Vorbereitung auf die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

Klasse: 6C(Rg)
Schuljahr: 2006/07
Lehrer: Dr. R. RESEL

SchülerIn: .... (Familienname)

Blatt 1: Betrag eines Vektors im $\mathbb{R}^3$

Zur Berechnung des Betrags des Vektors $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$ betrachten wir Abbildung 1, in welcher sich der zum Punkt $P(x_P|y_P|z_P)$ zugehörige $\boxed{\textit{Koordinatenquader}}$ befindet. Um P im $3D$−Koordinatensystem einzumessen, hat man demnach sechs verschiedene

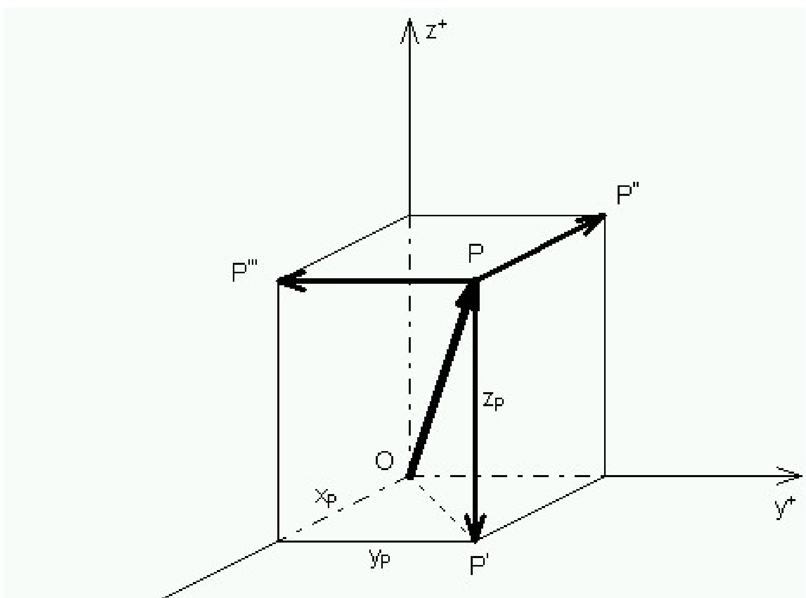


Abbildung 1

Möglichkeiten, sich von O aus entlang der Quaderkanten in Richtung P zu bewegen. Von den acht Eckpunkten des Quaders liegt/liegen einer im Koordinatenursprung, drei auf den Koordinatenachsen und die restlichen vier lauten gemäß der Beschriftung P, P', P'' und P'''. Dabei nennen wir

- P' den Grundriss von P (Ansicht von oben),
- P'' den Aufriss von P (Ansicht von vorne) und schließlich
- P''' den Kreuzriss von P (Ansicht von rechts).

Vorbereitung auf die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

Klasse: 6C(Rg)
Schuljahr: 2006/07
Lehrer: Dr. R. RESEL

SchülerIn: .... (Familienname)

Blatt 2: Betrag und Skalares Produkt im $\mathbb{R}^3$

Zur Berechnung des Betrags des Vektors $\overrightarrow{OP}$ stellen wir zunächst den $2D-$Vektor $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$ auf und wenden im Dreieck $\Delta OP'P$ den Lehrsatz des Pythagoras an, ergo (mit Vektoren angeschrieben):

$$\left|\overrightarrow{OP'}\right|^2 \;+\; \left|\overrightarrow{P'P}\right|^2 \;=\; \left|\overrightarrow{OP}\right|^2$$

bzw. (mit Koordinaten angeschrieben)

$${x_P}^2 \;+\; {y_P}^2 \;+\; {z_P}^2 \;=\; \left|\overrightarrow{OP}\right|^2$$

Daraus ergibt sich nun für den Beginn der **Analytischen Raumgeometrie** (oder auch **Räumliche Koordinatengeometrie**) der grundlegende

$\boxed{\text{Satz 1.}}$ $$\left|\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}\right| = \sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2 + {z_P}^2}$$

Das nächste Analogon zu einem Fachbegriff aus der $2D-$Vektorrechnung ist nun jener

