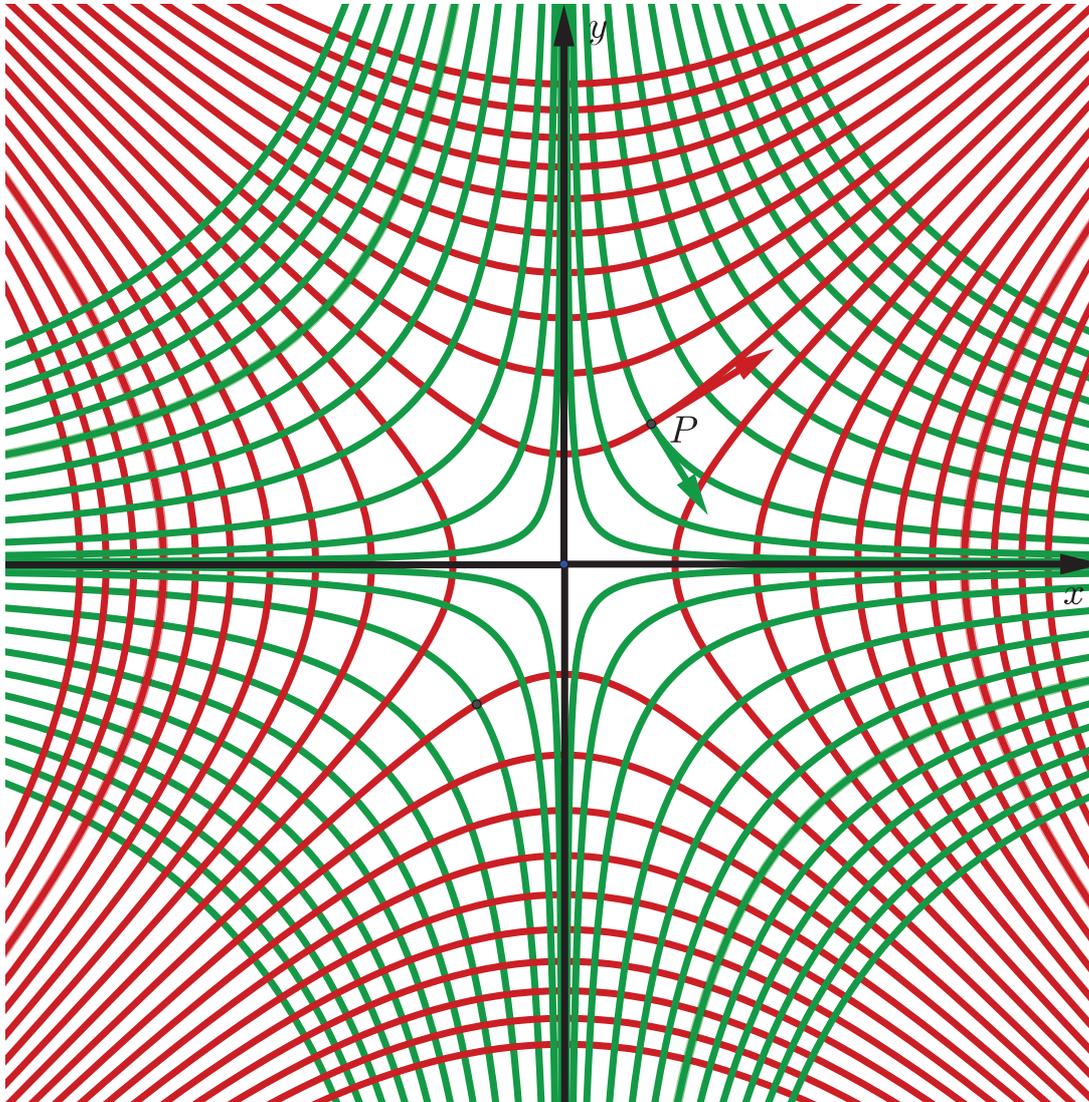


Robert Resel

20000 Normalvektoren (unter) der Sphäre



Logos Verlag, 2015/16

0

.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Algebra	7
2.1	Summenformeln	7
2.1.1	Quadratsummen	7
2.1.2	Kubensummen	8
2.1.3	Nochmals Quadratsummen (oder Kubensummen?)	9
2.1.4	Erneut Quadratsummen - ein weiterer Versuch	11
2.1.5	Kubensummen (nochmals) mittels Quadratsummen	12
2.1.6	Biquadratsummen	14
2.1.7	Aufgaben	15
2.1.8	Ein Exkurs in die Analysis: Negative Exponenten	15
2.2	\mathbb{H} : Die Quaternionen	23
2.2.1	Genese von \mathbb{H}	23
2.2.2	Die Gleichung $X^2 = -1$ in \mathbb{H}	26
2.2.3	Drehungen im \mathbb{R}^3 mittels vektorieller Quaternionen	28
2.2.4	Konstruktion der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$ via \mathbb{H} bzw. $\mathfrak{S}(\mathbb{H})$	30
2.2.5	Anwendung von \mathbb{H} in der Vektoralgebra	35
2.2.6	Parallelen zu bzw. Erweiterungen gegenüber \mathbb{C}	38
2.2.7	Ausblick	42
2.3	Schmankerln aus der Linearen Algebra: Matrizen und lineare Abbildungen	44
2.3.1	Spuren, Determinanten, Satz von CAYLEY-HAMILTON	44
2.3.2	Matrizeninversion	45
2.3.3	Eigenwerte und Eigenvektoren	47
2.3.4	Geometrische Bedeutung der Determinante von Matrizen aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$	56
2.4	Zum arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel	58
2.5	GALOIS-Theorie: Ein genetischer Weg	61
2.5.1	Propädeutik: Quadratische Gleichungen	61
2.5.2	Diskriminanten	70
3	Geometrie	89
3.1	Mathematik und Fußball	89
3.2	Der Satz von MORLEY	91
3.3	Nachtrag zum skalaren Produkt und zur Determinante	93
3.4	Nachtrag zum vektoriellen Produkt	100
3.5	Regelflächen	101
3.6	Kreis	104
3.6.1	Kreisgleichungen	104
3.6.2	Kreistangenten	108
3.6.3	Polarentheorie beim Kreis	109
3.6.4	Schnitt zweier Kreise	114
3.6.5	Inversion am Kreis	118
