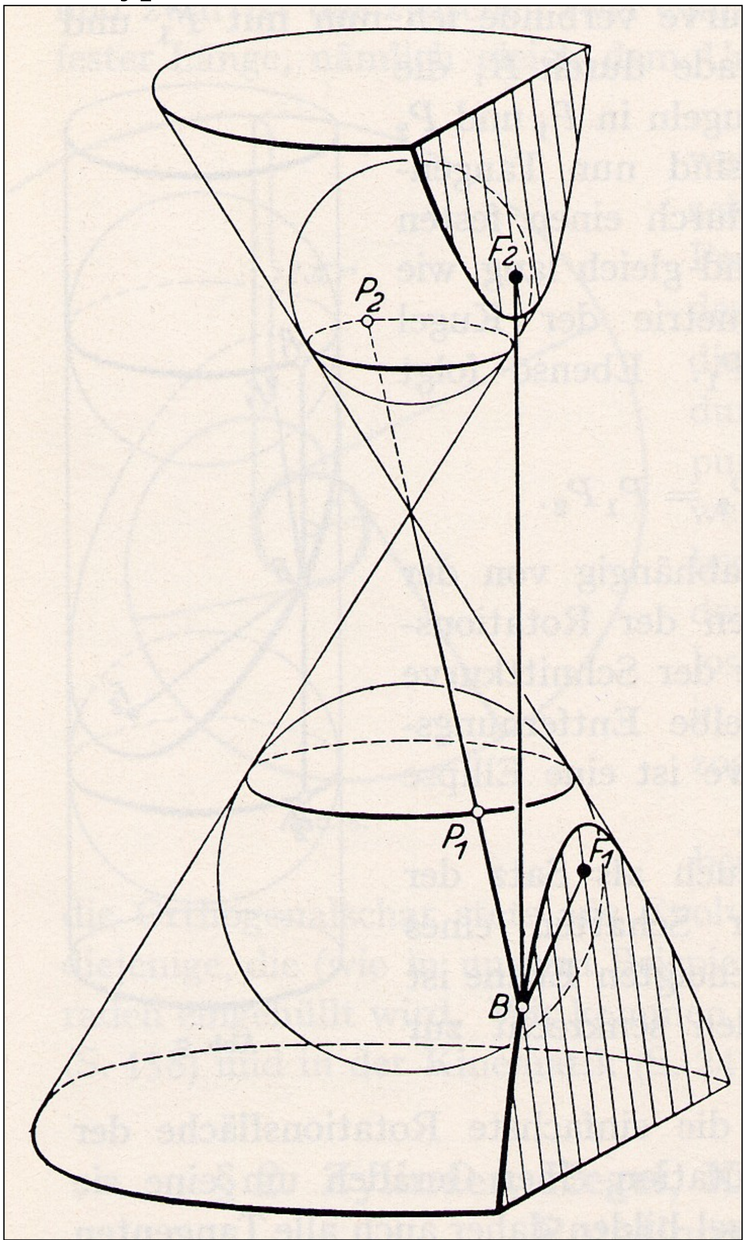
Heimstudienblatt Nr. 10:
Einführung in die Geometrie der Kegelschnitte

(Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene)

7D, Realgymnasium, 2008/09

Teil 3: Die Hyperbel



I) Die Hyperbel als Kegelschnitt – (wieder!) die DANDELINschen Kugeln

↓↓↓↓↓↓

Denke an die Ellipse zurück!

Analog zum ersten Heimstudienblatt (ebener Schnitt eines Drehkegels nach einer Ellipse) wird nun wie in nebenstehender Abbildung illustriert der Kegel mit einer Ebene geschnitten, welche gegenüber jeder Normalebene der Kegelachse eine stärkere Neigung aufweist als der Kegel selbst. Dies äußert sich jetzt im Gegensatz zur Ellipse und zur Parabel dadurch, dass die entstehende Schnittkurve (welche als sog. Hyperbel bezeichnet wird) aus zwei "Ästen" besteht (pro Teil des Doppelkegels eine Schnittkurve).

