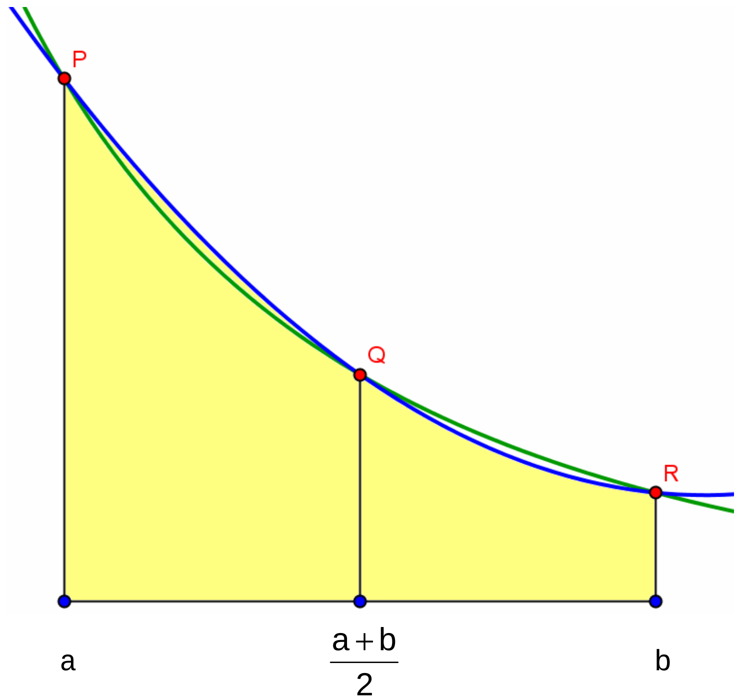
Numerische Integration: Die KEPLER-Regel

Es soll das bestimme Integral $\int_a^b f(x)\cdot dx$ *einer "komplizierten" Funktion f berechnet werden, was sich ja bekanntlich geometrisch deuten lässt:*

Rechts ist der Graph Γ_f einer Funktion f über dem Intervall [a;b] mit den nicht-kollinearen Stützpunkten $P(a|f(a))$, $Q\left(\frac{a+b}{2}\middle|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ *und* $R(b|f(b))$ *abgebildet.*

$\int_a^b f(x)\cdot dx$ *entspricht nun dem Normalbereich* $N=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle| a\le x\le b \wedge 0\le y\le f(x)\right\}$, *welcher rechts durch den Normalbereich einer einfache(re)n Funktion g ersetzt wurde.*



Konkret handelt es sich bei dieser einfacheren Funktion um eine Polynomfunktion zweiten Grades g, welche durch die Bedingungen $g(a)=f(a)$, $g\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ und $g(b)=f(b)$ festgelegt[1] ist, da Γ_g ja durch die Punkte P, Q und R geht. Aus historischen Gründen wird Γ_g als KEPLER-Parabel bezeichnet.

Ziel ist es jetzt, $\int_a^b f(x)\cdot dx$ durch das einfacher zu berechnende $\int_a^b g(x)\cdot dx$ zu ersetzen, was zwar im Allgemeinen nicht den genauen Wert von $\int_a^b f(x)\cdot dx$, aber bei hinreichend kleiner Intervallänge $l = b-a$ immerhin einen guten *Näherungswert* liefern wird. Dazu könnte man mit dem nahe liegenden Ansatz $y=g(x)=px^2+qx+r$ über die obigen Bedingungen ein lineares Gleichungssystem dreier Gleichungen in den drei Variablen p, q und r aufstellen und anschließend $\int_a^b g(x)\cdot dx$ in Abhängigkeit von a, b sowie den Funktionswerten f(a), $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ und f(b) berechnen, was im Rahmen eines Referats oder einer Fachbereichsarbeit mit Sicherheit ein äußerst interessantes Unterfangen darstellt und interessierten Schülerinnen jedenfalls wärmstens empfohlen wird!

Obwohl wir hier einen anderen Weg einschlagen, werden an dieser Stelle nichtsdestotrotz für interessierte "Jungforscher" die Resultate $\boxed{p=\frac{2}{(a-b)^2}\cdot\left(f(a)-2\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)}$,

$\boxed{q=\frac{-1}{(a-b)^2}\cdot\left((a+3b)\cdot f(a)-4\cdot(a+b)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(3a+b)\cdot f(b)\right)}$ und

$\boxed{r=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\left(b\cdot(a+b)\cdot f(a)-4\cdot ab\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)+a\cdot(a+b)\cdot f(b)\right)}$ angegeben.

