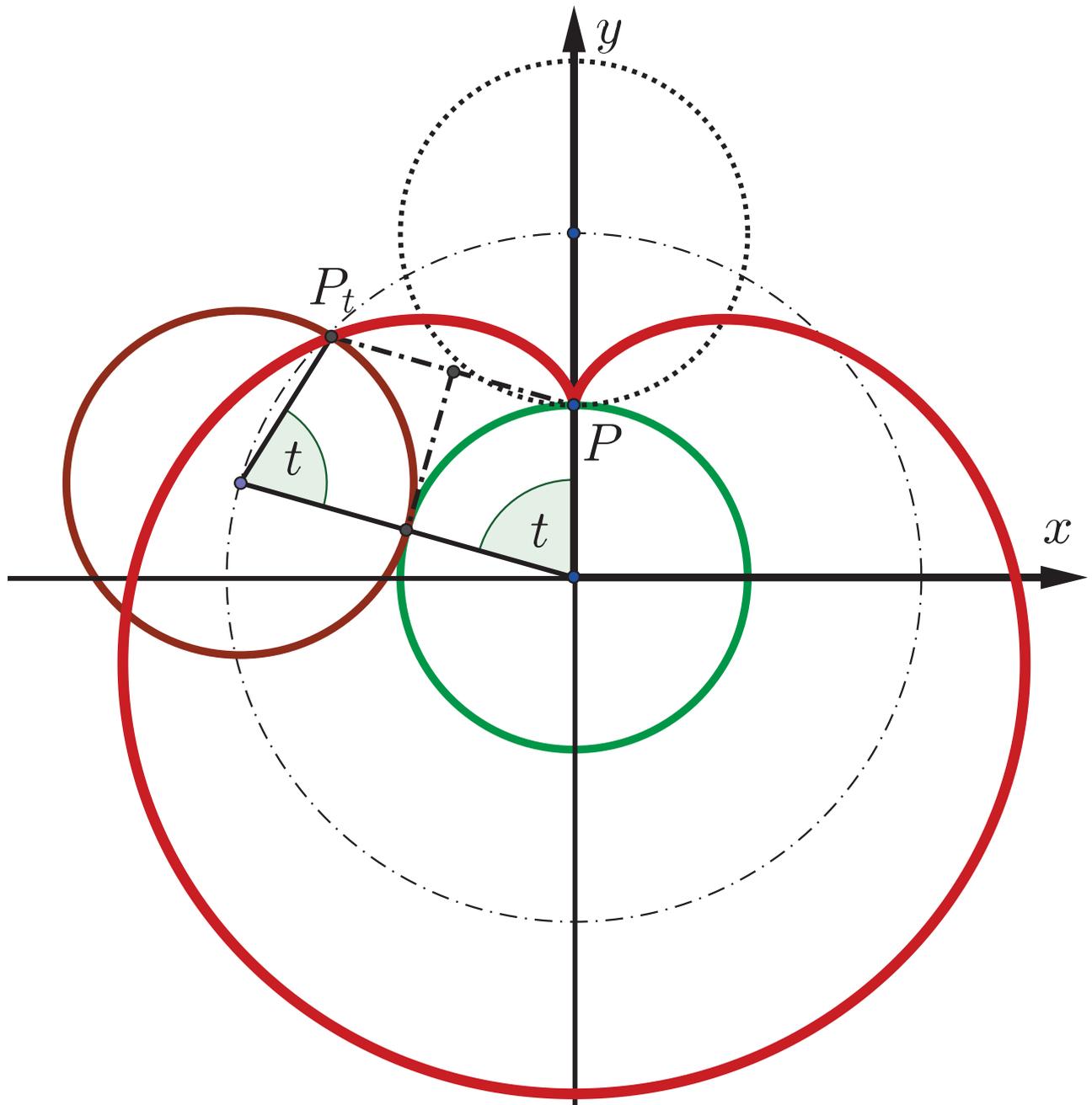


Robert Resel

20000 Normalvektoren (unter) der Sphäre



Logos Verlag, 2015/16

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Algebra	3
2.1	Summenformeln	3
2.1.1	Quadratsummen	3
2.1.2	Kubensummen	4
2.1.3	Biquadratsummen	5
2.1.4	Aufgaben	6
2.2	\mathbb{H} : Die Quaternionen	7
2.2.1	Genese von \mathbb{H}	7
2.2.2	Die Gleichung $X^2 = -1$ in \mathbb{H}	10
2.2.3	Drehungen im \mathbb{R}^3 mittels vektorieller Quaternionen	12
2.2.4	Konstruktion der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$ via \mathbb{H} bzw. $\mathfrak{S}(\mathbb{H})$	14
2.2.5	Anwendung von \mathbb{H} in der Vektoralgebra	19
2.2.6	Parallelen zu bzw. Erweiterungen gegenüber \mathbb{C}	22
2.2.7	Ausblick	26
2.3	GALOIS-Theorie: Ein genetischer Weg	28
2.3.1	Diskriminanten	28
3	Geometrie	45
3.1	Mathematik und Fußball	45
3.2	Der Satz von MORLEY	47
3.3	Nachtrag zum skalaren Produkt und zur Determinante	49
3.4	Nachtrag zum vektoriellen Produkt	56
3.5	Regelflächen	57
3.6	Kreis	60
3.6.1	Kreisgleichungen	60
3.6.2	Kreistangenten	64
3.6.3	Polarentheorie beim Kreis	65
3.6.4	Schnitt zweier Kreise	70
3.7	Die Ellipse als affines Kreisbild	74
3.7.1	Die Konstruktion von LA HIRE	74
3.7.2	Orthogonale Stauchungen und Streckungen (ÖS“)	75
3.7.3	Ellipsentangenten und -polaren via OS	75
3.7.4	Die Ellipse in allgemeiner Lage	78
4	Analysis	80
4.1	Die Sektorformel für Kurven in Parameterdarstellung	80
4.2	Die DESCARTESsche Kreismethode	85
4.2.1	Ableitung von Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten mittels DESCARTESscher Kreismethode	85
4.2.2	Äquivalenz der DESCARTESschen Kreismethode und des klassischen Differentialquotienten	86
4.3	Rektifikation von Kurvenbögen	87
4.4	Krümmung(skreise) ebener Kurven und Evoluten	90
4.5	KEPLERS Fassregel als Schmankerl zur numerischen Integration	104

4.6	Zur EULERSchen Formel	111
4.7	Zur Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion	116
4.8	(Wie die EULERSche Zahl in die) Hyperbelfunktionen (kommt)	117
4.9	Kurvenscharen und Enveloppen	127
4.9.1	Differentialgeometrische Grundlagen (Enveloppensatz)	127
4.9.2	Erste Anwendung: Die Astroide	128
4.9.3	Zweite Anwendung: Die Kardioide	137
4.9.4	Dritte Anwendung: Scharen von Graphen von Polynomfunktionen .	144
4.9.5	Vierte Anwendung: Scharen von Graphen rationaler Funktionen (inkl. Ortskurven)	146
4.9.6	Anhang zum Enveloppensatz: Parameterdarstellung von Einhüllenden	153
5	PROVISORISCHER(!) Anhang	174

2.3 GALOIS-Theorie: Ein genetischer Weg

Über das Lösen quadratischer Gleichungen¹⁶ hinaus standen den Mathematikern des 16. Jahrhunderts auch schon Lösungsmethoden sowohl für kubische als auch für biquadratische Gleichungen zur Verfügung, was etwa in [38], S. 140ff bzw. S. 143ff **elementar** behandelt wird.

