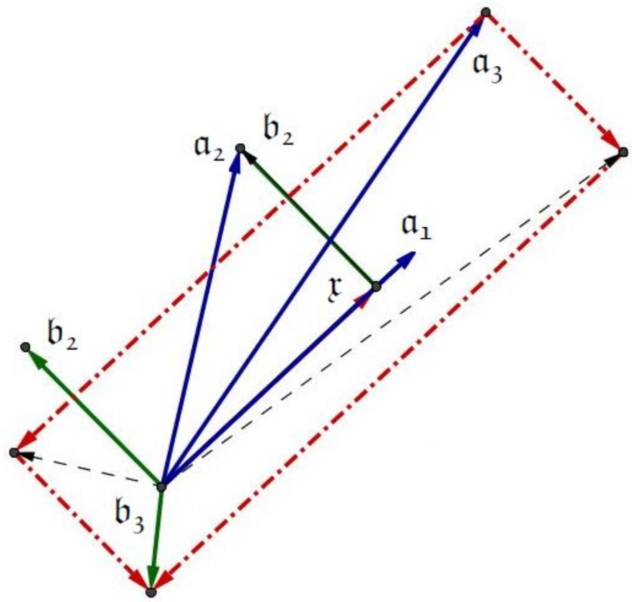
Bei nachfolgendem Artikel handelt es sich um die Rohfassung einer Idee, welche im Februar 2013 basierend auf einer Frage der Mathematikstudentin Claudia Walla zur Linearen Algebra entstand und schlieszlich zu Überlegungen bis in die elementare Funktionalanalysis führte. Aus diesem Grund haftet diesem paper somit noch nicht das Qualitätssiegel des finalen Feinschliffs an, was es nun auch freilich bei der Lektüre dieser Arbeit zu berücksichtigen gilt.

Wien, im März 2013.

Dr. Robert Resel

Skalares Produkt und Gram-Schmidtsches Orthonormierungsverfahren in Verbindung mit dem Vektoriellen Produkt des $\mathbb{R}^3$ im Mathematikunterricht

von Robert Resel, AHS-Lehrer in Wien



Drei Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{a}_3$ des $\mathbb{R}^3$, deren Spatprodukt (oder algebraisch äquivalent: Determinante) nicht verschwindet, bilden eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$. Insbesondere sind dann $\boxed{\mathfrak{a}_1 \text{ und } \mathfrak{a}_2}$ nicht linear abhängig, womit die Frage nach einem gemeinsamen Normalvektor $\boxed{\text{dieser beiden Vektoren}}$ einen Sinn macht.

Nun führt die Frage nach einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}'$ der Form $\mathcal{B}' = \left\{\frac{1}{|\mathfrak{a}_1|} \cdot \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{c}_2,\ \mathfrak{c}_3\right\}$ zwar weiter als die obig gestellte, beinhaltet aber natürlich eine Beantwortung der Frage eines gemeinsamen Normalvektors $\mathfrak{c}_3$ von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Um $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{c}_3$ zu erhalten, greifen wir auf eine wichtige *geometrische Eigenschaft* des Standardskalarprodukts zurück, welche auch in obiger Abbildung illustriert ist:
Das skalare Produkt $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2$ der Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ ist gleich dem signierten Produkt des Betrags $|\mathfrak{a}_1|$ mit dem Betrag $|\mathfrak{x}|$ der Normalprojektion $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{a}_2$ auf $\mathfrak{a}_1$, wobei $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2$ positiv/negativ ist, je nachdem, ob $\measuredangle(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2)$ spitz bzw. stumpf ist. Für den Fall $\mathfrak{a}_1 \perp \mathfrak{a}_2$ gilt $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 = 0$ [weil diesfalls $\mathfrak{x}$ zum Nullvektor wird, was $|\mathfrak{x}| = 0$ und somit auch $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 = 0$ impliziert ("Orthogonalitätskriterium")].
$\boxed{\text{Bemerkung.}}$ Wenn man $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2$ über die Koordinatendarstellung der Standardbasis definiert, so ergibt sich diese Eigenschaft zwangsläufig bei Zerlegung von $\mathfrak{a}_2$ in eine zu $\mathfrak{a}_1$ parallele Komponente $\mathfrak{x}$ sowie in eine zu $\mathfrak{a}_1$ normale Komponente $\mathfrak{b}_2$ (siehe Abbildung!).
Um jetzt zu $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{c}_3$ zu gelangen, subtrahieren wir zunächst von $\mathfrak{a}_2$ die zu $\mathfrak{a}_1$ parallele Komponente $\mathfrak{x}$ und erhalten somit wegen $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 = |\mathfrak{a}_1| \cdot |\mathfrak{x}| \iff |\mathfrak{x}| = \frac{\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1|}$ für $\mathfrak{x}$ die Darstellung $\mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1|^2} \cdot \mathfrak{a}_1$ und damit in weiterer Folge für $\mathfrak{b}_2$ die Formel $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_2 - \frac{\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2}{|\mathfrak{a}_1|^2} \cdot \mathfrak{a}_1$, welche sich unter Verwendung des Ansatzes $\mathfrak{c}_1 := \frac{1}{|\mathfrak{a}_1|} \cdot \mathfrak{a}_1$ aus der gesuchten Orthonormalbasis $\mathcal{B}'$ auch in der Form