Mit ähnlichen Überlegungen wie beim ebenen Schnitt eines Drehkegels nach einer Ellipse (welche wieder die beiden DANDELINschen Kugeln miteinbeziehen) läßt sich nun in vorliegender Situation zeigen, dass für jeden beliebigen Punkt B der Hyperbel der Betrag der Differenz $\overline{BF_2} - \overline{BF_1}$ konstant ist, was uns zur folgenden grundlegenden Definition führt:

DEFINITION 1. Unter einer Hyperbel hyp versteht man die Menge aller Punkte X der Ebene, für welche der Betrag der Differenz der Abstände zu zwei festen Punkten F_1 und F_2 (Brennpunkte oder Foci – sing. zu letzteren: Focus!) konstant ist, d.h. symbolisch: $\text{hyp} = \{X \mid |\overline{XF_1} - \overline{XF_2}| = \text{const.}\}$.

Der Einfachheit der Rechnung wegen wählen wir für die Brennpunkte F_1 und F_2 symmetrisch zum Ursprung auf der x-Achse liegende Punkte $F_1(-e|0)$ und $F_2(e|0)$ und schreiben die konstante Differenz als 2a an.

Betrachten wir zunächst einen Spezialfall für die beiden Abstände $\overline{XF_1}$ (kurz: r_1) und $\overline{XF_2}$ (kurz: r_2), nämlich:

$r_1 + r_2 = 2e$: Dann schneiden einander die entsprechenden Kreisbögen r_1 und r_2 (Beachte, dass $r_2 - r_1 = 2a$, womit wir $r_2 > r_1$ voraussetzen!) auf der x-Achse und zwar wegen $r_2 = r_1 + 2a$ und somit $2r_1 + 2a = 2e$ bzw. $r_1 = e - a$ im Punkt $A(-a|0)$. Analog (wenn man von F_1 aus den größeren Radius $r_2 = e + a$ abträgt) erhält man den Punkt $B(a|0)$. Damit $r_1 > 0$ gilt (Für r_2 ist dies wegen der Addition von a und e automatisch der Fall!), muss $\boxed{e>a}$ gelten!

Für X(x|y), $F_1(-e|0)$ und $F_2(e|0)$ gilt nun gemäß den Abkürzungen $\overline{XF_1} := r_1$ und $\overline{XF_2} := r_2$:

$r_1 - r_2 = 2a \quad \leftrightarrow \quad r_1 = 2a + r_2 \quad \leftrightarrow \quad r_1^2 = 4a^2 + 4ar_2 + r_2^2$, was konkret angeschrieben

$x^2 + 2ex + e^2 + y^2 = 4a^2 + 4ar_2 + x^2 - 2ex + e^2 + y^2$ bzw. $4ex - 4a^2 = 4ar_2$ bzw.

$(ex - a^2)^2 = a^2 r_2^2$ nach sich zieht. Es folgt $e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 = a^2(x^2 - 2ex + e^2 + y^2)$

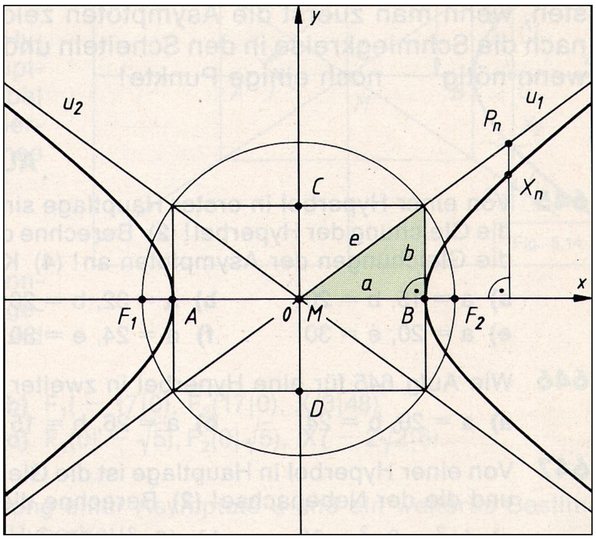
bzw. $(e^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$.