Im Kontrast dazu wollen wir in diesem umfangreichen Abschnitt Methoden entwickeln, welche den hinter diesen Gleichungen steckenden Strukturen auf den Grund gehen, um daraus Rückschlüsse über die Darstellbarkeit von entsprechenden Lösungen durch Wurzelausdrücke in Polynomen der Koeffizienten ziehen zu können.¹⁷ Dabei werden wir uns aber letztlich nicht auf algebraische Gleichungen bis zum Grad 4 beschränken, wiewohl wir für den Beginn noch einmal auf quadratische Gleichungen Bezug nehmen:

2.3.1 Diskriminanten

Besitzt die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \quad (*)$$

eine Doppellösung (und somit auch keine weiteren Lösungen), so weist die dahintersteckende Polynomfunktion

$$p_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = p_2(x) = x^2 + px + q$$

aufgrund eines Satzes aus der Analysis eine Extremstelle auf, welche simultan auch Nullstelle von p_2 ist. Wegen

$$p_2'(x) = 2x + p, \quad p_2''(x) = 2 \neq 0 \quad \wedge \quad p_2'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-p}{2}$$

gilt somit

$$p_2\left(\frac{-p}{2}\right) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = 0 \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0} \quad \text{resp.} \quad \underline{p^2 - 4q = 0},$$

weshalb wir [noch bevor überhaupt auch nur im entferntesten von einer Lösungsformel für (*) die Rede ist]

$$\mathcal{D}_2 := p^2 - 4q$$

als *Diskriminante* von (*) bezeichnen, da \mathcal{D}_2 offensichtlich über das Lösungsverhalten von (*) entscheidet.¹⁸

¹⁶Für zahlreiche unterschiedliche Zugänge zu sogenannten *kleinen Lösungsformel* sei auf [38], S. 149ff sowie [39], S. 106ff und S. 139ff verwiesen.

¹⁷Historisch dauerte dieser Sprung über 200 (bzw. bis zur Rezeption dieser Ideen in der *scientific community* gar 300) Jahre, was in weiterer Folge durch eingeschobene Anmerkungen über die Geschichte der Mathematik noch genauer ausgeführt wird!

¹⁸Der vierte Teil von \mathcal{D}_2 taucht ja bekanntlich als Radikand in der kleinen Lösungsformel auf und wird ebenda auch als Diskriminante bezeichnet (weshalb er auch gerahmt hervorgehoben wurde). Warum gerade das Vierfache dieses Radikanden als Diskriminante von (*) definiert wird, wird sich in Kürze herausstellen.

Bei der kubischen Gleichung

$$x^3 + px + q = 0 \quad (**)$$

[für welche wir $p \neq 0$ voraussetzen, da (**) andernfalls durch einfaches Kubikwurzelziehen gelöst werden kann] führt eine analoge Überlegung wegen

$$\begin{aligned} p_3(x) = x^3 + px + q &\Rightarrow p_3'(x) = 3x^2 + p = 0 \Rightarrow p_3''(x) = 6x \\ &\Rightarrow p_3'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{-p}{3}} \vee x = -\sqrt{\frac{-p}{3}} \end{aligned}$$

auf

$$p_3\left(\pm\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = \pm\left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} \pm p \cdot \left(\frac{-p}{3}\right)^{1/2} + q = 0$$

bzw.

$$\pm\left(\frac{-p}{3}\right)^{1/2} \cdot \left[\frac{-p}{3} + p\right] + q = 0 \Rightarrow \frac{-p}{3} \cdot \frac{4p^2}{9} = q^2,$$

ergo

$$\boxed{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0} \quad \text{resp.} \quad \underline{-4p^3 - 27q^2 = 0}.$$

Dies liefert einen triftigen Grund, die linke Seite des doppelt gerahmten Ausdrucks [welcher ja bekanntlich auch in der CARDANO-Formel (vgl. dazu [38], S. 140ff!) in Erscheinung tritt und vorläufig mit \mathcal{D} abgekürzt wird], welcher demnach bei einer Doppellösung von (**) verschwindet, im Folgenden genauer zu analysieren, was wir zuvor aber noch (sozusagen "zum Aufwärmen") mit \mathcal{D}_2 durchführen wollen:

Aufgrund der kleinen Lösungsformel sowie der Satzgruppe von VIÈTA für (*) (vgl. etwa [39], S. 106ff!) erhalten wir

$$\mathcal{D}_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2,$$

womit

$$\mathcal{D}_2 > 0$$

genau dann gilt, wenn ${}_1x_2$ voneinander verschieden und reell sind.

Wegen

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 + (x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2) \cdot x - x_1x_2x_3$$

folgt für die Lösungen x_1 , x_2 und x_3 von (**) daher

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_3 = -(x_1 + x_2)$$

und somit

$$p = x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2 \quad \text{sowie} \quad q = x_1x_2(x_1 + x_2),$$

was für den doppelt gerahmten Ausdruck \mathcal{D} zunächst die Darstellung

$$\mathcal{D} = \frac{x_1^2x_2^2(x_1 + x_2)^2}{4} + \frac{[x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2]^3}{27}$$

impliziert, woraus man durch Einsetzen von $x_2 = x_1$ schon einmal

$$\mathcal{D} = \frac{4x_1^6}{4} - \frac{27x_1^6}{27} = 0$$

erhält.

Unter Verwendung der Abkürzungen $\alpha := x_1x_2$ und $\beta := (x_1 + x_2)^2$ vereinfachen wir \mathcal{D} zu

$$\mathcal{D} = \frac{27\alpha^2\beta + 4(\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3)}{108} = \frac{4\alpha^3 + 15\alpha^2\beta + 12\alpha\beta^2 - 4\beta^3}{108}$$

bzw. (weil ja wie eben erkannt $x_1 = x_2$ bzw. $x_1 - x_2 = 0$ auf $\mathcal{D} = 0$ führt, was sich aus α und β via $\beta - 4\alpha = (x_1 - x_2)^2 = 0$ erzeugen lässt)

$$\mathcal{D} = \frac{(4\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2)}{108} = -\frac{(\beta - 4\alpha) \cdot (\alpha + 2\beta)^2}{108},$$

ergo [wenn wir α und β unter zusätzlicher Beachtung von $x_3 = -(x_1 + x_2)$ bzw. $x_1 + x_2 = -x_3$ an passenden Stellen wieder durch die Lösungen von (***) ausdrücken]

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= -\frac{(x_1 - x_2)^2 \cdot (2x_1^2 + 5x_1x_2 + 2x_2^2)^2}{108} = -\frac{(x_1 - x_2)^2 \cdot [(x_1 + 2x_2)(2x_1 + x_2)]^2}{108} = \\ &\Rightarrow \mathcal{D} = -\frac{(x_1 - x_2)^2 \cdot (x_2 - x_3)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2}{108} \quad (***) \end{aligned}$$

Somit ergibt das (-108)-fache von \mathcal{D} exakt das Produkt

$$\prod_{i < j} (x_i - x_j)^2,$$

wobei x_k , $1 \leq k \leq 3$ die Lösungen von (***) bezeichnen und wir somit die entsprechende Situation wie zuvor bei (*) vorliegen haben, weshalb wir diese Größe (welche uns schon weiter oben begegnet ist und ebenda auch unterstrichen wurde) als Diskriminante \mathcal{D}_3 von (***) definieren ...

$$\mathcal{D}_3 := -4p^3 - 27q^2$$

... und

$$\mathcal{D}_3 = (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \cdot (x_2 - x_3)^2$$

erhalten.

Daraus erkennen wir, dass

$$\mathcal{D}_3 > 0$$

jedenfalls dann gilt, wenn x_1 , x_2 und x_3 paarweise verschiedene reelle Lösungen sind.