$$\boxed{\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_2 - (\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{c}_1) \cdot \mathfrak{c}_1}$$

anschreiben lässt. Setzen wir jetzt nach $\mathfrak{c}_1 := \frac{1}{|\mathfrak{a}_1|} \cdot \mathfrak{a}_1$ auch noch entsprechend $\mathfrak{c}_2 := \frac{1}{|\mathfrak{b}_2|} \cdot \mathfrak{b}_2$, so fehlt uns nun nur noch $\mathfrak{c}_3$, da $\mathfrak{b}_2$ (und somit auch $\mathfrak{c}_2$) ja wegen

$$\mathfrak{b}_2 \cdot \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{c}_1 - (\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{c}_1) \cdot \underbrace{\mathfrak{c}_1{}^2}_{1} = 0$$

auf $\mathfrak{c}_1$ normal steht.
Dazu liegt es nahe, die selbe Idee wie zuvor bei $\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{a}_1$ bzw. $\mathfrak{c}_1$ wieder zu verwenden, nämlich von $\mathfrak{b}_2$ die zu $\mathfrak{a}_1$ bzw. $\mathfrak{c}_1$ parallele Komponente zu subtrahieren. Dies bedeutet nun, dass wir von $\mathfrak{b}_3$ die zu $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ parallelen Komponenten (in der Abbildung strichpunktiert eingezeichnet) zu subtrahieren haben, was jeweils alleine nicht genügt (und nur auf die strichliert eingezeichneten Vektoren führen würde), wie die folgende Argumentation zeigt:
Wenn wir von $\mathfrak{a}_3$ nun via

$$\boxed{\mathfrak{a}_3 \mapsto \mathfrak{a}_3 - (\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{c}_1) \cdot \mathfrak{c}_1 - (\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{c}_2) \cdot \mathfrak{c}_2}$$

(wie zuvor bei $\mathfrak{b}_2$) sofort beide Komponenten subtrahieren, erhalten wir einen Vektor $\mathfrak{b}_3$, der wegen

$$\mathfrak{b}_3 \cdot \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{c}_1 - (\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{c}_1) \cdot \underbrace{\mathfrak{c}_1{}^2}_{1} - (\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{c}_2) \cdot \underbrace{(\mathfrak{c}_2 \cdot \mathfrak{c}_1)}_{0} = 0$$

auf $\mathfrak{c}_1$ und wegen

$$\mathfrak{b}_3 \cdot \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{c}_2 - (\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{c}_1) \cdot \underbrace{(\mathfrak{c}_1 \cdot \mathfrak{c}_2)}_{0} - (\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{c}_2) \cdot \underbrace{\mathfrak{c}_2{}^2}_{1} = 0$$

ebenso auf $\mathfrak{c}_2$ normal steht, $\square$.
Via $\mathfrak{c}_3 := \frac{1}{|\mathfrak{b}_3|} \cdot \mathfrak{b}_3$ ist die Orthonormalbasis $\mathcal{B}'$ somit komplett (was sich prinzipiell via