Dabei erkennt man am langen Klammerausdruck in der Formel für p sehr schön, dass dieser verschwindet, wenn $\boxed{f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2}}$ gilt, was gleichbedeutend damit ist, dass P, Q und R kollinear liegen, womit sich die eingangs geforderte "Nicht-Kollinearität" von P, Q und R auf andere Art und Weise nochmals erklärt.

[1]: Dabei ist die Festlegung nur eindeutig, wenn P, Q und R die bereits angeführte "Nichtkollinearitäts-forderung" erfüllen, da eine Parabel eine Gerade ja in höchstens zwei Punkten schneiden kann!

Der nun von uns verfolgte Weg ist einerseits technisch weniger aufwändig und andererseits auch eleganter, weil es dabei vor allem darum geht, bereits Vorhandenes durch konzentriertes Hinsehen zu erkennen und geschickt zu gruppieren, was einmal mehr Hauptaugenmerk auf eine (von vielen!) wichtige Facette(n) mathematischen Tuns lenkt, nämlich dem Strukturieren diverser Muster (welche nicht unbedingt geometrischer Natur sein müssen; so geht es hier eher – um mit den Worten des österreichischen Mathematikprofessors Roland FISCHER (*1945) zu sprechen – um die "Geometrie der Terme"):

Wir beginnen damit, den Ansatz $y=g(x)=px^2+qx+r$ in das Gleichungssystem

$g(a)=f(a),\ g\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ und $g(b)=f(b)$ zu *implementieren*, was auf

$f(a)=pa^2+qa+r,\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)=p\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+q\cdot\frac{a+b}{2}+r$ und $f(b)=pb^2+qb+r$ führt.

Der schon erwähnte Clou[2] besteht jetzt darin, *ohne Auflösung* dieses Gleichungssystems das bestimmte Integral $\int_a^b g(x)\cdot dx=\int_a^b (px^2+qx+r)\cdot dx$ zu berechnen und dabei lediglich die Gleichungen dieses Gleichungssystems an den relevanten Stellen *wiederzuerkennen*, nundenn:

$$\int_a^b (px^2+qx+r)\cdot dx=\left(\tfrac{p}{3}\cdot x^3+\tfrac{q}{2}\cdot x^2+rx\right)\Big|_a^b=\tfrac{p}{3}\cdot(b^3-a^3)+\tfrac{q}{2}\cdot(b^2-a^2)+r\cdot(b-a)=$$

$$=\tfrac{b-a}{6}\cdot\left[2p\cdot(b^2+ab+a^2)+3q\cdot(b+a)+6r\right]=\tfrac{b-a}{6}\cdot\left(2pb^2+2pab+2pa^2+3qb+3qa+6r\right)=$$

$$=\tfrac{b-a}{6}\cdot\left(\underbrace{pb^2+qb+r}_{f(b)}+\underbrace{pa^2+qa+r}_{f(a)}+\underbrace{pb^2+2pab+pa^2}_{p\cdot(a+b)^2}+\underbrace{2qb+2qa}_{2q\cdot(a+b)}+4r\right)=$$

$$=\tfrac{b-a}{6}\cdot\left(f(a)+f(b)+\underbrace{4p\cdot\left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2+4q\cdot\tfrac{a+b}{2}+4r}_{4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right)$$

Also erhalten wir die folgende Approximation: $\boxed{\int_a^b f(x)\cdot dx\approx\tfrac{b-a}{6}\cdot\left(f(a)+4\cdot f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)}$

Diese Näherungsformel wird als KEPLERsche Fassregel bezeichnet, da Johannes KEPLER (1571-1630) sie zur Volumsberechnung von Weinfässern verwendete, deren Dauben[3] Ellipsen- oder Parabelbögen sind. Somit handelt es sich bei den Integranden in den zur Volumsberechnung verwendeten bestimmten Integralen um Polynome zweiten Grades, für welche die KEPLER-Approximation sogar den exakten Wert liefert (Begründe, warum!). Damit kann also mit Fug und Recht von der Fass-*Regel* gesprochen werden.

