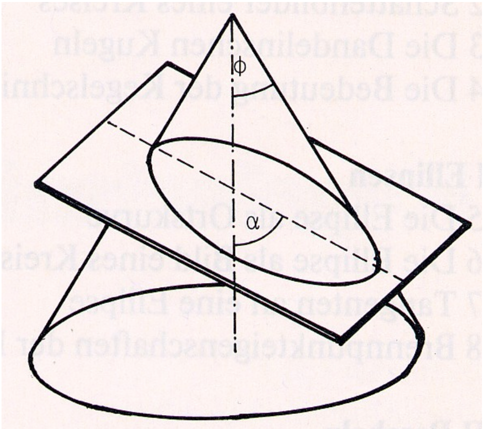
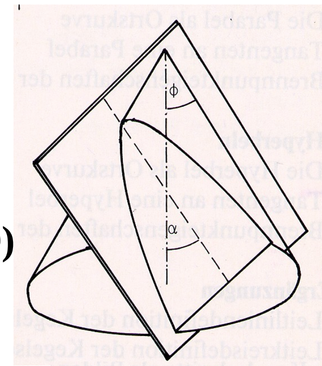
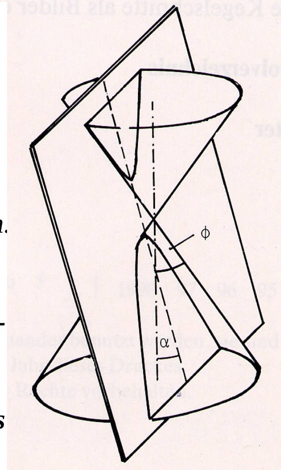


Übungsaufgaben zur Hyperbel (Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene, Teil 3)

(7D, Realgymnasium, PM3, WS 2008/09)



Diese Beispiele sollen durch jene für den dritten Teil der nichtlinearen analytischen Geometrie (Teil 1 bzw. 2 betrifft die Ellipse und die Parabel!) relevanten Grundaufgaben [Gleichung einer Hyperbel in erster Hauptlage, Zusammenhang zwischen a, b und e, Ablesen von a und b aus der Hyperbelgleichung, Hyperbeltangenten, Berührungsbedingung, gleichseitige Hyperbeln (auch in gedrehter Lage!), Ablesen des Berührungspunkts einer Hyperbeltangente aus der Spaltform, Pol und Polare] führen, die du bei der Schularbeit im November 2008 ***in jedem Fall*** *unter Beweis stellen wirst müssen.*



ACHTUNG! ***Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!***

AUFGABEN 1 BIS 3 ZUR HYPERBEL:

1) Von einer Hyperbel hyp in erster Hauptlage kennt man die Asymptote g_1 [g_1: $y = \frac{4}{3} \cdot x$] und den Punkt R(111|140).

   a) Stelle eine Gleichung von hyp auf

   b) Berechne die Koordinaten der Brennpunkte F_1 und F_2 von hyp!

   c) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte S ($y_S<0$) und T ($y_T>0$) von hyp mit der Gerade g [g: 4x–y = 176]!

   d) Kontrolliere, dass auch $\left|\overline{F_1T} - \overline{F_2T}\right| = 2a$ gilt (Ebenso – in Eigenregie zu Hause! – für R und S!).

   e) Stelle in T eine Gleichung der Tangente t_T an die Hyperbel auf (Ebenso – in Eigenregie zu Hause! – für R und S!).

   f) Kontrolliere, dass t_T die Winkelsymmetrale der Brennstrahlen TF_1 und TF_2 ist (Zum Üben für die Schularbeit – in Eigenregie zu Hause! – für T, ZUR HAUSÜBUNG FÜR R ODER S)!

   ↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓
   "Freunde" rechnen "gegengleich"!!!

2) Eine Hyperbel in erster Hauptlage wird von der Gerade g [g: 3x + 5y = 125] im Punkt P(x_P|16) rechtwinklig geschnitten.

   a) Stelle eine Gleichung von hyp sowie der Tangente t an hyp in P auf!

   b) g, t und die Nebenachse von hyp begrenzen ein rechtwinkliges Dreieck, von welchem zu zeigen ist, dass sein Umkreis durch die Hyperbelbrennpunkte verläuft!

