

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Stochastik	9
2.1	Elementare Statistik und ebenso elementare Komplexitätstheorie	9
2.2	Der lokale Grenzwertsatz von MOIVRE-LAPLACE	11
2.3	Elementare Wählerstromanalyse	24
3	Analysis	27
3.1	Implizites Differenzieren	27
3.2	LAGRANGE-Multiplikatoren	30
3.3	Extrema von Funktionen in zwei Variablen	34
3.4	Extrema I: Winkel Ebene/Gerade	41
3.5	Extrema II: Winkel Ebene/Ebene	43
3.6	Extrema III: Treffnormalen	44
3.6.1	Ein geometrischer Zugang	44
3.6.2	Ein analytischer Weg	46
3.7	Extrema IV: Isoperimetrische Vierecke	48
3.8	Extrema V: Anwendungen der LAGRANGE-Multiplikatoren	54
3.8.1	Günstigste Stromleitung zum abseits gelegenen Haus	54
3.8.2	Volumsgrößter Drehzylinder in einer Kugel	56
3.8.3	Volumskleinsten Drehkegel um einen coaxialen Drehzylinder	58
3.8.4	Volumsgrößter Drehkegel in einer Kugel	59
3.8.5	Volumskleinsten Drehkegel um eine Kugel	61
3.8.6	Maximaler Sehwinkel zum Genuss eines Bildes	63
3.8.7	Drehkegel minimalen Mantelflächeninhalts bei vorgegebenem Volumen	65
3.8.8	Die ideale Eprouvette	67
3.8.9	Volumsgrößter Drehzylinder in einem coaxialen Drehkegel	68
3.8.10	Materialverbrauchsfreundlichster Zylinder	70
3.8.11	Ausblick 1: Fassungsreichster Zylinder	71
3.8.12	Ausblick 2: Volumsgrößte Pyramide aus einem Quadrat	72
3.8.13	Ausblick 3: Kürzeste Verbindung zweier Punkte über eine Gerade	73
3.8.14	Ausblick 4: Kugel und Würfel	74
3.8.15	Ausblick 5: Trapez in Halbkreis	75
3.9	Eigenschaften der komplexen Ableitung	75
3.10	Geodätische Kurven auf der Kugel	78
3.11	Die EULER-MASCHERONI-Konstante	79
3.12	Linearapproximationen und Ableitungsregeln	81
3.13	Ein heuristischer Weg zur TAYLOR-Formel	84
3.14	Potenzfunktion, Exponentialfunktion oder keines von beiden?	87
4	Arithmetik und Algebra	89
4.1	Zur Division von Brüchen	89
4.2	Auf dem Weg zu binomischen Formeln	90
4.2.1	Die erste binomische Formel und der Lehrsatz von PYTHAGORAS	90
4.2.2	Die zweite binomische Formel mit Hilfe der ersten binomischen Formel	91