$$\mathfrak{b}_{n+1} := \mathfrak{a}_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (\mathfrak{a}_{n+1} \cdot \mathfrak{c}_k) \cdot \mathfrak{c}_k$$

verallgemeinern und induktiv rasch unter Verwendung des Kronecker-Symbols δ_{jk} beweisen lässt) und wir können mit der **eigentlichen Fragestellung dieses Artikels** beginnen, nämlich:
Welchen weiteren[1] Weg zum Vektoriellen Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ eröffnet uns die soeben erörterte Methode der GRAM-SCHMIDTschen Orthonormierung einer Basis $\mathcal{B} = \{\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$?
Nunja, wenn wir vom Ansatz

$$\mathfrak{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ \mathfrak{a}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{a}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

ausgehen und alles Folgende tatsächlich mit Koordinaten "nachrechnen" würden, brächte uns dies in etwa so viel Einsicht, als würden wir dies etwa mit dem GRASSMANNschen Entwicklungssatz

$$(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \times \mathfrak{a}_3 = (\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_3) \cdot \mathfrak{a}_2 - (\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{a}_3) \cdot \mathfrak{a}_1$$

tun, um ihn tiefer zu ergründen, weshalb wir einen anderen Weg einschlagen, der uns somit zwar keinen neuen Weg zum Vektoriellen Produkt, aber zumindest eine gewisse aposteriori-Querverbindung zum GRAM-SCHMIDTschen Verfahren liefert:

[1]Nach den beiden konstruktiven Zugängen über die DG, dem Orthogonalitätspostulat via Skalarpodukt sowie der Parameterelimination in der PDST von Ebenen

Wir vergleichen die offensichtlich voneinander linear abhängigen Vektoren $\mathfrak{b}_3$ und $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ und ermitteln einen der beiden Kollinearisierungsfaktoren, also z.B. den Faktor λ in

$$\mathfrak{b}_3 = \lambda \cdot \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2,$$

wozu wir einfach das skalare Produkt von $\mathfrak{b}_3$ mit $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ bilden und dabei bedenken, dass für $\mathfrak{y} = \lambda \cdot \mathfrak{x}$ die Gleichung

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{x} \cdot (\lambda \mathfrak{x}) = \lambda \cdot (\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}) = \lambda \cdot |\mathfrak{x}|^2$$

gilt:

$$(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \cdot \mathfrak{b}_3 = (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \cdot \mathfrak{a}_3 - (\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{c}_1) \cdot \overbrace{[(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \cdot \mathfrak{c}_1]}^{0} - (\mathfrak{a}_3 \cdot \mathfrak{c}_2) \cdot \overbrace{[(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \cdot \mathfrak{c}_2]}^{0} = (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \cdot \mathfrak{a}_3$$

$$\Rightarrow \quad (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \cdot \mathfrak{b}_3 = (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \cdot \mathfrak{a}_3 = \lambda \cdot |\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \cdot \mathfrak{a}_3}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2|^2}$$

Es ergibt sich also der folgende $\boxed{\text{Zusammenhang}}$ zwischen dem Vektor $\mathfrak{b}_3$ aus dem GRAM-SCHMIDTschen Verfahren und dem Vektoriellen Produkt $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$:

$$\boxed{\mathfrak{b}_3 = \frac{(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2) \cdot \mathfrak{a}_3}{|\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2|^2} \cdot (\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2)}$$

Ausblick

Erhardt SCHMIDT (1876-1959) hat als Schüler David HILBERTS (1862-1943) auf dem Gebiet der *Funktionalanalysis* Bahnbrechendes geleistet, woher ja **eigentlich** auch dieses Verfahren stammt, nur dass dort eben keine (von uns in der Geometrie als Pfeilklassen interpretierte) dreidimensionale Vektoren, sondern (spezielle) Funktionen betrachtet werden, welche unter der via $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ definierten (trivial scheinenden!) Funktionsaddition über (etwa) $\mathbb{R}$ einen unendlichdimensionalen Vektorraum V bilden, in dem man nun (z.B.!) via