Weist (***) ein konjugiert-komplexes Lösungspaar $(x_1|x_2) = (a + bi|a - bi)$ sowie eine reelle Lösung $x_3 = c$ auf, so ergibt sich

$$\mathcal{D}_3 = (2bi)^2 \cdot (a - c - bi)^2 \cdot (a - c + bi)^2 = (-4b^2) \cdot [(a - c)^2 + b^2]^2,$$

ergo

$$\mathcal{D}_3 < 0,$$

womit die Bedingungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_3 < 0 \\ \mathcal{D}_3 = 0 \\ \mathcal{D}_3 > 0 \end{array} \right\} \text{ notwendig und hinreichend f\u00fcr } \left\{ \begin{array}{l} \text{eine} \\ \text{drei beliebige} \\ \text{drei unterschiedliche} \end{array} \right\} \text{ reelle L\u00f6sung(en) von (**) sind.}$$

Der Fall $\mathcal{D}_3 > 0$ wird uns an sp\u00e4terer Stelle zum sogenannten *Casus irreducibilis* f\u00fchren, wobei an dieser Stelle noch angemerkt sei, dass sich (***) auch aus der CARDANO-Formel ableiten l\u00e4sst, wof\u00fcr auf [5], S.41 verwiesen sei.

Dass mit kubischen Gleichungen vom Typus (**) die Allgemeinheit nicht eingeschr\u00e4nkt wird, folgt aus der Tatsache, dass sich jede kubische Gleichung

$$A'x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0, \quad A' \neq 0$$

nach Normierung (via Division durch A') ...

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (\#)$$

... via $x = y - \frac{a}{3}$ (##) wegen

$$y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3} \cdot y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2}{3} \cdot y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = 0$$

bzw. schlie\u00dflich

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right) \cdot y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0 \quad (\#\#\#)$$

in eben gerade eine vom Typ (**) transformieren l\u00e4sst, wodurch sich wegen (##) die Differenzenprodukte in (***) nicht \u00e4ndern, wenn man anstelle der L\u00f6sungen von (###) jene von (#) in (***) einsetzt, wodurch sich \mathcal{D}_3 als **translationsinvariant** herausstellt.

Zur Berechnung der Diskriminante der biquadratischen Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \quad (\sim)$$

bilden wir ausgehend von

$$p_4(x) = x^4 + px^2 + qx + r$$

wiederum p_4' , was auf

$$p_4'(x) = 4x^3 + 2px + q$$

und somit wegen

$$p_4'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2px + q = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{p}{2} \cdot x + \frac{q}{4} = 0$$

unter gleichzeitiger Erf\u00fcllung von (\sim) auf das Gleichungssystem

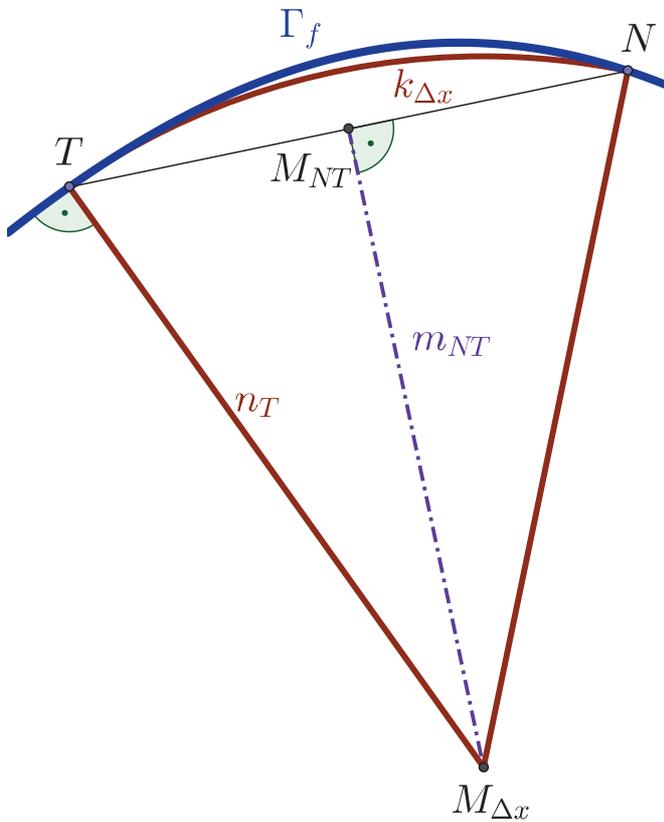
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I.) } x^4 + px^2 + qx + r = 0 \\ \text{II.) } 4x^3 + 2px + q = 0 \end{array} \right\}$$

f\u00fchrt, welches freilich \u00fcberbestimmt ist und deshalb nur durch Erf\u00fcllung einer *Bedingungsgleichung* zwischen den Koeffizienten p , q und r eine (oder im Extremfall zwei) L\u00f6sung(en) besitzt. Zwecks Ermittlung *letzterer* bilden wir zun\u00e4chst III.) := $x \cdot \text{II.}) - \text{I.})$, was uns

$$\text{III.) } 3x^4 + px^2 - r = 0$$

4.3 Rektifikation von Kurvenbögen

Unter Rektifikation versteht man die Ermittlung der Länge eines Kurvenstücks, welches sich aus dem Graphen Γ_f einer differenzierbaren Funktion f über einem abgeschlossenen



Intervall $I = [a; b]$ ergibt. Dazu approximieren wir Γ_f in einem Punkt $T(x_0|f(x_0))$ durch einen Kreis $k_{\Delta x}$, welcher Γ_f ebenda berührt und ferner durch einen T benachbarten Punkt $N(x_0+\Delta x|f(x_0+\Delta x))$ geht, wobei für den Mittelpunkt $M_{\Delta x}$ von $k_{\Delta x}$ ferner $\overline{MT} = \overline{MN}$ gelten soll. Durch die zuletzt postulierte Eigenschaft ist gesichert, dass Γ_f über dem abgeschlossenen Intervall $J = [x_0, x_0 + \Delta x]$ durch den entsprechenden Kreisbogen um $M_{\Delta x}$ von T nach N approximiert werden kann.

Die analytische Umsetzung dieser Idee erfolgt nun durch den Schnitt der Kurvennormalen n_T an Γ_f in T mit der Streckensymmetrale m_{NT} , wobei wir n_T bzw. m_{NT} geeigneterweise durch eine Parameterdarstellung bzw. Normalvektorform beschreiben:

$$n_t : X = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{NT} : 2 \cdot \Delta x \cdot x + 2 \cdot [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \Delta x \cdot (2x_0 + \Delta x) + f^2(x_0 + \Delta x) - f^2(x_0)$$

Der Mittelpunkt $M_{\Delta x}$ von $k_{\Delta x}$ geht dann aus dem Schnitt $\{M\} = n_t \cap m_{NT}$ hervor:

$$2 \cdot \Delta x \cdot [x_0 - f'(x_0) \cdot \lambda] + 2 \cdot [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] \cdot [f(x_0) + \lambda] = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + f^2(x_0 + \Delta x) - f^2(x_0)$$

Für λ ergibt sich demnach

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^2 + f^2(x_0 + \Delta x) - 2 \cdot f(x_0 + \Delta x) \cdot f(x_0) + f^2(x_0)}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x}$$

bzw.

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^2 \cdot \left\{ 1 + \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right]^2 \right\}}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x}$$

resp.

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right]^2}{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x}{(\Delta x)^2}} \quad (*)$$

Der Radius $r_{\Delta x}$ von $k_{\Delta x}$ um $M_{\Delta x}$ durch T und N beträgt daher

$$r_{\Delta x} = \lambda \cdot \left| \begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix} \right| \quad (**).$$

Die Länge ℓ des entsprechenden Kreisbogens von T nach N errechnet sich nach der bekannten elementargeometrischen Formel $\ell = r_{\Delta x} \cdot \Delta\varphi$, wobei $\Delta\varphi$ den Winkel zwischen den Radien $M_{\Delta x}T$ und $M_{\Delta x}N$ bezeichnet.