Was man dieser Näherungsformel aber nicht ansieht, ist, dass sie sogar noch für Polynome dritten(!) Grades den exakten Wert des bestimmten Integrals liefert (Satz).Vom Standpunkt der sogenannten *Numerischen Mathematik* aus betrachtet (welche sich mit der Entwicklung und Analyse von Rechenverfahren verschiedenster Art beschäftigt und insbesondere Aussagen über Fehlerabschätzungen trifft) ist dies leicht einzusehen, da eine entsprechende Fehlerabschätzung für den bei der KEPLER-Approximation begangenen Fehler $e=\left|\tfrac{b-a}{6}\cdot\left(f(a)+4\cdot f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\int_a^b f(x)\cdot dx\right|$ durch $\boxed{e\le\tfrac{(b-a)^5}{2880}\cdot\left|\max f^{(4)}(x)\right|,\ a\le x\le b}$ gegeben ist.

Begründe über die Grade der Ableitung von Polynomfunktionen, warum dieser Satz tatsächlich zutrifft!

Selbstverständlich kann dieser Satz auch durch den allgemeinen Ansatz $y=f(x)=sx^3+tx^2+ux+v$ bewiesen werden (was sich in ähnlicher Weise wie die Herleitung der Formeln für p, q und r für ein Referat oder eine Fachbereichsarbeit eignet, selbiges gilt auch für die Herleitung der Formel für Fehlerabschätzung!).

---

[2]: Wie sich in Kürze herausstellen wird, ist es weniger ein Clou als eine Art Selbstoffenbarung der Mathematik eo ipso, welche sich selbst ihren Weg bahnt. Es liegt dann an uns, entsprechende Muster als solche zu erkennen!

[3]: So werden die gebogenen Holzbretter bezeichnet, welche die Fasswände bilden.

Bevor im Folgenden zahlreiche Übungsaufgaben darauf warten, bearbeitet zu werden, soll die KEPLER-Regel noch an einem Beispiel eingeübt werden, welches auch die Grundlage für die Abbildung zu Beginn war:

BEISPIEL. Für die Funktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=x-40+\frac{440}{x}$ soll das bestimmte Integral $\int_5^{11} f(x)\cdot dx$ unter Verwendung der KEPLER-Regel näherungsweise berechnet werden.

LÖSUNG. Es gilt also a=5 und b=11, womit wir f(5)=53, f(8)=23 und f(11)=11 benötigen, was auf $\int_5^{11} f(x)\cdot dx \approx \frac{11-5}{6}\cdot(53+4\cdot 23+11)=53+92+11=156$ führt.

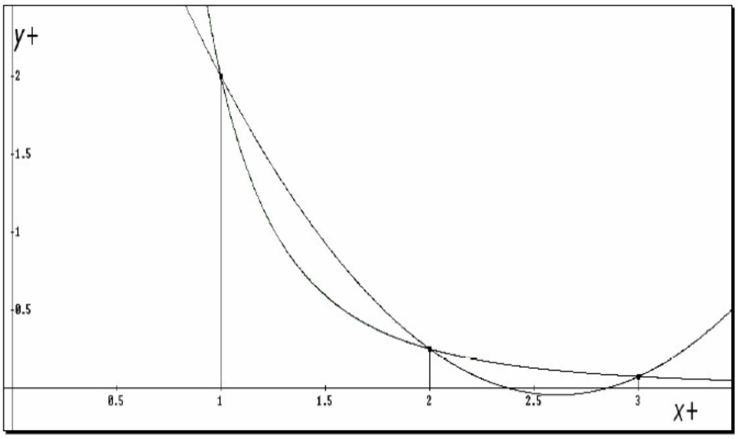
Ein Vergleich mit dem exakten Wert $\int_5^{11} f(x)\cdot dx=\int_5^{11}\left(x-40+\frac{440}{x}\right)\cdot dx=\left(\frac{1}{2}\cdot x^2-40x+440\cdot \ln x\right)\Big|_5^{11}=$

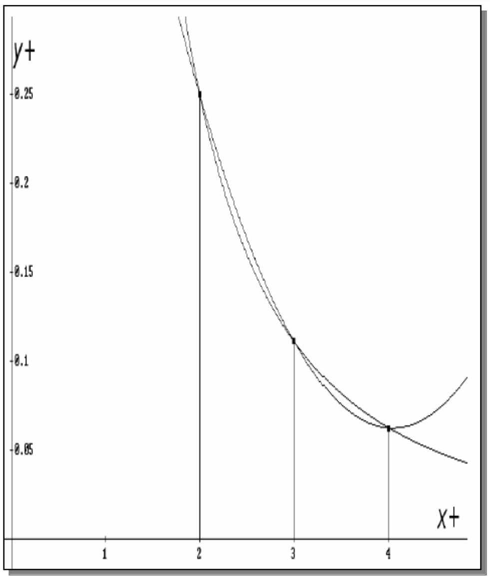
$=48-240+440\cdot \ln 2{,}2=8\cdot(55\cdot \ln 2{,}2-24)\approx 154{,}92$ zeigt, dass die Näherung also einen absoluten Fehler von ca. 156–154,92=+1,08 bzw. einen relativen Fehler von $\frac{1{,}08}{154{,}92}\approx 0{,}007$, also ca. 7 Promille, aufweist, was zwar keine schlechte Approximation ist, aber dennoch die Frage aufwirft, wie man noch näher an den tatsächlichen Wert von $\int_5^{11} f(x)\cdot dx$ herankommen kann, was im Anschluss an die Übungsaufgaben noch erörtert werden wird (→ SIMPSON-Regel!).