$$f \cdot g := \int_I f(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

ein(!) Skalarprodukt definieren kann, welches alle uns bekannten Eigenschaften "unseres" bekannten Skalarprodukts (welches auch als Standardskalarprodukt bezeichnet wird, da es offensichtlich nebst diesem noch viele weitere Skalarprodukte gibt) besitzt. Insbesondere existiert dann auch der Begriff der *Orthogonalität* zweier Funktionen (freilich in einem abstrakten Sinn, der nichts mit Schnittwinkeln zwischen den entsprechenden Funktionsgraphen zu tun hat - wie man ja naheliegenderweise annehmen könnte, vgl. dazu auch MATHEMATRIX 5/6!), was uns jetzt z.B. für $I = [0; 1]$[2] und die Basis

$$\mathcal{B} = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ ...\ \}$$

des Vektorraums aller Polynome über $\mathbb{R}$ (Dass es sich hierbei wirklich um eine Basis handelt, kann ganz einfach unter Einsatz der Differentialrechnung zeigen.) vor die Frage stellt, wie man diese orthonormieren kann.

Freilich funktioniert dies via GRAM-SCHMIDT, wovon wir uns nun überzeugen wollen, wozu wir zunächst definieren

$$\mathfrak{a}_1 = 1,\ \mathfrak{a}_2 = x,\ \mathfrak{a}_3 = x^2,\ \mathfrak{a}_4 = x^3,\ ...$$

[2]Wir wählen absichtlich $[0; 1]$ und nicht etwa $[-1; 1]$, weil letzteres auf die sogenannten LEGENDRE-Polynome führt, die ohnehin bekannt sind und sich in der Physik aufgrund ihrer breiten Einsatzfähigkeit höchster Beliebtheit erfreuen.

Nun gilt $|\mathfrak{a}_1| = \sqrt{\int_0^1 1 \cdot 1 \cdot dx} = 1$, woraus schon $\boxed{\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{a}_1 = 1}$ und somit

$$\mathfrak{b}_2 = x - \int_0^1 1 \cdot x \cdot dx = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 \Big|_0^1 = x - \frac{1}{2}$$

und wegen

$$|\mathfrak{b}_2| = \sqrt{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot dx} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

schließlich

$$\boxed{\mathfrak{c}_2 = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(x - \tfrac{1}{2}\right) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{c}_2 = \sqrt{3} \cdot (2x - 1)}$$

folgt.
Für $\mathfrak{b}_3$ erhalten wir entsprechend

$$\mathfrak{b}_3 = x^2 - \int_0^1 1 \cdot x^2 \cdot dx - \left[(2\sqrt{3})^2 \cdot \int_0^1 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot x^2 \cdot dx\right] \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

woraus

$$|\mathfrak{b}_3| = \sqrt{\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 \cdot dx} = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

und somit

$$\boxed{\mathfrak{c}_3 = 6 \cdot \sqrt{5} \cdot \left(x^2 - x + \tfrac{1}{6}\right) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{c}_3 = \sqrt{5} \cdot (6x^2 - 6x + 1)}$$