Nach dem Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ ist die erste Ableitung von f an der Stelle x_0 im Zähler von (*) offensichtlich.

Was den Nenner betrifft, so führt dieser auf einen unbestimmten Ausdruck, welchen man etwa unter Anwendung der Regel von DE L'HOSPITAL oder der TAYLOR-Formel (bzgl. beider Werkzeuge vgl. man zum Beispiel [39], S. 84ff!) auf $\frac{f''(x_0)}{2}$ zurückführen kann, was dem werten $L \overset{e}{\circ}$ ser als Übung überlassen bleibt und uns somit auf den Radius

$$r = \lambda \cdot \left| \begin{pmatrix} -f'(x_0) \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{\{[1 + [f'(x_0)]^2]\}^{3/2}}{f''(x_0)}$$

des Grenzkreises $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\Delta x}$ führt.

Aus dem Winkel $\Delta\varphi$ wird für $\Delta x \rightarrow 0$ entsprechend $d\varphi$, wobei $\tan \varphi = f'(x_0)$ gilt (Der werte $L \overset{e}{\circ}$ ser möge dies als Übung begründen!), was zu $\varphi = \arctan f'(x_0)$ äquivalent ist.

Differentiation letzterer Gleichung unter Anwendung der Regel

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

(welche der werte $L \overset{e}{\circ}$ ser zur Übung aus der in 3.8.1 vorgenommenen Kreisflächeninhaltsberechnung herleiten möge) sowie der Kettenregel führt auf

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{1 + [f'(x)]^2} \cdot f''(x),$$

was für das Differential $d\ell$ der zuvor errechneten Bogenlänge ℓ auf

$$d\ell = \sqrt{1 + [f'(x_0)]^2} \cdot dx$$

und somit für die Bogenlänge ℓ von Γ_f über $I = [a; b]$ auf die Formel

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

resp.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx \quad \text{mit } y = f(x)$$

führt.

BEMERKUNG UND BEISPIEL:

- BEMERKUNG: Liegt nun eine Kurve c in Parameterdarstellung

$$c : X(t) = [x(t), y(t)]$$

vor, so berechnet man y' in

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

via

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

was zusammen mit

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = x'(t) \cdot dt$$

die Formel

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \cdot x'(t) \cdot dt$$

(Hierbei sind t_1 und t_2 die den Punkten $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$ entsprechenden Parameterwerte) bzw.

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \cdot dt,$$

die sogenannte *integrale Bogenlängenformel für Kurven in Parameterdarstellung*, liefert.

- BEISPIEL: Bereits auf Abschnitt 4.9.2 vorgehend berechnen wir hier die Länge ℓ der durch die Parameterdarstellung

$$X(t) = [a \cdot \cos^3 t, a \cdot \sin^3 t], \quad 0 \leq t < 2\pi$$

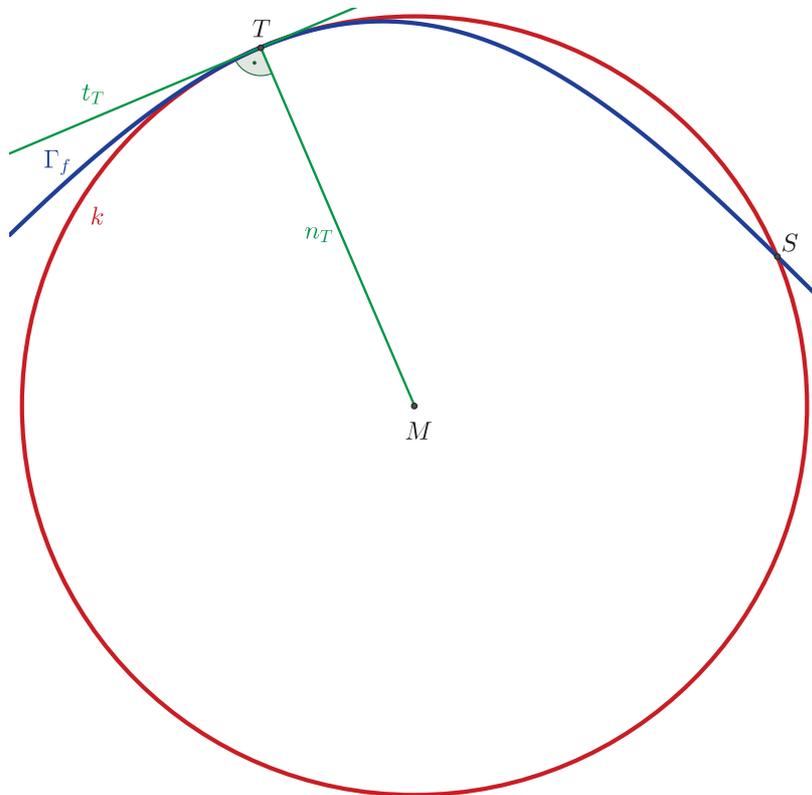
festgelegten Astroide c , was aufgrund der einfach einzusehenden Symmetrie von c bezüglich des Koordinatenursprungs auf

$$\begin{aligned} \ell &= 4a \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \cdot \cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9 \cdot \sin^4 t \cdot \cos^2 t} \cdot dt = \\ &= 12a \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t \cdot \sin t \cdot dt = 6a \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(2t) \cdot dt = \\ &= 3a \cdot [-\cos(2t)]_0^{\pi/2} = 3a \cdot \cos(2t)|_{\pi/2}^0 = 3a \cdot [1 - (-1)] = 6a \end{aligned}$$

führt.

4.4 Krümmung(skreise) ebener Kurven und Evoluten

Der Kehrwert des Radius r des Grenzkreises k aus Abschnitt 4.3 wird als **Krümmung** $\kappa[f(x_0)]$ von Γ_f in T bezeichnet, k bzw. r heißt **Krümmungskreis** bzw. **Krümmungskreisradius** (ebenso von Γ_f in T), M ist der zugehörige Krümmungskreismitelpunkt.



Wie in nebenstehender Abbildung illustriert, passt sich k in einer Umgebung von T dem Funktionsgraphen Γ_f tatsächlich optimal an, wobei dies aber freilich *naturgemäß* lediglich *lokal* gilt, was auch die Existenz eines weiteren **Schnittpunkts** S erklärt. Überdies wird Γ_f von k in T in gleicher Weise *durchsetzt*, wie dies auch jede Wendetangente gewährleistet, welche ebenso wie k mit Γ_f in T drei zusammen-

gerückte Schnittpunkte vereint, was sich daran erkennen lässt, dass (in unserer Abbildung) k *unmittelbar* links bzw. rechts von T unterhalb bzw. oberhalb von Γ_f verläuft (Freilich wäre dies an einem anderen Beispiel auch umgekehrt möglich.), und nicht wie bei einer gewöhnlichen Tangente (also keiner Wendetangente) die Tangente an die Kurve in einer Umgebung des Berührungspunkts samt und sonders ober- oder unterhalb von Γ_f verläuft. *Analytisch* zeigt sich dies durch die Koinzidenz der Ableitungen von f und der hinter k steckenden (zunächst impliziten) Funktion in den Graden 0 (sic!) bis 2, was wir durch *implizites Differenzieren* (welches sich etwa wie in [39], S. 27ff erklären lässt) zeigen werden, wobei wir in der Gleichung

$$k : (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2 \quad (*)$$

des Krümmungskreises k vom aus den Überlegungen in Abschnitt 4.3 unmittelbar folgenden **Resultat**

$$M \left(x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} \cdot \left\{ 1 + [f'(x_0)]^2 \right\} \middle| f(x_0) + \frac{1}{f''(x_0)} \cdot \left\{ 1 + [f'(x_0)]^2 \right\} \right)$$

für den Krümmungskreismitelpunkt $M(u|v)$ ausgehen (**welche** wir in weiterer Folge als **Krümmungskreisformel** bezeichnen werden).