3.7	Die Ellipse als affines Kreisbild	127
3.7.1	Die Konstruktion von LA HIRE	127
3.7.2	Orthogonale Stauchungen und Streckungen (ÖS“)	128

3.7.3	Ellipsentangenten und -polaren via OS	128
3.7.4	Die Ellipse in allgemeiner Lage	131
3.8	Eine kurze Bemerkung zum Sinussatz	133
3.9	... sowie zum ersten Summensatz des (Co-)Sinus	134
4	Analysis	136
4.1	Die Sektorformel für Kurven in Parameterdarstellung	136
4.2	Die DESCARTESsche Kreismethode	141
4.2.1	Ableitung von Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten mittels DESCARTESscher Kreismethode	141
4.2.2	Äquivalenz der DESCARTESschen Kreismethode und des klassischen Differentialquotienten	142
4.2.3	Eine Anwendung der DESCARTESschen Kreismethode	142
4.3	Rektifikation von Kurvenbögen	144
4.4	Krümmung(skreise) ebener Kurven und Evoluten	147
4.5	KEPLERS Fassregel als Schmankerl zur numerischen Integration	161
4.6	Zur EULERSchen Formel	168
4.7	Zur Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion	173
4.8	(Wie die EULERSche Zahl in die) Hyperbelfunktionen (kommt)	174
4.9	Kurvenscharen und Enveloppen	184
4.9.1	Differentialgeometrische Grundlagen (Enveloppensatz)	184
4.9.2	Erste Anwendung: Die Astroide	185
4.9.3	Zweite Anwendung: Die Kardioide	194
4.9.4	Dritte Anwendung: Scharen von Graphen von Polynomfunktionen	201
4.9.5	Vierte Anwendung: Scharen von Graphen rationaler Funktionen (inkl. Ortskurven)	203
4.9.6	Anhang zum Enveloppensatz: Parameterdarstellung von Einhüllenden	210
5	Provisorischer Anhang nur bis Fertigstellung	231
6	Zusätzlich:	232
6.1	Leer	232
6.2	Umfangreiche Übungsaufgabe zu Abschnitt 2.3.3	233
6.3	Dreiecksschwerpunkt und Differenzgleichungen	239
6.4	Eine kinematische Erzeugung der Hyperbel aus der Ellipse	242
6.5	Mehr über Diskriminanten	246
6.6	Doppelt-stochastische Matrizen	250
6.7	Ergänzung zur Lemniskate	252