3) Zeige, dass das Sechseck ABCDEF[A(900|–300), B(1350|–1050), C(360|72), D(1900|1700), E(1100|700), F(900|180)] Tangentensechseck einer Hyperbel in erster Hauptlage ist und verifiziere anhand dieses Sechsecks den Satz von BRIANCHON!

AUFGABEN 4 BIS 10 ZUR HYPERBEL:

4) Durch jeden Punkt $P(x_P|y_P)$ mit der Einschränkung $\boxed{y_p<x_p\ (*)}$ einer gleichseitigen Hyperbel hyp_1 mit den Koordinatenachsen als Asymptoten verläuft genau eine gleichseitige Hyperbel hyp_2 in erster Hauptlage. Dann gilt stets folgender

SATZ. hyp_1 und hyp_2 schneiden einander stets rechtwinklig.

a) Begründe zunächst, warum die gerahmte Einschränkung notwendig ist!

b) Verifiziere diesen Lehrsatz am Beispiel eines beliebigen Punkts [Beachte dabei aber(*)!]!

c) Schaffst du es, den Lehrsatz zu beweisen?

5) Für gleichseitige Hyperbeln gilt folgende spezielle Tangentenkonstruktion:
Ist a die Hauptachse, M der Mittelpunkt, T ein Punkt einer gleichseitigen Hyperbel hyp, sowie T´ der Spiegelpunkt von T an a, dann ist die Normale auf $h_{MT'}$ durch T die Tangente an hyp in T.

a) Beweise dies für den Fall, dass hyp die Koordinatenachsen als Asymptoten besitzt!

b) Beweise dies für den Fall, dass hyp erste Hauptlage aufweist!

6) Für gleichseitige Hyperbeln gilt folgender Lehrsatz:
SATZ. Legt man in einem Hyperbelpunkt P (Hauptscheitel ausgenommen) die Normale n und schneidet sie mit der Hauptachse der Hyperbel, so bildet dieser Schnittpunkt Q zusammen mit P und dem Mittelpunkt M der Hyperbel stets ein gleichschenkliges Dreieck.

a) Beweise diesen Satz für beide in 5a) und 5b) genannten Fälle!

b) Beantworte aufgrund deiner Beweise: Wo liegt die Spitze dieses gleichschenkligen Dreiecks?

c) Freiwilliger Zusatz: Beweise, dass ΔPQM stets stumpfwinklig ist! [Hinweis: Benutze (*) aus 4)!]

7) Für drei vorgegebene Punkte $P_1(x_1|y_1)$, $P_2(x_2|y_2)$ und $P_3(x_3|y_3)$ einer gleichseitigen Hyperbel mit der linearen Exzentrizität e, welche die Koordinatenachsen als Asymptoten besitzt, gilt für die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U(u|v) des Dreiecks $\Delta P_1P_2P_3$ die wahrhaft schöne Darstellung (*).

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} u = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{2} + \dfrac{2y_1y_2y_3}{e^2} \\ v = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{2} + \dfrac{2x_1x_2x_3}{e^2} \end{array}\right\}(*)}$$

Rechne dies für das Dreieck $\Delta P_1P_2P_3[P_1(-24|y_1), P_2(x_2|-48), P_3(12|16)]$ nach!

8) *Legt man in einem Punkt T einer Hyperbel hyp jeweils eine Normale zur Haupt- bzw. Nebenachse, bezeichnet den jeweiligen Schnittpunkt mit einer (beliebigen) Hyperbelasymptote u mit P_1 bzw. P_2, legt dann in P_1 bzw. P_2 jeweils die Normale auf u und schneidet diese jeweils mit der Haupt- bzw. Nebenachse (Schnittpunkt Q_1 bzw. Q_2), so gilt stets, dass die Normale an hyp in T durch die Punkte Q_1 und Q_2 verläuft.*
Verifiziere diesen allgemeingültigen Lehrsatz für jene Hyperbel in erster Hauptlage, welche von der Gerade g[g:41x–30y=243] im Punkt $P(123|y_P)$ berührt wird. Wähle für T den Punkt $T(45|y_T>0)$!