Implizite Differentiation von (*) nach x liefert

$$2 \cdot (x - u) + 2 \cdot (y - v) \cdot y' = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - u + (y - v) \cdot y' = 0 \quad (**) \\ y' = -\frac{x-u}{y-v} \quad (\#) \end{array} \right\}$$

Erneutes implizites Differenzieren von (**) führt zunächst auf

$$1 + y'^2 + (y - v) \cdot y'' = 0 \quad (\#\#)$$

und durch weitere Umformung ...

$$y'' = -\frac{1 + y'^2}{y - v}$$

... sowie Verwendung von (#) auf

$$y'' = -\frac{1 + \left(\frac{x-u}{y-v}\right)^2}{y - v} = -\frac{(y - v)^2 + (x - u)^2}{(y - v)^3}$$

bzw. wegen (*) schließlich auf

$$y'' = -\frac{r^2}{(y - v)^3} \quad (\sim).$$

Zusammen mit der Krümmungskreisformel folgt aus (#) durch Einsetzen von T die Identität

$$y'(T) = -\frac{\frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} \cdot \{1 + [f'(x_0)]^2\}}{-\frac{1}{f''(x_0)} \cdot \{1 + [f'(x_0)]^2\}} = f'(x_0)$$

sowie durch Einsetzen in (\sim) ...

$$y''(T) = -\frac{r^2}{-\frac{1}{[f''(x_0)]^3} \cdot \{1 + [f'(x_0)]^2\}^3}$$

... und unter Beachtung der aus (**) in Abschnitt 4.3 folgenden Identität ...

$$r^2 = \frac{\{1 + [f'(x_0)]^2\}^3}{[f''(x_0)]^2}$$

... schließlich ...

$$y''(T) = f''(x_0),$$

womit die Koinzidenz der Ableitungen bis zum Grad 2 bewiesen ist, \square .

BEMERKUNG, BEISPIELE UND ERGÄNZUNG:

- BEMERKUNG: Liegt nun eine Kurve c in Parameterdarstellung

$$c : X(t) = [x(t), y(t)]$$

vor, so berechnet man y' in der Krümmungskreisformel wie in der entsprechenden Bemerkung des Abschnitts 4.3. via

$$y' = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

sowie y'' via

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right) = \frac{dt}{dx} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{x'(t)} \cdot \frac{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{x'^2(t)}, \end{aligned}$$

ergo

$$y''(x) = \frac{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{x'^3(t)} \quad \text{bzw.} \quad y''(x) = \frac{\det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix}}{x'^3(t)}.$$

Eingesetzt in die Krümmungskreisformel führt dies für u bzw. v (wobei t_0 jenem Parameterwert entspricht, der auf $T(x(t_0)|y(t_0))$ führt) auf

$$u = x(t_0) - \frac{\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}}{\frac{y''(t_0) \cdot x'(t_0) - y'(t_0) \cdot x''(t_0)}{x'^3(t_0)}} \cdot \left[1 + \left(\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \right)^2 \right]$$

bzw. umgeformt

$$u = x(t_0) - \frac{y'(t_0) \cdot [x'^2(t_0) + y'^2(t_0)]}{y''(t_0) \cdot x'(t_0) - y'(t_0) \cdot x''(t_0)}$$

sowie auf

$$v = y(t_0) + \frac{1}{\frac{y''(t_0) \cdot x'(t_0) - y'(t_0) \cdot x''(t_0)}{x'^3(t_0)}} \cdot \left[1 + \left(\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \right)^2 \right]$$

bzw. umgeformt

$$v = y(t_0) + \frac{x'(t_0) \cdot [x'^2(t_0) + y'^2(t_0)]}{y''(t_0) \cdot x'(t_0) - y'(t_0) \cdot x''(t_0)}.$$

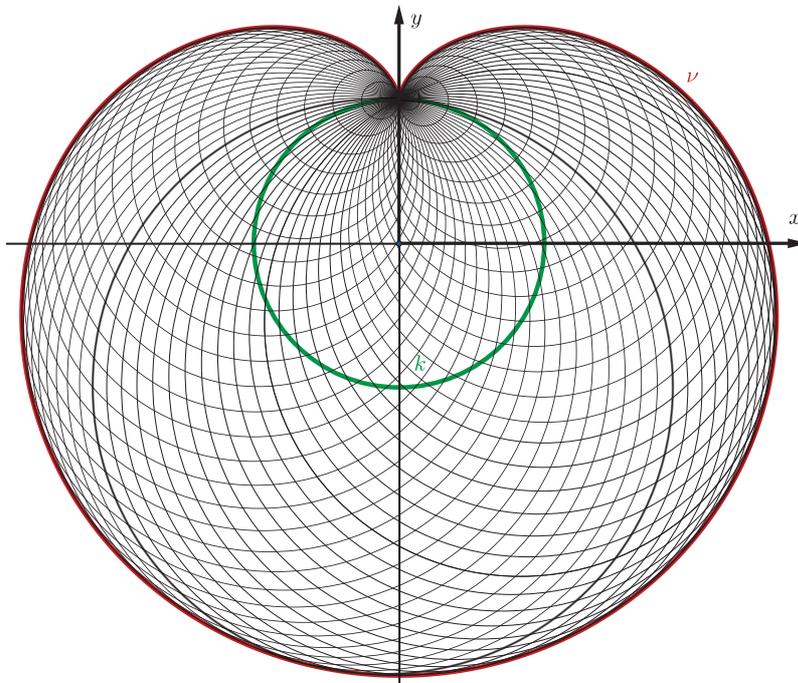
Durchläuft t_0 nun den gesamten Definitionsbereich von c , so beschreibt auch der geometrische Ort aller Krümmungskreismittelpunkte von c eine Kurve, die als **Evolute** von c bezeichnet, via e_c angeschrieben und demnach durch die Parameterdarstellung

$$e_c : X(t) = \left(x(t) - \frac{y'(t) \cdot [x'^2(t) + y'^2(t)]}{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)} \mid y(t) + \frac{x'(t) \cdot [x'^2(t) + y'^2(t)]}{y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)} \right) \quad (\sim\sim)$$

beschrieben wird.

4.9.3 Zweite Anwendung: Die Kardioide

Die **Kardioide** ν entsteht differentialgeometrisch als Einhüllende einer Kreisschar, deren einzelne Vertreter ihre Mittelpunkte alle auf einer festen Kreislinie k haben und durch einen festen Punkt P von k hindurchgehen.