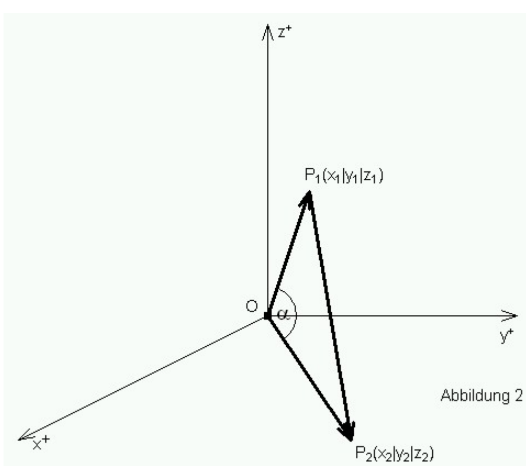


Abbildung 2

des Skalaren Produkts, wozu wir Abbildung 2 betrachten. Gilt nun $\alpha = 90°$ (d.h. die Vektoren $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_2}$ stehen aufeinander normal), dann folgt aufgrund des Lehrsatzes von Pythagoras

$$\left|\overrightarrow{OP_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OP_2}\right|^2 = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2,$$

Vorbereitung auf die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

Klasse: 6C(Rg)
Schuljahr: 2006/07
Lehrer: Dr. R. RESEL

SchülerIn: .... (Familienname)

Blatt 3: Skalares Produkt im $\mathbb{R}^3$; zugeordnete Hauptrisse

was ausgerechnet zu

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 + x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2 = \overbrace{(x_1 - x_2)^2}^{x_1{}^2 - 2x_1x_2 + x_2{}^2} + \overbrace{(y_1 - y_2)^2}^{y_1{}^2 - 2y_1y_2 + y_2{}^2} + \overbrace{(z_1 - z_2)^2}^{z_1{}^2 - 2z_1z_2 + z_2{}^2}$$

bzw. nach Streichen der links wie rechts vorkommenden rein quadratischen Ausdrücke auf

$$0 = -2x_1x_2 - 2y_1y_2 - 2z_1z_2$$

bzw. nach Division durch -2 auf

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

führt, was Anlass gibt zur

$\boxed{\textsc{Definition 1.}}$ Die den Vektoren $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ zugeordnete reelle Zahl $\boxed{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$ heißt *Skalares Produkt* von $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ und wird durch $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}$ abgekürzt.

Der Anlass für Definition 1 zieht nach letzterer auch gleich den zweiten Satz der $3D-$Vektor-

rechnung nach sich, der da wäre (wobei die Gültigkeit der Implikationsrichtung $\Leftarrow$ durch Rückwärtslesen der Gleichungskette vor Definition 1 folgt!) :

$\boxed{\textsc{Satz 2} \text{ („OK“ im } \mathbb{R}^3).}$ Für $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ aus $\mathbb{R}^3$ gilt: $\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0$

Um (zum Beispiel einfache Objekte wie) Dreiecke im $\mathbb{R}^3$ ohne mehr oder minder komplizierte Schrägrisse zeichnerisch darzustellen, bedient man sich seit Gaspard Monge (1746-1813), dem Urvater der *Darstellenden Geometrie* ($\rightarrow$ 7C/8C, 2007/08/09!) schlechthin, der sogenannten Zweitafelprojektion, deren Idee darauf beruht, von einem dreidimensionalen Objekt Grund- und Aufriss einander zugeordnet zu betrachten, indem man die Aufrissebene durch eine $90°-$Drehung um die $y-$Achse nach hinten in die Grundrissebene klappt, was dann folgende Konfiguration (sogenannte *zugeordnete Hauptrisse*) zur Folge hat (vgl. Abbildung 3!):

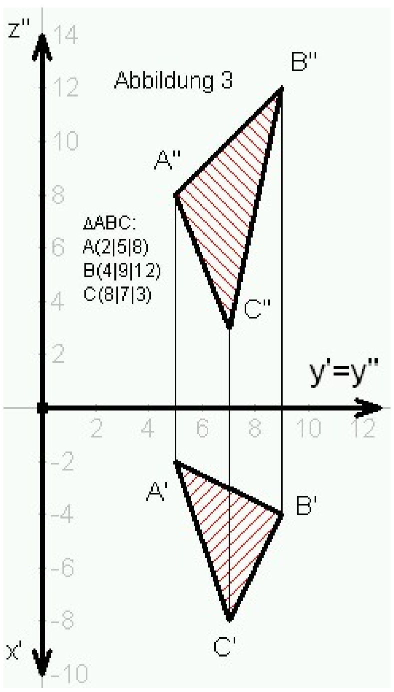
Vorbereitung auf die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