folgt. Weitere neue " Basisvektoren" (Rechnung SELBST!) lauten

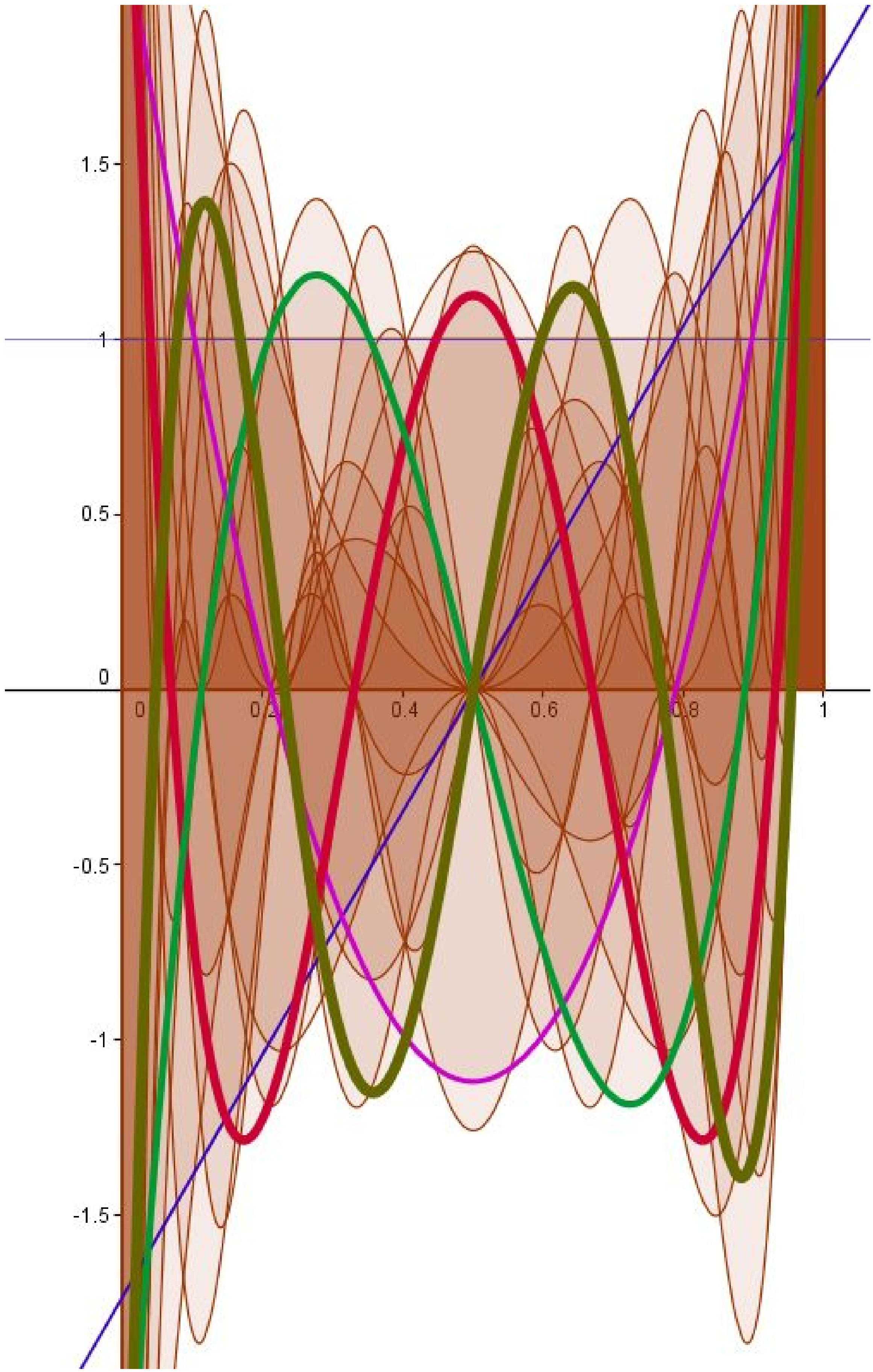
$$\boxed{\mathfrak{c}_4 = 20 \cdot \sqrt{7} \cdot \left(x^3 - \tfrac{3}{2} \cdot x^2 + \tfrac{3}{5} \cdot x - \tfrac{1}{20}\right) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{c}_4 = \sqrt{7} \cdot (20x^3 - 30x^2 + 12x - 1)},$$

$$\boxed{\mathfrak{c}_5 = 70 \cdot \sqrt{9} \cdot \left(x^4 - 2x^3 + \tfrac{9}{7} \cdot x^2 - \tfrac{2}{7} \cdot x + \tfrac{1}{70}\right) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{c}_5 = 3 \cdot (70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1)},$$

sowie

$$\boxed{\mathfrak{c}_6 = 252 \cdot \sqrt{11} \cdot \left(x^5 - \tfrac{5}{2} \cdot x^4 + \tfrac{20}{9} \cdot x^3 - \tfrac{5}{6} \cdot x^2 + \tfrac{5}{42} \cdot x - \tfrac{1}{252}\right) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{c}_6 = \sqrt{11} \cdot (252x^5 - 630x^4 + 560x^3 - 210x^2 + 30x - 1)},$$

welche allesamt auf der nächsten Seite abgebildet wurden, und zwar zusammen mit allen $\mathfrak{c}_i \cdot \mathfrak{c}_j$!



1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1