9) hyp bezeichnet in dieser Aufgabe jene gleichseitige Hyperbel mit dem Brennpunkt F(84|84), welche die Koordinatenachsen als Asymptoten besitzt.

a) Stelle Gleichungen jener Tangenten auf, welche man durch den Punkt P(36|48) an hyp legen kann. (Verwende dazu die Polare p von P bezüglich hyp!)

b) Kontrolliere, dass $F \in p$ gilt und weise am konkreten Beispiel folgenden allgemeingültigen Lehrsatz nach:
SATZ. Liegt ein Brennpunkt F einer Hyperbel hyp auf der Polaren eines Punktes P bezüglich hyp, so steht p normal auf g_{FP}.

10) SATZ. Ist (P,p) ein Pol/Polare-Paar einer gleichseitigen Hyperbel hyp mit dem Mittelpunkt M und sind T_1 und T_2 die Schnittpunkte von p mit hyp, dann gilt: *Spiegelt man T_1 am Schnittpunkt Q von p mit g_{MP}, so erhält man T_2.* Ferner sind die Parallelen zu den Hyperbelasymptoten durch Q die Winkelsymmetralen von p und g_{MP}.

Verifiziere diesen Satz anhand jener gleichseitigen Hyperbel hyp, welche die Koordinatenachsen als Asymptoten besitzt und im Punkt $T(x_T|3)$ von der Gerade g [g: x+24y=144] berührt wird, für den Punkt P(8|24).

AUFGABEN 11 BIS 17 ZUR HYPERBEL:

11) Ist (P,p) ein Pol/Polare-Paar einer Hyperbel hyp und g eine Asymptote von hyp, so gilt folgender Lehrsatz:
$\boxed{\text{SATZ.}}$ Legt man durch P eine Parallele h zu g, so gilt für die Schnittpunkte $\{U\}=h\cap hyp$ und $\{V\}=h\cap p$:
V entsteht durch Spiegelung von P an U.

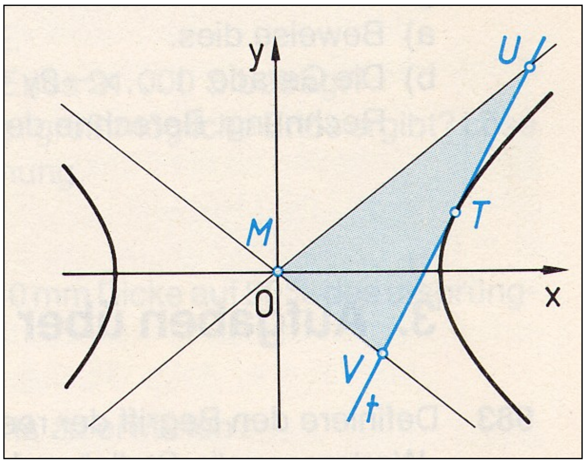
a) Verifiziere diesen Satz anhand folgender konkreter Hyperbel hyp:
hyp befindet sich in erster Hauptlage und wird von der Gerade g[g: $39x-20y=8640$] im Punkt $T(260|y_T)$ berührt.
Stelle eine Gleichung von hyp auf, ermittle Gleichungen der Tangenten,
die man von P(336|180) an hyp legen kann und bestätige den Lehrsatz!

b) Beweise diesen Satz für den Spezialfall "gleichseitige Hyperbel". (Tip: Koordinatenachsen als Asymptoten!)

12) Für jede Hyperbel hyp gilt nebenstehend illustrierter
$\boxed{\text{SATZ.}}$ Jede Hyperbeltangente t begrenzt mit den Hyperbelasymptoten ein Dreieck ΔMVU von konstantem Flächeninhalt.

a) Wie groß muss (wenn man über die Konstanz Bescheid weiss – Beweis[1] ist dies dennoch keiner!) dieser Flächeninhalt dann sein?

b) Verifiziere diesen Satz anhand jener Hyperbel hyp in erster Hauptlage, welche von der Gerade t [t: $15x-8y=54$] in $T(x_T|12)$ berührt wird, und zwar für eben gerade diesen Punkt T!