`Klasse:` 6C(Rg)
`Schuljahr:` 2006/07
`Lehrer:` Dr. R. RESEL

`SchülerIn:` .... (Familienname)

Blatt 4: Zugeordnete Hauptrisse; Satz vom rechten Winkel

Die einem Punkt zugeordneten Hauptrisse (hier: Grund- und Aufriss) liegen dabei jeweils



auf einem Ordner (vgl. die eingezeichneten Ordner in Abbildung 3!)!

Nun rechnet man unter Verwendung von Satz 2 leicht nach, dass das Dreieck ΔABC aus Abbildung 3 in seiner räumlichen Lage mit $\angle CAB$ einen rechten Winkel besitzt, was aber weder im Grund-, noch im Aufriss zu erkennen ist, da es sich dabei ja um Projektionen (“Schattenbilder“) des wahren Dreiecks handelt, welche jeweils eine Dimension einbüßen.

Es stellt sich nun die berechtigte Frage, unter welchen Umständen ein “räumlicher rechter Winkel“ auch im Grund- oder Aufriss wieder als rechter Winkel erscheint, was nicht schwierig zu beantworten ist, da wir dazu lediglich von zwei aufeinander normal stehenden $3D-$Vektoren $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ auszugehen haben, weshalb dann wegen Satz 2 automatisch $\boxed{\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \quad (*)}$ gelten muss.

AHS Heustadelgasse BG-BRG-BORG AHS Heustadelgasse BG-BRG-BORG AHS Heustadelgasse BG-BRG-BORG

Vorbereitung auf die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

Klasse: 6C(Rg)
Schuljahr: 2006/07
Lehrer: Dr. R. RESEL

SchülerIn: .... (Familienname)

Blatt 5: Satz vom rechten Winkel

Betrachten wir nun an Stelle von $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ ihre Grundrisse $\overrightarrow{v_1}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v_2}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, so schließen diese genau dann ebenfalls einen rechten Winkel ein, wenn

$$\overrightarrow{v_1}' \cdot \overrightarrow{v_2}' = x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \quad (**)$$

gilt. Damit sowohl $(*)$ als auch $(**)$ gilt, muss $z_1z_2 = 0$ gelten, was nur dann sein kann, wenn entweder $z_1 = 0$ oder $z_2 = 0$ gilt. Dies bedeutet aber, dass entweder $\overrightarrow{v_1}$ oder $\overrightarrow{v_2}$ parallel zur $xy-$Ebene ("Grundrissebene", Abkürzung: π_1) liegt, was uns Anlass gibt zur

DEFINITION 2. Eine Gerade (bzw. einer ihrer Richtungsvektoren) befindet sich in **erster bzw. zweiter Hauptlage**, wenn sie **parallel zur Grundrissebene bzw. Aufrissebene** π_1 bzw. π_2 verläuft.

Rechnerisch drückt sich die erste bzw. zweite Hauptlage eines Vektors wie soeben überlegt eben gerade dadurch aus, dass seine $z-$ bzw. $x-$Koordinate Null ist.

Der Anlass für Definition 2 zieht nach letzterer den folgenden wichtigen Satz der Raumgeometrie nach sich:

SATZ 3 (Satz vom rechten Winkel). Der Grund- bzw. Aufriss eines rechten Winkels im Raum ist genau dann wieder ein rechter Winkel, wenn zumindest einer der beiden Winkelschenkel erste bzw. zweite Hauptlage aufweist.

Der Satz vom rechten Winkel ist nun in weiterer Folge ein wichtiges Werkzeug für uns, um beispielsweise folgende Aufgabenstellung (eine Standardfrage der Analytischen Raumgeometrie!) erfolgreich zu bearbeiten:

BEISPIEL 1. Vom Würfel $ABCDEFGH$ kennt man die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(1|8|4)$ und $D(x|y|-4)$. Berechne x und y $(x, y \in \mathbb{Z})$ sowie die Koordinaten der verbleibenden Eckpunkte!