Für die Herleitung einer Gleichung von ν [welche zeigen wird, dass ν eine algebraische Kurve vierter Ordnung (im Fachjargon der algebraischen Geometrie: eine Quartik) ist und *Herzform* aufweist, *daher* auch die Bezeichnung *Kardioide*] wählen wir den Kreis $k[M(0|0), r]$ und für den festen Punkt $P(0|r)$, was für einen beliebigen Punkt M_t von k unmittelbar auf die aus den Polarkoordinaten (vgl. etwa [39], S. 173f!) folgende Darstellung

$M_t(r \cdot \cos t | r \cdot \sin t)$ führt, woraus sich mit

$$c_t : (x - r \cdot \cos t)^2 + (y - r \cdot \sin t)^2 = r^2 \cdot \cos^2 t + r^2 \cdot (\sin t - 1)^2$$

die Schargleichung aller Kreise mit oben genannter Eigenschaft ergibt. Jetzt wenden wir den Enveloppensatz an und differenzieren die Schargleichung partiell nach t :

$$2r \sin t (x - r \cdot \cos t) - 2r \cos t (y - r \cdot \sin t) = -2r^2 \cdot \cos t \cdot \sin t + 2r^2 \cdot \cos t \cdot (\sin t - 1)$$

$$\Rightarrow 2r \cdot (\sin t \cdot x - \cos t \cdot y) = -2r^2 \cdot \cos t \quad \text{bzw.} \quad -\sin t \cdot x + \cos t \cdot y = r \cdot \cos t \quad (*)$$

$$\Rightarrow \cos t \cdot (y - r) = \sin t \cdot x \quad \Rightarrow \quad \cos^2 t \cdot (y - r)^2 = \sin^2 t \cdot x^2$$

bzw. (wegen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$)

$$(1 - \sin^2 t) \cdot (y - r)^2 = \sin^2 t \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad (y - r)^2 = \sin^2 t \cdot [x^2 + (y - r)^2]$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{(y - r)^2}{x^2 + (y - r)^2} \quad (1) \quad \text{bzw.} \quad \sin t = \frac{y - r}{\sqrt{x^2 + (y - r)^2}} \quad (2)$$

sowie

$$\cos^2 t = \frac{x^2}{x^2 + (y - r)^2} \quad (3) \quad \text{bzw.} \quad \cos t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - r)^2}} \quad (4)$$

Vereinfachen wir c_t zu

$$c_t : x^2 - 2r \cdot \cos t \cdot x + y^2 - 2r \cdot \sin t \cdot y = r^2 - 2r^2 \cdot \sin t$$

und setzen (1) bis (4) ein, liefert dies

$$x^2 - \frac{2rx^2}{\sqrt{x^2 + (y-r)^2}} + y^2 - \frac{2ry(y-r)}{\sqrt{x^2 + (y-r)^2}} = r^2 - \frac{2r^2(y-r)}{\sqrt{x^2 + (y-r)^2}}$$

bzw.

$$x^2 + y^2 - r^2 = \frac{2r}{\sqrt{x^2 + (y-r)^2}} \cdot \left[\overbrace{x^2 + y(y-r) - r(y-r)}^{x^2 + (y-r)^2} \right]$$

resp.

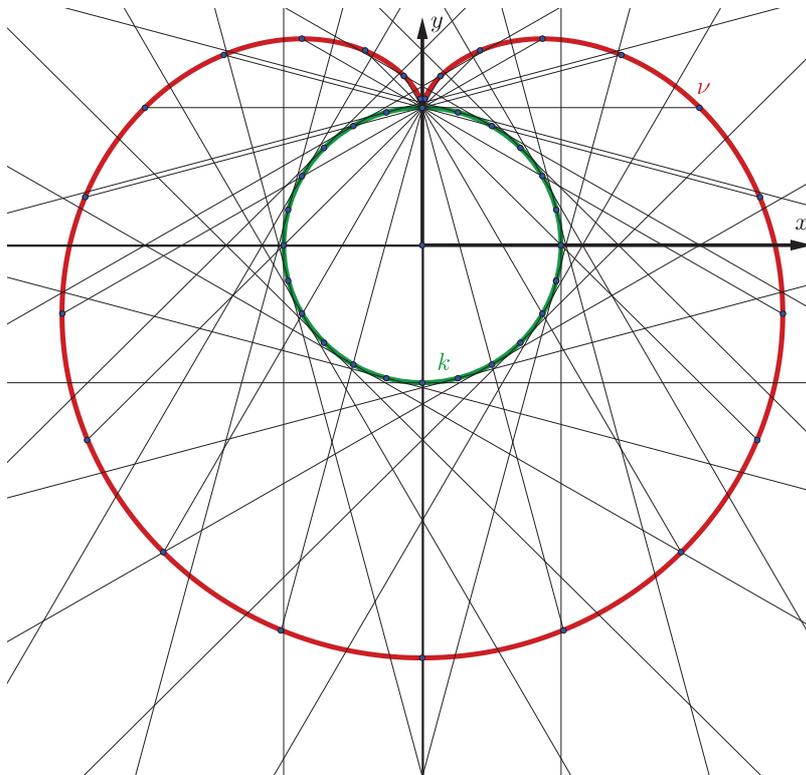
$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 = \frac{4r^2}{x^2 + (y-r)^2} \cdot [x^2 + (y-r)^2]^2,$$

also schließlich mit

$$\nu : (x^2 + y^2 - r^2)^2 - 4r^2 \cdot [x^2 + (y-r)^2] = 0$$

eine Gleichung der Einhüllenden ν obiger Kreisschar.

Eine zweite Möglichkeit der Kardioidenkonstruktion gewährleistet selbige im Gegensatz zur Einhüllenden der Kreisschar punktweise, und zwar als Menge der Spiegelpunkte von P an allen Tangenten von k (vgl. untere Abbildung):



Zum rechnerischen Nachweis dieser punktweisen Konstruktion stellen wir in einem beliebigen Punkt $X_t(r \cdot \cos t | r \cdot \sin t)$ von k unter Verwendung der in Abschnitt 3.8.2 erhaltenen Spaltform mit

$$g_t : r \cdot \cos t \cdot x + r \cdot \sin t \cdot y = r^2$$

bzw.

$$g_t : \cos t \cdot x + \sin t \cdot y = r$$

eine Gleichung der Tangente g_t an k in X_t .

Eine Gleichung der entsprechenden Normalen [mittels der die Spiegelung von $P(0|r)$ an g_t erfolgt] n_t auf g_t durch P

lautet daher

$$n_t : -\sin t \cdot x + \cos t \cdot y = r \cdot \cos t.$$

Elimination von x (via Multiplikation obiger Gleichung von g_t bzw. n_t mit $\sin t$ bzw. $\cos t$ und anschließender Addition) liefert (wiederum unter Anwendung von $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$)

$$y = r \cdot (\sin t + \cos^2 t),$$

was in g_t eingesetzt ...

$$\cos t \cdot x + r \cdot \sin t \cdot (\sin t + \cos^2 t) = r \Rightarrow \cos t \cdot x = r \cdot (1 - \sin^2 t - \sin t \cos^2 t)$$

(erneut unter Anwendung von $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$)

$$\Rightarrow \cos t \cdot x = r \cdot (\cos^2 t - \sin t \cos^2 t) \Rightarrow x = r \cdot \cos t \cdot (1 - \sin t)$$

... für den Schnittpunkt $\{S_t\} = g_t \cap n_t$ auf

$$S_t (r \cdot \cos t \cdot (1 - \sin t) | r \cdot (\sin t + \cos^2 t))$$

und somit für den Spiegelpunkt X_t von P an g_t wegen

$$X_t = S_t + \overrightarrow{PS_t} = S_t + S_t - P = 2 \cdot S_t - P$$

auf

$$X_t = \begin{pmatrix} 2r \cdot \cos t \cdot (1 - \sin t) \\ 2r \cdot (\sin t + \cos^2 t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

bzw. (schon wieder wegen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$)

$$X_t (2r \cdot \cos t \cdot (1 - \sin t) | r \cdot (-2 \cdot \sin^2 t + 2 \cdot \sin t + 1)) \quad (**).$$

Zur Elimination des Parameters t betrachten wir y_{P_t} , kürzen selbige mit y ab und erhalten dadurch

$$y = r \cdot (-2 \cdot \sin^2 t + 2 \cdot \sin t + 1) \Leftrightarrow 2 \cdot \sin^2 t - 2 \cdot \sin t - \left(1 - \frac{y}{r}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow \sin t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8 \cdot \left(1 - \frac{y}{r}\right)}}{4} \quad \text{bzw.} \quad \sin t = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{3 - \frac{2y}{r}}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \sin t = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \mp \sqrt{3 - \frac{2y}{r}}\right)$$

sowie

$$\sin^2 t = \frac{1}{4} \cdot \left(4 - \frac{2y}{r} \pm 2 \cdot \sqrt{3 - \frac{2y}{r}}\right) = 1 - \frac{y}{2r} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 - \frac{2y}{r}}$$

und schließlich (wegen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$)

$$\cos^2 t = \frac{y}{2r} \mp \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 - \frac{2y}{r}}$$