13) Für jede gleichseitige Hyperbel hyp mit dem Mittelpunkt M (Schnittpunkt der Asymptoten) gilt folgender
$\boxed{\text{SATZ.}}$ Der Umkreis des Mittendreiecks jedes Sehnendreiecks von hyp geht auch durch M.

Verifiziere diesen Lehrsatz anhand jener gleichseitigen Hyperbel mit den Koordinatenachsen als Asymptoten, welche von der Gerade g [g: $128x+y=512$] im Punkt $T(x_T|256)$ berührt wird, und zwar für das Sehnendreieck $ABC[A(x_A|-64), B(32|y_B), C(128|y_C)]$!

14) Die Eckpunkte des Dreiecks $\Delta ABC[A(12|y_A), B(-15|-9), C(x_C>0|-16)]$ liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel hyp in erster Hauptlage.

a) Stelle eine Gleichung von hyp auf und berechne x_C!

b) Berechne die Koordinaten des Höhenschnittpunkts des Dreiecks ΔABC und verifiziere am konkreten Beispiel die folgenden beiden miteinander zusammenhängenden allgemeingültigen Lehrsätze:

$\boxed{\text{SATZ 1.}}$ Liegen die Eckpunkte eines Dreiecks auf einer gleichseitigen Hyperbel hyp mit dem Mittelpunkt M, dann liegt auch der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks auf hyp.

$\boxed{\text{SATZ 2.}}$ Spiegelt man H an M, so liegt der gespiegelte Punkt H´ auf dem Umkreis des Dreiecks.

15) Beweise Satz 1 aus Aufgabe 14 allgemein für eine gleichseitige Hyperbel mit der Gleichung $\boxed{xy = a}$!

16) Für drei vorgegebene Punkte $A(x_1|y_1)$, $B(x_2|y_2)$ und $C(x_3|y_3)$ einer gleichseitigen Hyperbel hyp mit der linearen Exzentrizität e, welche die Koordinatenachsen als Asymptoten besitzt, bezeichnet μ_1 den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC sowie μ_2 den Flächeninhalt jenes Dreiecks $\Delta A'B'C'$, welches durch die Tangenten t_A, t_B und t_C an hyp in A, B und C erzeugt wird (Dabei soll $\{A'\}=t_B\cap t_C$, $\{B'\}=t_A\cap t_C$ sowie $\{C'\}=t_A\cap t_B$, gelten!). Dann gelten für μ_1 und μ_2 die wahrhaft schönen Darstellungen (*) und (**).
Rechne dies für das Dreieck $\Delta ABC[A(x_1|-8), B(-2|y_2), C(12|16)]$ nach!

$$\mu_1 = \frac{e^2}{8}\cdot\left|\frac{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{x_1x_2x_3}\right| \quad (*)$$

$$\mu_2 = \frac{e^2}{2}\cdot\left|\frac{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)}\right| \quad (**)$$

17) Fortsetzung von Aufgabe 16): Verifiziere, dass die Geraden $g_{AA'}$, $g_{BB'}$ und $g_{CC'}$ einander in einem Punkt Z schneiden (Rechne mit Brüchen, nicht mit Dezimalzahlen!).

1: Vgl. dazu die Anregung am Ende der Hyperbelaufgaben!

AUFGABEN 18 BIS 23 ZUR HYPERBEL:

18) Legt man in den Punkten $T_1(x_1|-2)$, $T_2(-18|-4)$, $T_3(-2|y_3)$, $T_4(x_4|18)$, $T_5(8|y_5)$ und $T_6(x_6|3)$ eine gleichseitigen Hyperbel hyp mit den Koordinatenachsen als Asymptoten die Tangenten an hyp, so bilden diese ein *Tangentensechseck* von hyp. Verifiziere an diesem konkreten Beispiel den Satz von BRIANCHON!