Lösung. Da $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$

$$\text{sowohl} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| \quad (1) \quad \text{als auch} \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \quad (2)$$

erfüllen müssen, liefern (1) und (2) für x und y die Gleichungen
$1^2+8^2+4^2 = x^2+y^2+4^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2 = 65 \;(1')$ und $x+8y-16 = 0 \;\Rightarrow\; x = 16-8y \;(2')$.

Blatt 6: Ebenen

$(2')$ eingesetzt in $(1')$ liefert die quadratische Gleichung

$$256 - 256y + 64y^2 + y^2 = 65 \quad \Rightarrow \quad 65y^2 - 256y + 191 = 0,$$

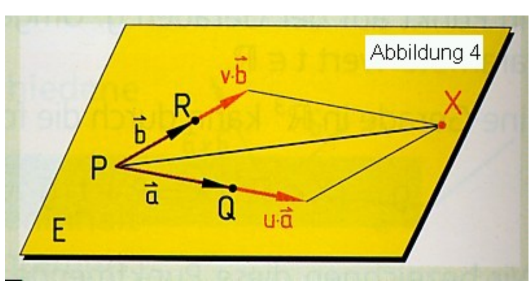
für deren Lösungen y_1 und y_2 sich $y_1 = 1$ und $y_2 \notin \mathbb{Z}$ ergibt, woraus $x_1 = 8$ und somit schließlich $D(8|1|-4)$ folgt. C ergibt sich durch simple Vektoraddition via $C = B + \overrightarrow{AD}$ bzw. (wegen $A(0|0|0)$) $C = B + D$, ergo $C(9|9|0)$.

Von unserem momentanen Wissensstand aus betrachtet weitaus schwieriger ist nun die Ermittlung des Punkts E, welcher **drei Bedingungen** erfüllen muss:

$$\text{I) } \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AB}, \quad \text{II) } \overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}, \quad \text{III) } \left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

M.a.W.: Wir suchen einen Vektor , welcher auf die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ normal steht (und ferner den Betrag 9 besitzt).

Wir erkennen, dass uns die Aufgabenstellung von Beispiel 1 (dessen endgültige Lösung wir noch etwas aufschieben müssen) in natürlicher Weise auf die Fragestellung nach Normalvektoren im $\mathbb{R}^3$ führt, wobei es hier aber zu einem Vektor unendlich viele Richtungen für Normalvektoren gibt. Erst, wenn man zwei Vektoren vorgibt, gibt es nur mehr eine Richtung, welche auf beide Vektoren normal steht, und genau diese wollen wir nun ermitteln: Dazu gehen wir von zwei Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ aus, welche eine



Ebene E (In weiterer Folge werden wir aber abweichend von Abbildung 4 Ebenen mit ε_1, ε_2 usw. bezeichnen!) aufspannen, zu der man noch (wie bei einer Parameterdarstellung einer Gerade in der Ebene!) einen Punkt vorgeben muss, da es sonst ja unendliche viele derartige (zueinander parallele) Ebenen gibt.

Vorbereitung auf die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

`Klasse:` 6C(Rg)
`Schuljahr:` 2006/07
`Lehrer:` Dr. R. RESEL

`SchülerIn:` .... (Familienname)

Blatt 7: Ebenengleichungen

Die vorletzte Klammerbemerkung legt zusammen mit Abbildung 4 auch schon unsere weitere Vorgehensweise offen, die darin besteht, analog zum Begriff *Normalvektor einer Gerade* in der $2D-$Geometrie den Begriff *Normalvektor einer Ebene* in der $3D-$Geometrie einzuführen, wozu wir zunächst die sogenannte Parameterdarstellung einer Ebene behandeln:

Abbildung 4 zeigt, dass man <u>**jeden**</u> Punkt X der Ebene E erreichen kann, indem man in P zunächst den *ersten Stellungsvektor* $\overrightarrow{a}$ von E und hernach den *zweiten Stellungsvektor* $\overrightarrow{b}$ von E jeweils geeignet oft (in Abbildung 4: zuerst u mal $\overrightarrow{a}$ und dann v mal $\overrightarrow{b}$, was aber auch in umgekehrter Reihenfolge zu X führt!) anhängt, was analog zur Parameterdarstellung einer Gerade in der Ebene zur Parameterdarstellung einer Ebene im Raum führt (anschauliche Hilfe: u und v sind Koordinaten von X in einem in E liegenden (im Allgemeinen) schiefwinkligen Koordinatensystem, wobei $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ Richtungsvektoren der "Koordinatenachsen" sind und der Ursprung in P liegt.), die da Inhalt ist von

