LÖSUNGSVORSCHLAG ZU AUFGABE 4 DER 48. IMO (26. 7. 2007)

Dr. Robert Resel, GRg Wien 22 Heustadelgasse

Aufgabenstellung:

Aufgabe 4. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BCA$ schneidet den Umkreis im Punkt R ($R \neq C$), die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{BC}$ im Punkt P und die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AC}$ im Punkt Q. Der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ sei K und der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ sei L.
Man beweise, dass die Dreiecke RPK und RQL den gleichen Flächeninhalt haben.

Beweisvariante:

Wir benutzen den (hier ohne Beweis angegebenen) ***"Südpolsatz"*** und wählen für die Eckpunkte des Dreiecks ΔABC die Darstellungen $C(0|0)$, $A(2b|0)$ und $B(2\lambda(1-k^2)|4\lambda k)$[1], wobei hier o.B.d.A. $b>0$, $k>0$ sowie $\lambda>0$ vorausgesetzt werden darf. ***Demnach*** ist R einfach der Schnittpunkt von w_γ mit m_{AB}:

$$\overrightarrow{BA} \parallel \begin{pmatrix} b+\lambda(k^2-1) \\ -2\lambda k \end{pmatrix}, M_{AB}\left(b+\lambda(1-k^2)|2\lambda k\right) \Rightarrow m_{AB}: \left[b+\lambda(k^2-1)\right]\cdot x - 2\lambda k y = \overbrace{b^2-\lambda^2(k^2-1)^2-4\lambda^2k^2}^{b^2-\lambda^2(k^2+1)^2}$$

$$w_\gamma \cap m_{AB} = \{R\}: \left[b-\lambda(k^2+1)\right]x = b^2-\lambda^2(k^2+1)^2 \Rightarrow \underline{\underline{x_R = b+\lambda(k^2+1)}} \Rightarrow \underline{\underline{y_R = bk+\lambda k(k^2+1)}}$$

Für L bzw. Q ergibt sich automatisch $L(b|0)$ sowie $Q(b|bk)$, was für den Flächeninhalt $\mu(\Delta RQL)$ demnach $\mu(\Delta RQL) = \frac{1}{2}\cdot bk\cdot\lambda\cdot(k^2+1)$ impliziert.

P ist der Schnittpunkt von w_γ mit m_{BC}:

$$\overrightarrow{CB} \parallel \begin{pmatrix} \lambda(1-k^2) \\ 2\lambda k \end{pmatrix}, M_{BC}\left(\lambda(1-k^2)|2\lambda k\right) \Rightarrow m_{BC}: \lambda(1-k^2)\cdot x + 2\lambda k y = \overbrace{\lambda^2(1-k^2)^2+4\lambda^2k^2}^{\lambda^2(k^2+1)^2}$$

$$w_\gamma \cap m_{BC} = \{P\}: \lambda(k^2+1)x = \lambda^2(k^2+1)^2 \Rightarrow \underline{\underline{x_P = \lambda(k^2+1)}} \Rightarrow \underline{\underline{y_P = \lambda k(k^2+1)}}$$

Für den Flächeninhalt $\mu(\Delta PRK)$ gilt dann $\mu(\Delta PRK) = \frac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PK}\right)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\det\begin{pmatrix} b & -2\lambda k^2 \\ bk & \lambda k(1-k^2)\end{pmatrix}\right| = \frac{b\lambda k}{2}\cdot\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -2k \\ k & 1-k^2\end{pmatrix}\right|$, ergo

$\mu(\Delta PRK) = \frac{b\lambda k}{2}\cdot(1-k^2+2k^2) = \frac{b\lambda k}{2}\cdot(1+k^2)$, was dem obigen Resultat für $\mu(\Delta RQL)$ gleicht, qu. e. d.

Bemerkung: Aus den durch Schnittoperationen berechneten Darstellungen von P, Q und R sowie den für die Berechnung von $\mu(\Delta PRK)$ vereinfachten Vektoren $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{PK}$ lassen sich über die eigentliche Aufgabenstellung hinausgehend überdies die folgenden beiden Zusammenhänge [wobei sich die durch Einsetzen von 2) in 1) resultierende Gleichung $\overline{CP}:\overline{CQ} = \overline{CB}:\overline{BA}$ auch unmittelbar aus dem Strahlensatz ergibt!] sehr deutlich erkennen:

1) $\overline{CP}:\overline{PR} = \overline{CB}:\overline{BA}$

2) $\overline{CQ} = \overline{PR}$

---

[1]: Die Idee hinter dieser Darstellung ist die Folgende: Da die Seite CA auf der x-Achse liegt, schließt die Winkelsymmetrale w_γ mit der x-Achse den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ ein, für den mit dem Ansatz $\boxed{w_\gamma: y = kx}$ dann $\boxed{\tan\frac{\gamma}{2} = k}$ gilt. Wegen $\tan\gamma = \frac{2\tan\frac{\gamma}{2}}{1-\tan^2\frac{\gamma}{2}}$ ergibt sich für B die obige Darstellung.