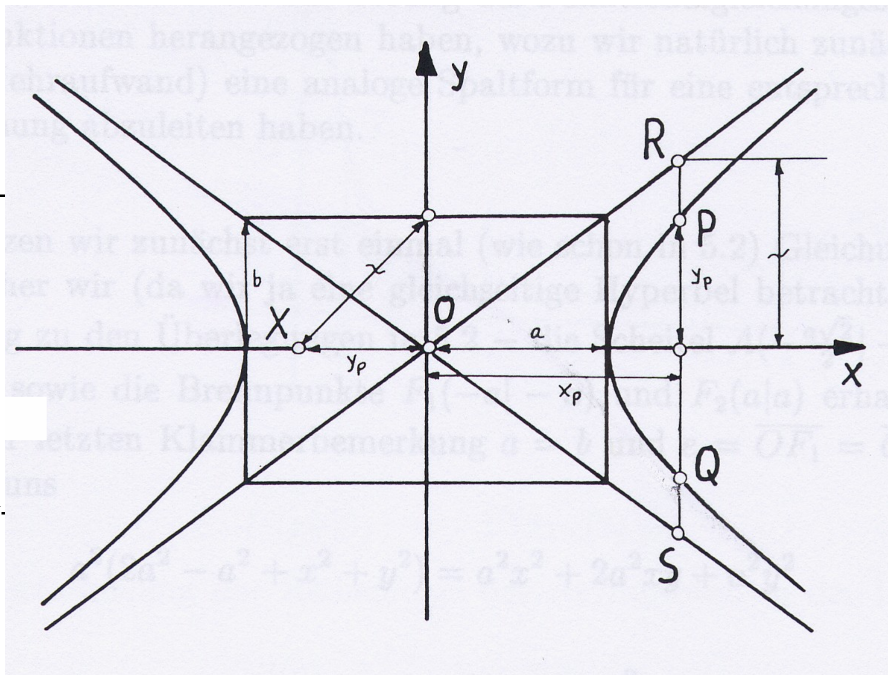
19) Die Punkte $A(-10|-6)$, $B(x_B|-12)$, $C(15|y_C)$, $D(3|y_D)$, $E(x_E|30)$ und $F(x_F|-1)$ liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel hyp, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind Verifiziere an diesem konkreten Beispiel den Satz von PASCAL!

20) Die Punkte $A(24|0)$, $B(30|y_B<0)$, $C(51|y_C<0)$, $D(74|y_D>0)$, $E(40|y_E>0)$ und $F(26|10)$ liegen auf einer Hyperbel hyp in erster Hauptlage und bilden somit ein hyp einbeschriebenes Sechseck. Verifiziere an diesem konkreten Beispiel den Satz von PASCAL!

21) Für den Fall, dass du die Aufgabe/n 9 oder/und 10 im Rahmen deines (absolut notwendigen!) Übungspensums ohne Spaltform angehen willst, findest du nebenstehend die entsprechende Berührungsbedingung für eine gleichseitige Hyperbel hyp mit den Koordinatenachsen als Asymptoten [hyp: xy=a] und eine Ge-Gerade g [g: y = kx+d] mit dem **nachdrücklichen Auftrag, sie auf mindestens zwei Arten herzuleiten**!

$$\boxed{d^2 + 4ak = 0}$$

22) Nebenstehend illustrierte "Stechzirkelkonstruktion" (SZK) ist für das praktische Konstruieren von Hyperbeln weitaus brauchbarer als die aus der planimetrischen Definition folgende (die Brennpunkte benötigende) Konstruktionsvorschrift, überdies sind dazu lediglich die Hyperbelachsen und –asymptoten notwendig. Entnimm der Abbildung das Wirkungsprinzip der SZK und verifiziere sie anhand der Hyperbel mit der Gleichung $4x^2 - 9y^2 = 5184$ für die Werte 39, 60 sowie 111 von x_P.



23) 3. Aufgabe aus dem "Vorgeschmack" (über fünf Jahre alte Schularbeit), siehe Homepage!
- beide Gruppen bearbeiten,
- hidden hints beachten

<u>**AUFGABEN 24 BIS 26 ZUR HYPERBEL:**</u>

24) **Klasse: 7C(G)** **2. Schularbeit (zweistündig), Gruppe B** **13. 12. 2002**

1) a) Durch den Punkt T(12|6) verläuft genau eine gleichseitige Hyperbel hyp mit den Koordinatenachsen als Asymptoten. Stelle eine Gleichung von hyp auf!