4.2.3	Die dritte binomische Formel via Abbildungsgeometrie	92
4.2.4	Von der Prozentrechnung über die BERNOULLISCHE Ungleichung zur ersten binomischen Formel	93
4.2.5	Vermischte Aufgaben zum Herleiten binomischer Formeln	94
4.3	Das harmonische Mittel - phänomenologische Vielfalt	95
4.3.1	Zum Lösen von Textaufgaben - ein Stück angewandter Mathematik	95
4.3.2	Zum Prozess des Abstrahierens - ein Stück reiner Mathematik . . .	97
4.4	Lösungsformeln für quadratische Gleichungen: Diverse <i>elementare</i> Wege . .	106
4.4.1	Quadratische Gleichungen selbst gemacht	106
4.4.2	Ein Gleichungssystem als Schlüssel	112
4.4.3	Symmetrie als Schlüssel	113
4.4.4	Pythagoras als Schlüssel	114
4.4.5	Die dritte binomische Formel als Schlüssel	116
4.4.6	Produkt-Nullsatz als Schlüssel	116
4.4.7	Ein multiplikativer Ansatz als Schlüssel	118
4.4.8	Ein achter Zugang in Form einer Übungsaufgabe	121
4.4.9	Ein neunter Zugang in Form einer Übungsaufgabe	121
4.5	Das Pentagon und komplexe Zahlen	122
4.6	Symmetrische algebraische Gleichungen und eine Ergänzung zur VIÈTA- Gruppe	124
4.6.1	Symmetrische Gleichungen höheren Grades: Ein Ausblick	124
4.6.2	Erweiterung der Satzgruppe von VIÈTA	126
4.7	Steigungsadditionen und komplexe Zahlen	127
4.8	Zugänge zu den komplexen Zahlen	131
4.9	Der Fundamentalsatz der Algebra	135
4.10	Lösungsformeln für quadratische Gleichungen vom höheren Standpunkt . .	139
4.10.1	Komplexe Zahlen und Matrizen als Wegbereiter	139
4.10.2	Komplexe Zahlen und Polynome als Wegbereiter	140
4.11	Fibonacci-Zahlen und Binomialkoeffizienten	142
5	Geometrie	143
5.1	Grundlagen der <i>ebenen</i> analytischen Geometrie	143
5.1.1	Eine Flächeninhaltsformel	143
5.1.2	Matrizen, Vektoren und Determinanten: Basics	144
5.1.3	Präzisierung des Vektorbegriffs	145
5.1.4	Ausweitung des Vektorbegriffs	146
5.1.5	Rechnen mit Vektoren	148
5.1.6	Betrag von Vektoren	153
5.1.7	Orthogonalität von Vektoren: Das skalare Produkt	154
5.1.8	Die Kippregel	157
5.1.9	Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts	159
5.1.10	Die (HESSEsche) Normalvektorform der Geradengleichung	162
5.1.11	Die CRAMERSche Regel	165
5.2	Grundlagen der Trigonometrie	167
5.2.1	Sinus und Cosinus am Einheitskreis I: Determinante und Skalarpro- dukt	167
5.2.2	Sinus und Cosinus am Einheitskreis II: Koordinaten	167

5.2.3	Additionstheoreme für Sinus und Cosinus	169
5.2.4	Sinus, Cosinus (und Tangens nicht nur) im rechtwinkligen Dreieck .	170
5.2.5	Symbiose zwischen Vektorrechnung und Trigonometrie	171
5.3	Geometrie und Zahlentheorie: Ganze Dreiecke	177
5.4	Eine Ergänzung zu Determinante und Skalarprodukt	181
5.5	Spuren, Determinanten und mehr davon	183
5.6	Vier- und höherdimensionale Geometrie	185
5.6.1	Der vier- (sowie n)-dimensionale ($n \geq 4$) Würfel und	185
5.6.2	... einer seiner räumlichen Schnitte	191
5.6.3	Hypervolumina höherdimensionaler Sphären	193
5.6.4	Kegel im \mathbb{R}^n und deren Beziehungen zu Sphären	202
5.6.5	Winkel zwischen zwei Ebenen im \mathbb{R}^4	205
5.6.6	Sonderfälle für Winkelmaße zwischen Ebenen	209
5.6.7	Charakterisierung isogonaler Ebenenpaare	210
5.7	Durchschnitt von Polygonen: Ein Spezialfall	213
5.8	Plückers μ für algebraische Kurven höherer Ordnung	215
5.9	Ebene Kurven in Parameterdarstellung (PDST)	220
5.9.1	Ein simples, aber überraschendes Einstiegsbeispiel	220
5.9.2	Weitere Aufgaben zu(nächst zu) ebenen Kurven	222
5.9.3	Übungsaufgaben zu(nächst zu) ebenen Kurven	228
5.10	Eine Ergänzung zum Winkel zwischen Gerade und Ebene	240
5.11	Dreiecksgeometrie	242
5.11.1	Kopunktale Geraden I: Streckensymmetralen und Höhen	242
5.11.2	Kopunktale Geraden II: Schwerlinien und Winkelsymmetralen . . .	244
5.11.3	Kollineare Punkte I: Die EULER-Gerade	251
5.11.4	Kollineare Punkte II: Die WALLACE-Gerade	253
5.11.5	Kopunktale Geraden III: Orthologische Dreiecke I	257
5.11.6	Kopunktale Geraden IV: Orthologische Dreiecke II	258
5.12	HP-Flächen	260
5.12.1	$z = x^2 - y^2$	260
5.12.2	Zum eigenständigen Üben: $z = xy$	262
5.12.3	Ein windschiefes Viereck	263
5.12.4	Ein weiteres windschiefes Viereck zum eigenständigen Üben	267
5.13	Raumkurven und Raumflächen in PDST	268
5.13.1	Einstieg: Die kleine Lösungsformel als Fläche	268
5.13.2	Weitere(s zu) Flächen (und Kurven) im Raum (und der Ebene) – Übungsaufgaben	271