Eingesetzt in x_{P_t} , welche wir mit x abkürzen, erhalten wir Schritt für Schritt:

$$x^2 = 4r^2 \cdot \left(\frac{y}{2r} \mp \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 - \frac{2y}{r}}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(1 \mp \sqrt{3 - \frac{2y}{r}}\right)\right]^2$$

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 2r \cdot \left(y \mp r \cdot \sqrt{3 - \frac{2y}{r}} \right) \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(4 - \frac{2y}{r} \mp 2 \cdot \sqrt{3 - \frac{2y}{r}} \right) \\
 x^2 &= \left(y \mp r \cdot \sqrt{3 - \frac{2y}{r}} \right) \cdot \left(2r - y \mp r \cdot \sqrt{3 - \frac{2y}{r}} \right) \\
 x^2 &= \left(y \mp \sqrt{3r^2 - 2ry} \right) \cdot \left[2r - \left(y \pm \sqrt{3r^2 - 2ry} \right) \right] \\
 x^2 &= 2ry \mp 2r \cdot \sqrt{3r^2 - 2ry} - (y^2 - 3r^2 + 2ry) \\
 (x^2 + y^2 - 3r^2)^2 &= 4r^2 \cdot (3r^2 - 2ry)
 \end{aligned}$$

Nun gilt es innezuhalten und zu beachten (resp. zu nutzen), dass die zuvor differentialgeometrisch abgeleitete kartesische Kardioidengleichung

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 - 4r^2 \cdot [x^2 + (y - r)^2] = 0$$

lautet, deren Äquivalenz zur vorletzten Gleichung wir ja nachweisen wollen, wozu wir

$$(x^2 + y^2 - 3r^2)^2 \text{ in } [(x^2 + y^2 - r^2) - 2r^2]^2 \text{ aufspalten,}$$

was uns auf

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 - 4r^2 \cdot (x^2 + y^2 - r^2) + 4r^4$$

bzw.

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 - 4r^2 \cdot (x^2 + y^2 - r^2 - r^2), \text{ ergo } (x^2 + y^2 - r^2)^2 - 4r^2 \cdot (x^2 + y^2 - 2r^2)$$

führt und somit

$$(x^2 + y^2 - 3r^2)^2 = 4r^2 \cdot (3r^2 - 2ry)$$

zu

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 - 4r^2 \cdot (x^2 + y^2 - 2r^2 + 3r^2 - 2ry) = 0,$$

ergo

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 - 4r^2 \cdot (x^2 + y^2 + r^2 - 2ry) = 0$$

bzw.

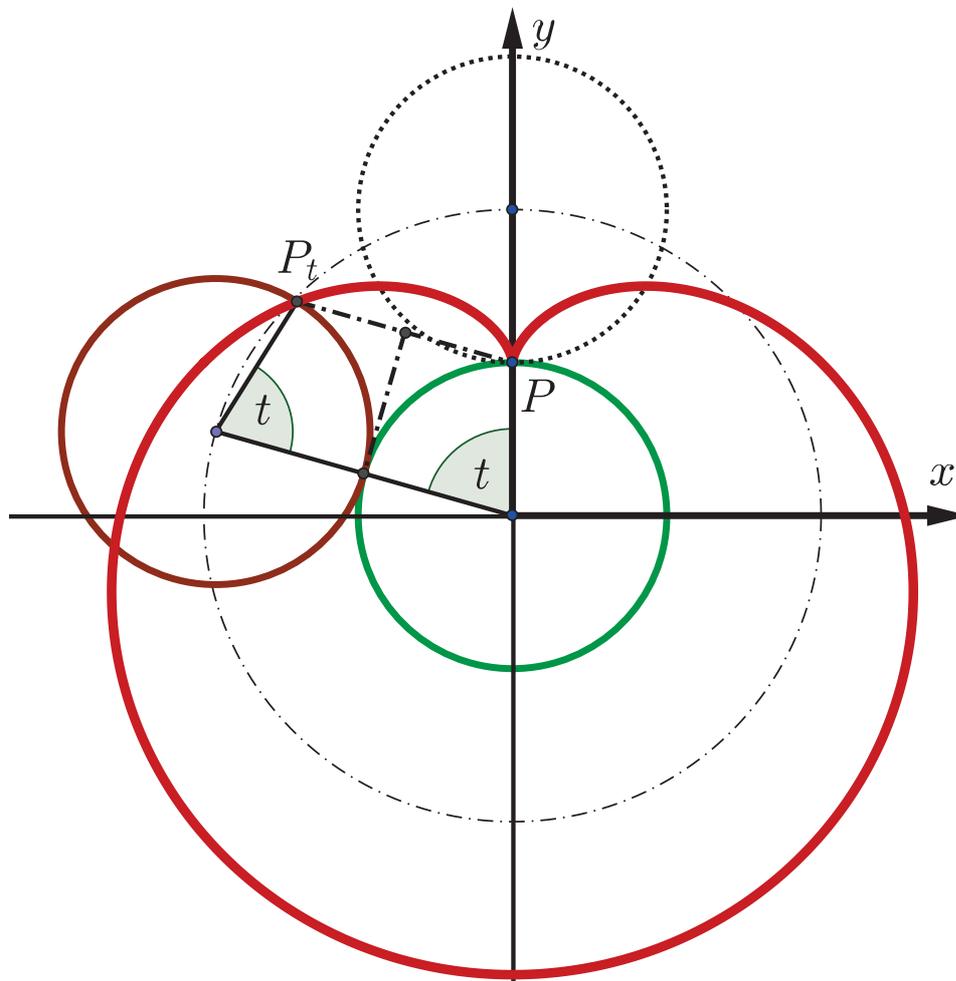
$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 - 4r^2 \cdot [x^2 + (y - r)^2] = 0$$

äquivalent ist, \square .

UMFANGREICHE ÜBUNGSAUFGABE FÜR DEN WERTEN L $\begin{matrix} \text{E} \\ \ddot{\circ} \\ \text{O} \end{matrix}$ SER:

Aus der letzten punktwweisen Konstruktion lässt sich eine weitere kinematische Konstruktion der **Kardioide** ableiten, welche zeigt, dass es sich bei ihr ebenso wie bei der **Astroide** aus dem letzten Abschnitt um eine **Rollkurve** handelt, wobei die nun folgende Erzeugungsweise der Kardioide auf zwei unterschiedliche Arten vom werten L $\begin{matrix} \text{e} \\ \ddot{\circ} \\ \text{o} \end{matrix}$ ser nachgewiesen werden soll:

1. In der unteren Abbildung rollt die (punktierter) Kreislinie $k'[M'(0|2r), r]$ auf der Kreislinie $k[M(0|0), r]$ im mathematisch positiven Drehsinn (also entgegengesetzt des Uhrzeigersinns) ab. Jene Bahnkurve, welche $P(0|r)$ dabei nach einer vollen Umdrehung zurücklegt, ist dann genau die Kardioide, welche wir soeben auf zwei andere Arten und Weisen erzeugt haben, wobei k in beiden Varianten maßgeblich beteiligt war. Der aufgrund der Kongruenz von k und k' zweifach auftauchende Winkel t in



der linken Abbildung impliziert, dass M , der um t gedrehte Mittelpunkt M' (" M'_t ") sowie die Verlängerungen der nach P und P_t weisenden Radien ein gleichschenkliges Dreieck bilden, dessen Symmetrieachse daher durch die Streckensymmetrale von $M'_t M$ gegeben ist. Man begründe nun über die Spiegelkonstruktion von zuvor, dass P_t tatsächlich stets auf der zugehörigen Kardioide liegt.