BEMERKUNG. Durch Anwendung der KEPLER-Regel bekommt man zwar eine Näherung für $\int_a^b f(x)\cdot dx$, der geometrische Hintergrund bleibt jedoch im Verborgenen. Dies lässt sich aber durch Berechnung der Koeffizienten p, q und r der KEPLER-Parabel $y=px^2+qx+r$ über die angegebenen Formeln beheben, was am vorliegenden Beispiel (Rechne dies selbst nach!) auf $y=x^2-23x+143$ führt.

Ü B U N G E N

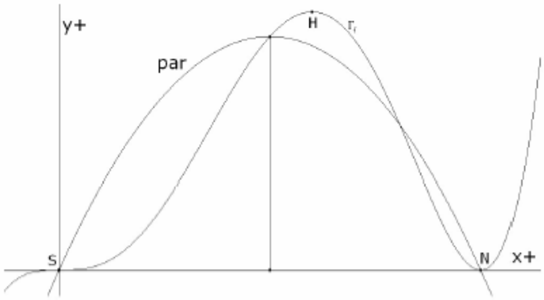
1)
- Approximiere $\int_1^3 \frac{2}{x^3}\cdot dx$ mittels KEPLERscher Fassregel!
- Erkläre mit Hilfe der [redacted] Abbildung den geometrischen Hintergrund dieser Regel!
- Beurteile die Güte der Näherung!
- Gibt es neben den Stützpunkten noch weitere gemeinsame Kurvenpunkte?





2) Approximiere $\int_2^4 \frac{4}{x^2}\cdot dx$ mittels KEPLERscher Fassregel, erläutere anhand nebenstehender Figur den geometrischen Background dieser Regel und beurteile die Güte der Näherung. Gibt es neben den Stützpunkten noch weitere gemeinsame Kurvenpunkte?

3) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 \cdot (x-10)^2$.

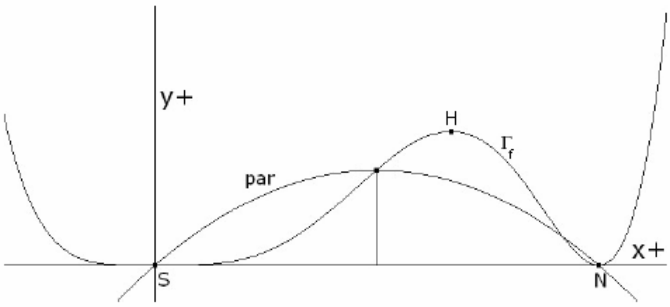


(a) Begründe die Gestalt in der Abbildung, welche auch die zum Intervall $[0; 10]$ zugehörige KEPLER-Parabel enthält.

(b) Berechne $\int_0^{10} f(x) \cdot dx$ einmal exakt und einmal unter Verwendung der KEPLERschen Fassregel. Welches Verhältnis ergibt sich und warum kann dieses apriori nicht $1:1$ sein?

(c) Kontrolliere, dass $\int_0^{10} f(x) \cdot dx = \frac{3125}{3888} \cdot x_H \cdot y_H$ gilt!

4) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^4 \cdot (x-6)^2$.



(a) Begründe die Gestalt in der Abbildung, welche auch die zum Intervall $[0; 6]$ zugehörige KEPLER-Parabel enthält.

(b) Berechne $\int_0^{6} f(x) \cdot dx$ einmal exakt und einmal unter Verwendung der KEPLERschen Fassregel. Welches Verhältnis ergibt sich und warum kann dieses apriori nicht $1:1$ sein?

(c) Kontrolliere, dass $\int_0^{6} f(x) \cdot dx = \frac{729}{1120} \cdot x_H \cdot y_H$ gilt!

Wien, im August 2011. Dr. Robert Resel, e. h.