$\boxed{\text{Satz 4.}}$ Es sei/en P ein Punkt sowie $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ Stellungsvektoren einer Ebene ε. Dann besitzt ε die Parameterdarstellung (PDST)

$$\varepsilon:\ X = P + u\cdot\overrightarrow{a} + v\cdot\overrightarrow{b}\quad (*)$$

wobei P der sogenannte *Auf- oder Startpunkt* ist.

Nun kann man Ebenen im Raum (ebenso wie Geraden in der Ebene!) aber auch parameterfrei darstellen (Dies gilt - wie wir bald sehen werden - aber nicht für Geraden im Raum!), wozu man die PDST $(*)$ nur links und rechts skalar mit einem Vektor $\overrightarrow{n}$ multiplizieren muss, welcher sowohl auf $\overrightarrow{a}$ als auch $\overrightarrow{b}$ normal steht, was dann wegen

$$\varepsilon:\quad \overrightarrow{n}\cdot X \;=\; \overrightarrow{n}\cdot P \;+\; u\cdot\overbrace{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{n}}^{0} \;+\; v\cdot\overbrace{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{n}}^{0}$$

zur Gleichung

$$\varepsilon:\quad \overrightarrow{n}\cdot X \;=\; \overrightarrow{n}\cdot P \qquad \text{bzw.} \qquad \varepsilon:\quad \overrightarrow{n}\cdot(X-P)=0$$

führt, welche in ihrer zweiten Variante wegen $X-P=\overrightarrow{PX}$ ja gerade aussagt, dass $\overrightarrow{n}$ **auf jeden Stellungsvektor von ε normal steht**. Als Konsequenz **dieser herausragenden Eigenschaft** von $\overrightarrow{n}$ nennt man diesen *Normalvektor von* ε und erhält damit unmittelbar

$\boxed{\text{Satz 5.}}$ Es sei P ein Punkt sowie $\overrightarrow{n}$ ein Normalvektor einer Ebene ε. Dann besitzt ε die *Normalvektorform* (NVF)

$$\varepsilon:\quad \overrightarrow{n}\cdot X \;=\; \overrightarrow{n}\cdot P\ .$$

Vorbereitung auf die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

`Klasse:` 6C(Rg)
`Schuljahr:` 2006/07
`Lehrer:` Dr. R. RESEL

`SchülerIn:` .... (Familienname)

Blatt 8: Hauptgeraden

Nun ist das ja alles schön und gut, doch wie kommt man jetzt zu einem Normalvektor einer Ebene, wenn diese (z.B. durch drei Punkte, aus denen man mühelos zwei Stellungsvektoren errechnet und ferner einen Punkt als Aufpunkt wählt, womit man bereits eine Parameterdarstellung zur Verfügung hat) vorgegeben ist?

Zur Beantwortung dieser Frage erweitern wir zunächst Definition 2 (erste und zweite Hauptlage einer Gerade) und wenden hernach Satz 3 (Satz vom rechten Winkel) an:

DEFINITION 3. Geraden einer Ebene, welche erste bzw. zweite Hauptlage aufweisen, werden erste bzw. zweite Hauptgeraden genannt.

Damit liegt nun zusammen mit Satz 3 auf der Hand, wie man sich rasch einen Normalvektor $\overrightarrow{n}$ einer Ebene ε verschafft:

- Man berechnet zunächst je einen Richtungsvektor einer ersten bzw. zweiten Hauptgerade von ε.
- Ausgehend von diesen beiden Richtungsvektoren ermittelt man dann unter Anwendung des Satzes vom rechten Winkel und der Kippregel aus der $2D-$Vektorrechnung den Grund- bzw. Aufriss $\overrightarrow{n}'$ bzw. $\overrightarrow{n}''$ von $\overrightarrow{n}$.
- Mit einer Portion gesundem Hausverstand folgert man dann schließlich aus den Projektionen $\overrightarrow{n}'$ und $\overrightarrow{n}''$ des gesuchten Normalvektors $\overrightarrow{n}$ seine Originalkoordinaten im Raum.