Jetzt kürzen wir (ähnlich, aber nicht in gleicher Weise!) wie bei der Ellipse den (wegen e>a mit Sicherheit positiven!) Ausdruck $e^2–a^2$ mit b^2 ab und erhalten somit via $\boxed{\text{hyp.: } b^2x^2–a^2y^2=a^2b^2}$ eine Gleichung einer Hyperbel in erster Hauptlage mit der halben Hauptachsenlänge a.
↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑
Genaueres dazu sogleich!

Nun analysieren wir die Gleichung $\boxed{\text{hyp.: } b^2x^2–a^2y^2=a^2b^2}$:
Lösen wir sie nach y auf, so erhalten wir $a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \Rightarrow \boxed{y = (\pm \tfrac{b}{a}) \cdot \sqrt{x^2 - a^2}}$
Damit der Ausdruck unter Wurzel nicht negativ ist, muss $x \geq a$ oder $x \leq -a$ gelten, d.h. zwischen den zuvor berechneten Punkten A(–a|0) und B(a|0) gibt es keine Hyperbelpunkte, nur links von A und rechts von B.

Wegen e>a liegen die Brennpunkte $F_1(-e|0)$ und $F_2(e|0)$ außerhalb der Strecke AB!

$y = (\pm \frac{b}{a}) \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$ läßt sich noch weiter zu $y = (\pm \frac{b}{a}) \cdot \sqrt{x^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} = (\pm \frac{b}{a}) \cdot x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ umformen, was wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) = 1$ erkennen läßt, dass sich die Hyperbel für stark negative wie stark positive x (also für weit links wie weit rechts liegende Punkte) nur unwesentlich von den Geraden mit den "Gleichungen" $\boxed{y = (\pm \frac{b}{a}) \cdot x}$ unterscheidet, weshalb diese als Asymptoten ("Grenzkurven" oder – vom Standpunkt der *Projektiven Geometrie* aus betrachtet – "Tangenten im Unendlichen") der Hyperbel bezeichnet werden, was für jede Skizze wie aus nachstehender Abbildung ersichtlich wesentlich miteinzuzeichnen ist:



Fassen wir zusammen:

Durch die Gleichung $\boxed{\text{hyp.: } b^2x^2–a^2y^2=a^2b^2}$ wird eine Hyperbel in erster Hauptlage mit der halben Hauptachsenlänge a, d.h. den Hauptscheiteln A(–a|0) und B(a|0), den Brennpunkten $F_1(-e|0)$ und $F_2(e|0)$ – wobei hier $e^2 = a^2 + b^2$ gilt! – sowie den Asymptoten $\boxed{u_1\text{: } y = \frac{b}{a} \cdot x}$ und $\boxed{u_2\text{: } y = \frac{-b}{a} \cdot x}$ beschrieben.

Bei jeder Skizze beachten:
Zuerst das Asymptotenrechteck einzeichnen!

Gilt a=b, so spricht man von einer *gleichseitigen* oder auch **recht-winkligen** (Überlege dir bis zur nächsten Stunde, warum **auch diese Bezeichnung** durchaus sinnstiftend ist!) Hyperbel.

Es folgen nun noch die Unterkapitel "Hyperbeltangenten" (Spaltform), "Berührungsbedingung", "Drehung einer gleichseitigen Hyperbel um den Ursprung um 45°" sowie "Pol und Polare bei der Hyperbel". Sollte noch Zeit dazu sein, erfolgt abschließend eine Zusammenschau der drei bislang behandelten Kegelschnittstypen "Ellipse", "Parabel" und "Hyperbel", was aber nicht unbedingt sein muss!