b) Ermittle eine Gleichung der Tangente t_T an hyp in T und stelle auch eine Gleichung der Normalen n auf hyp (ergo: auf t_T) durch T auf!

c) Berechne die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts P von hyp und n!

d) Stelle in P eine Gleichung der Tangente t_P an hyp auf, ermittle die Koordinaten des Schnittpunkts S von t_T und t_P und verifiziere anhand des vorliegenden Beispiels den folgenden Lehrsatz:

$$\boxed{\overline{MS} = \frac{2 \cdot \overline{MT}}{\left|\frac{x_T}{y_T} - \frac{y_T}{x_T}\right|}}$$

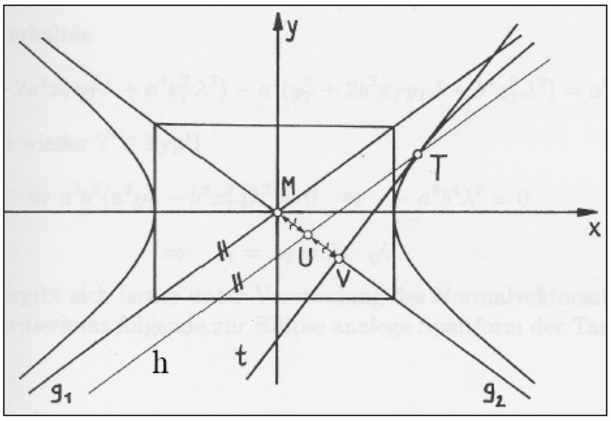
SATZ. Schneidet die Normale n_T einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Mittelpunkt M die Hyperbel nebst $T(x_T|y_T)$ ferner in P und ist S der Schnittpunkt von t_P mit t_T, so gilt obige Formel.

25) <u>**Schularbeitsbeispiel der 7C(Rg) vom Dezember 2007:**</u>

2) Von einer Hyperbel in erster Hauptlage kennt man die Asymptote g_1 [g_1:$y=\frac{2}{3}\cdot x$] und den Punkt T(30|16).

a) Ermittle eine Gleichung der Hyperbel (Zwischenresultat: hyp: $4x^2 - 9y^2 = 1296$) und stelle eine Gleichung der Tangente t an hyp in T auf (Ansätze anschreiben!).

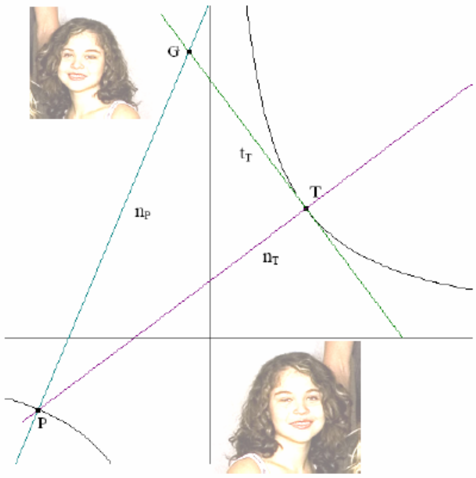
b) Verifiziere anhand des vorliegenden Beispiels die nebenstehend illustrierte Tangentenkonstruktion (Parallele h zu g_1 durch T legen, Hyperbelmittelpunkt M am Schnittpunkt U von g_2 und h spiegeln, gespiegelten Punkt V schließlich mit T verbinden)!



26) <u>**Ein dem Unterricht der 7B(G) von 2007/08 aus Aufgabe 24) entwachsenes Übungsbeispiel:**</u> ☺

Zwei Tage nach ihrem 16. Geburtstag entdeckte die "Inkognito-Mathematikerin" ☺ N. GARFIAS folgenden SATZ (Satz von GARFIAS, 2007), vgl. dazu auch die nebenstehende Abbildung!

Legt man in einem Punkt $T(x_T | y_T)$ einer gleichseitigen Hyperbel hyp, welche die Koordinatenachsen als Asymptoten besitzt, sowohl die Tangente t_T als auch die Normale n_T, ermittelt den zweiten gemeinsamen Punkt P von n_T und hyp, legt ebendort auch die Normale n_P an hyp und schneidet schließlich n_P mit t_T, so gilt für diesen Schnittpunkt G ("GARFIAS-Punkt") die Darstellung $\boxed{G\left(x_T + \frac{x_T^4 - y_T^4}{x_T y_T^2} \middle| y_T + \frac{y_T^4 - x_T^4}{x_T^2 y_T}\right)}$.