Setzen wir das soeben geschilderte "Dreipunkteprogramm" nun technisch in die Tat um, wobei wir von den Stellungsvektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ einer Ebene ε ausgehen (Da es uns nur um die Bestimmung von $\overrightarrow{n}$ geht, ist der Aufpunkt P ohne Belang!):

Vorbereitung auf die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

`Klasse:` 6C(Rg)
`Schuljahr:` 2006/07
`Lehrer:` Dr. R. RESEL

`SchülerIn:` .... (Familienname)

Blatt 9: Linearkombinationen

- Einen Richtungsvektor $\overrightarrow{h_1}$ bzw. $\overrightarrow{h_2}$ einer ersten bzw. zweiten Hauptgerade von ε erhalten wir unschwer durch die "gewichtete Vektorsumme" (Fachbegriff: **Linearkombination**) $\boxed{z_2 \cdot \overrightarrow{a} - z_1 \cdot \overrightarrow{b}}$ bzw. $\boxed{x_2 \cdot \overrightarrow{a} - x_1 \cdot \overrightarrow{b}}$, ergo:

$$\overrightarrow{h_1} = z_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - z_1 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 z_2 \\ y_1 z_2 \\ z_1 z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 z_1 \\ y_2 z_1 \\ z_1 z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 z_2 - x_2 z_1 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\overrightarrow{h_2} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - x_1 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 y_2 \\ x_1 z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \end{pmatrix}$$

(Der/die *Connaisseur/e* entdeckt hier bereits zahlreiche Determinanten!)

- Da bei Hauptgeraden nach dem Satz vom rechten Winkel ebenjener erhalten bleibt (insbesondere zu $\overrightarrow{n}$!), drehen wir $\overrightarrow{h_1}$ im Grundriss ($h_1{}' = h_1$!) und $\overrightarrow{h_2}$ im Aufriss ($h_2{}'' = h_2$!) um jeweils 90° **im $\boxed{\mathbf{U}}$hrzeigersinn** (Erinnere: Nach Vertauschen der Koordinaten wechselt man **diesfalls** das Vorzeichen **$\boxed{\mathbf{u}}$nten**!) und erhalten

$$\overrightarrow{n}' = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \overrightarrow{n}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} .$$

- Durch nicht mehr als genaues Hinsehen schließt man aus den Darstellungen von $\overrightarrow{n}'$ bzw. $\overrightarrow{n}''$ sofort auf

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} ,$$

und wir sind fertig!

AHS Heustadelgasse BG-BRG-BORG AHS Heustadelgasse BG-BRG-BORG AHS Heustadelgasse BG-BRG-BORG

Vorbereitung auf die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

Klasse: 6C(Rg)
Schuljahr: 2006/07
Lehrer: Dr. R. RESEL

SchülerIn: .... (Familienname)

Blatt 10: Das Vektorielle Produkt

Wie man nun durch Anwendung von Satz 2 ("OK") leicht nachrechnet [Zur Übung und Wiederholung(!) empfohlen!], steht der erhaltene Vektor $\overrightarrow{n}$ sowohl auf $\overrightarrow{a}$ als auch auf $\overrightarrow{b}$ normal, was aufgrund unserer angestellten Überlegungen ja so sein muss.

Um die (auf manchen Betrachter vielleicht sehr umständlich wirkende) Darstellung von $\overrightarrow{n}$ nicht stupid auswendig lernen zu müssen, schafft hier einmal mehr eine *Mnemotechnik* Abhilfe, die überdies einen Fachbegriff beinhaltet, der uns seit dem Wintersemester 2005/06 in der Vektorrechnung begleitet (ja vielmehr noch gar den Einstieg in dieses Themengebiet bildete!), und zwar jener der *Determinante* (welchen wir seitdem immer mit dem Flächeninhalt bzw. später in der Trigonometrie mit dem Sinus assoziiert haben), wodurch sich die Darstellung von $\overrightarrow{n}$ auch in der Form

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

anschreiben läßt, was uns gleich Anlass gibt zur

$\boxed{\text{Definition 4.}}$ Unter dem *Vektoriellen Produkt* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ der Vektoren