2. Auf ähnliche Art und Weise wie zuvor in Abschnitt 4.10.2 bei der Astroide (in ihrem Erscheinungsbild als Rollkurve) leite man die aus obiger Abbildung folgende Parameterdarstellung

$$X(t) = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin t \cdot (\cos t - 1) \\ 2 \cdot \cos t - \cos^2 t + \sin^2 t \end{pmatrix}$$

her und stelle einen Zusammenhang zu (**) her, indem man die unterschiedlichen Bedeutungen der (gleich benannten!) Parameter t in den beiden Situationen (Spiegelung bzw. Abrollung) herausarbeite und eine entsprechende Transformation finde, welche die Gewinnung eines derartigen Zusammenhangs gewährleistet.

Literatur

- [1] ARTMANN, Benno (1983): Der Zahlbegriff. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.
- [2] BALLIK, Thomas (2012): Mathematik-Olympiade. ikon, Brunn am Gebirge.
- [3] BEHREND, Erhard (2004). Analysis Band 2. Vieweg, Braunschweig.
- [4] BEUTELSPACHER, Alfred (2001⁵): Lineare Algebra. Vieweg, Braunschweig.
- [5] BEWERSDORFF, Jörg (2007³): Algebra für Einsteiger. Vieweg, Braunschweig.
- [6] BRÖCKER, Theodor (2003): Lineare Algebra und Analytische Geometrie – Ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker. Birkhäuser, Basel.
- [7] BÜRGER, Heinrich, Roland FISCHER, Günther MALLE, Manfred KRONFELLNER, Thomas MÜHLGASSNER und Franz SCHLÖGLHOFER (1991): Mathematik Oberstufe 3. öbv&hpt, Wien.
- [8] CIGLER, Johann (1976): Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie, 1. Teil. Manz, Wien.
- [9] CIGLER, Johann (1992): Grundideen der Mathematik. BI-Verlag, Mannheim.
- [10] CONWAY, John H. und Richard K. GUY (1997): Zahlenzauber. Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen. Birkhäuser, Basel.
- [11] COURANT, Richard und Herbert ROBBINS (1992⁴): Was ist Mathematik? Springer, Berlin.
- [12] EBBINGHAUS, Heinz-Dieter et al. (1992³): Zahlen. Springer, Berlin.
- [13] FELZMANN, Reinhold, Walter WEIDINGER und Manfred BLÜMEL (1988): Geometrisches Zeichnen (3. Klasse). öbv&hpt, Wien.
- [14] FIALA, Friedrich und Wolfgang MOSER (1989⁵): Mathematik Maturaaufgaben. öbv&hpt, Wien.
- [15] GLAESER, Georg (2007²): Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik. Spektrum, Heidelberg.
- [16] GLAESER, Georg und Konrad POLTHIER (2009): Bilder der Mathematik. Spektrum, Heidelberg.
- [17] GÜRLEBECK, Klaus, Klaus HABETHA und Wolfgang SPRÖSSIG (2006): Funktionentheorie in der Ebene und im Raum. Birkhäuser, Basel.
- [18] HELLUS, Michael (2013³): Lineare Algebra nicht-vertieft. Logos, Berlin.
- [19] HESS, Hans-Ulrich (2010): Das Wunder der Anwendung - Einführung in die Analysis und ihre Anwendung in Naturwissenschaft und Technik. Logos, Berlin.
- [20] HURWITZ, Adolf (1919): Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen. Springer, Berlin.
- [21] JÄNICH, Klaus (1993²): Vektoranalysis. Springer, Berlin.
- [22] KEHLMANN, Daniel (2005): Die Vermessung der Welt. Rowohlt, Reinbek.

- [23] KRANZER, Walter (1989): So interessant ist Mathematik. Aulis Verlag, Köln.
- [24] LIETZMANN, Walther (1923³): Trugschlüsse. B.G. Teubner, Leipzig.
- [25] LIETZMANN, Walther (1943): Lebendige Mathematik. Hirt, Breslau.
- [26] LIETZMANN, Walther (1950): Wo steckt der Fehler? B.G. Teubner, Leipzig.
- [27] MESCHKOWSKI, Herbert (1968): Mathematiker-Lexikon. BI-Verlag, Mannheim.
- [28] NEEDHAM, Tristan (2001): Anschauliche Funktionentheorie. Oldenbourg, München.
- [29] NOVAK, Johann, Heinz-Christian SCHALK, Siegfried STEMMER et al. (1992): Mathematik Oberstufe 4. Reniets, Wien.
- [30] ODEHNAL, Boris (2006): Three points related to the incenter and excenters of a triangle. In: Elemente der Mathematik, Band 61, Nr. 2 (S.74-80). Birkhäuser, Basel.
- [31] RADEMACHER, Hans und Otto TÖPLITZ (1933²): Von Zahlen und Figuren. Springer, Berlin.
- [32] REICHEL, Hans-Christian, Robert MÜLLER, Josef LAUB und Günter HANISCH (1992³): Lehrbuch der Mathematik 6. öbv&hpt, Wien.
- [33] REICHEL, Hans-Christian, Robert MÜLLER, Günter HANISCH und Josef LAUB (1992²): Lehrbuch der Mathematik 7. öbv&hpt, Wien.
- [34] REICHEL, Hans-Christian, Robert MÜLLER und Günter HANISCH (1993²): Lehrbuch der Mathematik 8. öbv&hpt, Wien.
- [35] REICHEL, Hans-Christian und Robert RESEL (2002): Der Beitrag der Mathematik und des Mathematikunterrichts zur Persönlichkeitsbildung. In: ÖMG Didaktik-Reihe (34), S. 85-100.
- [36] RESEL, Robert (1999): Ausbaumöglichkeiten der Oberstufen-Schulmathematik. Diplomarbeit, Universität Wien.
- [37] RESEL, Robert (2001): Didaktisch-methodische Überlegungen zu ausgewählten Kapiteln des Geometrieunterrichts der AHS-Oberstufe. Dissertation, Universität Wien.
- [38] RESEL, Robert (2014): Reise zum Mittelpunkt der Mathematik. Logos, Berlin.
- [39] RESEL, Robert (2014): In 101 Abschnitten um die mathematische Welt. Logos, Berlin.
- [40] RICHTER-GEBERT, Jürgen und Thorsten ORENDT (2009): Geometriekalküle. Springer, New York/Berlin/Heidelberg.
- [41] ROMAN, Tiberiu (1987): Reguläre und halbrekuläre Polyeder. Harri Deutsch, Thun/Frankfurt.
- [42] SCHARK, Rainer (1992): Konstanten in der Mathematik - variabel betrachtet. Harri Deutsch, Frankfurt.
- [43] SCHEID, Harald (1994²): Zahlentheorie. BI-Verlag, Mannheim.
- [44] SCHEID, Harald (1997): Folgen und Funktionen. Spektrum, Heidelberg.
- [45] SCHUPP, Hans und Heinz DABROCK (1995): Höhere Kurven. BI-Verlag, Mannheim.

- [46] SONAR, Thomas (1999): Einführung in die Analysis. Vieweg, Braunschweig.
- [47] STILLWELL, John (2002): Mathematics and its history. Springer, Berlin.
- [48] WANNER, Gerhard (2004): Elementare Beweise des Satzes von Morley. In: Elemente der Mathematik, Band 59, Nr. 4 (S.144-150). Birkhäuser, Basel.