Bestätige dieses Juwel der Elementargeometrie für den Punkt T(432 | 576), wobei hyp die Koordinatenachsen als Asymptoten besitzt! [Zur Kontrolle: P(-768 | -324), G(-93 | 1276)]

Zusatz (RESEL, 2007): Kontrolliere am vorliegenden Beispiel [T(432 | 576)], dass für den Flächen-Inhalt μ des Dreiecks ΔPTG die Formel $\boxed{\mu = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_T}{y_T} + \frac{y_T}{x_T}\right)^3 \cdot \left|x_T^2 - y_T^2\right|}$ gilt! [Zur Kontrolle: μ=656250]

AUFGABE 27 ZUR HYPERBEL:

27) **Schularbeitsbeispiel der 7B(G) vom Jänner 2008:**

2) a) Zeige, dass die Geraden g [g: 2x–y = 8] und h [h: x+2y = 14] aufeinander normal stehen und berechne die Koordinaten ihres Schnittpunkts P.

b) Stelle eine Gleichung jener gleichseitigen Hyperbel hyp auf, welche die Koordinatenachsen als Asymptoten besitzt (Ansatz anschreiben!) und durch P verläuft (Zwischenresultat: hyp.: xy=24).

c) Berechne die Koordinaten der zweiten Schnittpunkte Q und R von g und h mit hyp und verifiziere anhand des vorliegenden konkreten Beispiels folgenden Lehrsatz:

SATZ. Ist ΔPQR ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse QR, dessen Eckpunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel hyp liegen, so steht die Tangente t_P an hyp in P auf die Gerade g_{QR} normal.

Anregung: In den Aufgaben 5) und 6) wurden im Unterricht bzw. im Rahmen einer Hausübung bereits (kleine, bescheidene) Beweise geführt, ferner bleiben dir mit den Aufgaben 15 und 21 eindeutige (auch nicht schwierige!) Beweisaufgaben zum Üben!

Manche der in dieser Aufgabensammlung auftauchenden (hier lediglich zu ***verifizierende***) Lehrsätze sind für den "Normalverbraucher" sicher nur sehr schwer zu ***beweisen*** [Beispiele: die Sätze in den Aufgaben 3), 7), 13), Satz 2 in Aufgabe 14) sowie die Sätze in den Aufgaben 16) und 17), 18), 19) und 20)], bei den Sätzen der Aufgaben 2b), 4) [vgl. Bemerkung in c)!], 8), 9), 10), 11), 12) und 21) kannst du dich jedoch ohne übermäßige Frustrationstoleranz an einen *eigenständigen Beweis wagen* (Bei Fragen steht dir ja die Schülersprechstunde zur Verfügung.)!

Viel Freude beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Mai 2008. Dr. Robert Resel, e. h.

Hinweise zum (lohnenden!) Üben:

- **Folgende 10 Aufgaben** werden sicher in Schulübungen bearbeitet werden:
  1abcde, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 12, 14, 25
- **Folgende 4 Aufgaben** werden als Hausübung aufgegeben: 1f (7. HÜ), 6 (8. HÜ), 11 (9. HÜ), 27 (10. HÜ)
- **Folgende 14 Aufgaben** sind einzig und allein zum Zweck des eigenständigen Anwendens der bislang gelernten Methoden der Analytischen Kegelschnittsgeometrie auf diverse geometrische Problemstellungen gedacht und werden (bis auf Einzelfälle in den Übungsstunden vor der Schularbeit) im Unterricht nicht behandelt: 7, 8, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 sowie 23, 24, 26

↑↑↑↑↑↑↑↑ nebst 25 (SÜ!) und 27 (HÜ!) hervorragende Übungsaufgaben! !!

Fragen dazu in Pausen (die wir ja wohl nicht gemeinsam verbringen werden müssen …..) sind natürlich möglich und (im Rahmen) auch durchaus erwünscht!