$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ versteht man den Vektor $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} := \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$,

dessen Eigenschaften [analytisch/geometrisch (rechter Winkel, Skalarprodukt, Flächeninhalt, Orientierung) sowie algebraisch (Rechenregeln!)] wir in folgendem gigantischen Satz 6 zusammentragen, woran sich dann reichlich Übungsmaterial anschließen wird:

Vorbereitung auf die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

Klasse: 6C(Rg)
Schuljahr: 2006/07
Lehrer: Dr. R. RESEL

SchülerIn: .... (Familienname)

Blatt 11: Eigenschaften des Vektoriellen Produkts

SATZ 6. (Eigenschaften des Vektoriellen Produkts).
Für alle Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c}$ des $\mathbb{R}^3$ und für alle Skalare λ, μ und τ aus $\mathbb{R}$ gilt:

- (6.1) $\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{b} \cdot \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = 0$
- (6.2) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \vec{o}$
- (6.3) $(\lambda \cdot \overrightarrow{a}) \times \left[\left(\mu \cdot \overrightarrow{b}\right) + (\tau \cdot \overrightarrow{c})\right] = (\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + (\lambda\tau) \cdot \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$
- (6.4) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = \vec{o}$
-
  - (6.5.1) $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}\right) \cdot \overrightarrow{a}$
  - (6.5.2) $\overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$
- (6.6) $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} + \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right) \times \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \vec{o}$
- (6.7) $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ sind wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand orientiert.
- (6.8) $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$ entspricht dem Flächeninhalt des von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
- (6.9) $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|^2 + \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2 = |\overrightarrow{a}|^2 \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|^2$

BEMERKUNGEN ZU SATZ 6.

Diese folgen im Laufe der ersten Stunden im September, aber erst nachdem das vor Satz 6 angekündigte Übungsmaterial (welches reichhaltigste geometrische Anwendungen beinhaltet und auf der letzten Seite 12 zu finden ist!) ausgiebig(st!) bearbeitet wurde!

Vorbereitung auf die Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$

Klasse: 6C(Rg)
Schuljahr: 2006/07
Lehrer: Dr. R. RESEL

SchülerIn: .... (Familienname)

Blatt 12: Aufgaben zur Anwendung des bisher Gelernten

1. Vom Quader $ABCDEFGH$ sind die Eckpunkte $A(8|72|9)$, $B(16|84|33)$ und $D(26|78|z_D)$ bekannt.

   (a) Berechne z_D! In welcher besonderen Ebene liegt D?

   (b) Berechne die Koordinaten von C!

   (c) Die Länge der Kante AE soll 84 betragen, wobei E über π_1 liegt.
   Berechne die Koordinaten von E und zeige, dass E genauo so hoch über π_1 liegt wie B.
   In welcher speziellen Ebene liegt E?

   (d) Berechne die Koordinaten von F, G und H!

   (e) Berechne auf zwei Arten die Länge einer Raumdiagonale des Quaders!
   Welche der Punkte (a) bis (d) brauchst du dafür unbedingt (Begründung!)?

2. Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   (a) Zeige, dass $|\overrightarrow{a_1}| = \left|\overrightarrow{b_1}\right| = \ell$ gilt und berechne ℓ.

   (b) Bilde $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{a_1}$ und zeige, dass $\overrightarrow{v}$ nach Multiplikation mit $\frac{1}{\ell}$
   (Der neue Vektor heiße $\overrightarrow{c_1}$!) noch immer <u>ganzzahlige Komponenten</u> aufweist.
   Was fällt dir <u>an ihnen</u> auf und was kannst du über $|\overrightarrow{c_1}|$ aussagen?

3. Wie Aufgabe 2 mit $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

4. Wie müsste nun nach 2. und 3. die nächste Angabe lauten?

   (a) Schreibe das allgemeine Bildungsgesetz für die Vektoren $\overrightarrow{a_1}$ und $\overrightarrow{b_1}$ auf!

   (b) Bearbeite nach 4.(a) nun in allgemeiner Form die entsprechenden Aufgabenstellungen (a) und (b) aus 2. und 3.! **Beachte dabei, beim Bilden des vektoriellen Produkts nicht gleich alles auszumultiplizieren, sondern möglichst viel herauszuheben, um dann mit $\frac{1}{\ell}$ multiplizieren zu können!**

Erholsame Ferien nach deinem letzten Pflichtschuljahr!