2 Algebra

2.1 Summenformeln

2.1.1 Quadratsummen

Im Gegensatz zur GAUSSschen Summe

$$s := \sum_{k=1}^n k,$$

bei welcher (wie es der kleine GAUSS ja der Anekdote nach bereits im zarten Alter von acht Jahren vollzog, vgl. etwa [27]) der Trick

$$\begin{array}{cccccccccccc} s & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\ s & = & n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

der Addition der beiden entgegengesetzt orientierten aber doch identen Zeilen wegen

$$2s = n \cdot (n + 1)$$

mit

$$s = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

zum Ziel führt, geht diese Rechnung bereits bei der Quadratsumme

$$s_n := 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

nicht mehr auf, weshalb andere raffinierte Einfälle benötigt werden, wie etwa die etwas ungewöhnliche Formel

$$2 \cdot (a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2,$$

welche folgenden Nutzen bringt:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot (0^2 + 1^2) = 1^2 + 1^2 \\ 2 \cdot (1^2 + 2^2) = 1^2 + 3^2 \\ 2 \cdot (2^2 + 3^2) = 1^2 + 5^2 \\ \dots \\ 2 \cdot [(n-1)^2 + n^2] = 1^2 + (2n-1)^2 \end{array} \right\} +$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (2 \cdot s_n - n^2) = n + s_{2n} - 4 \cdot s_n \quad \text{bzw.} \quad \boxed{8 \cdot s_n - s_{2n} = 2n^2 + n} \quad (\text{"Rekursion"})$$

Mit dem Ansatz

$$s_n := \sum_{k=1}^m a_k \cdot n^k$$

ergibt sich

$$8 \cdot s_n - s_{2n} = \sum_{k=1}^m a_k \cdot (8 - 2^k) \cdot n^k = 2n^2 + n,$$

woraus

$$a_k \equiv 0 \quad \forall k > 3 \quad (\text{"Grad-Analyse"})$$

folgt, was in weiterer Folge

$$s_n = a_3 \cdot n^3 + a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n + a_0$$

sowie

$$8 \cdot s_n - s_{2n} = 8a_3 \cdot n^3 + 8a_2 \cdot n^2 + 8a_1 \cdot n + 8a_0 - [a_3 \cdot (2n)^3 + a_2 \cdot (2n)^2 + a_1 \cdot 2n + a_0] = 2n^2 + n$$

resp.

$$4a_2 \cdot n^2 + 6a_1 \cdot n + 7a_0 = 2n^2 + n \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{6}, \quad a_0 = 0$$

impliziert.

Aus

$$s_1 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = a_3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{3}$$

erhalten wir schließlich

$$\Rightarrow \quad s_n = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n = \frac{n}{6} \cdot (2n^2 + 3n + 1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Ergänzend sei noch auf folgende weitere Varianten einer Herleitung (und nicht einem bloßen Beweis durch vollständige Induktion) dieser schönen Formel hingewiesen:

- In [38], S. 238f wird mit derselben ungewöhnlichen Formel wie hier gearbeitet, wobei aber nicht derart in die Tiefe gegangen wird als hier (keine Rekursion, keine Gradanalyse)
- In [50], S. 78 wird äußerst raffiniert mit Kubensummen gearbeitet und dann ein Zusammenhang zu s_n hergestellt, was dort zwecks Berechnung einer RIEMANNschen Summe erfolgt.
- In [54], S. 178f wird s_n durch eine originelle Mischung aus elementarer Algebra und Zahlentheorie quasi als Nebenprodukt abgeworfen.
- In [60], S. 15 wird s_n geometrisch interpretiert und durch eine äußerst schlaue Anordnung von Rechtecken und Quadraten auf sich selbst zurückgeführt.

2.1.2 Kubensummen

Bilden wir ausgehend von der Formel

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \quad (*)$$

nun die Summe

$$S := \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6},$$

so ergibt dies einerseits

$$\begin{aligned}
 S &= 1^2 \\
 &\quad +1^2 +2^2 \\
 &\quad +1^2 +2^2 +3^2 \\
 &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 &\quad +1^2 +2^2 +3^2 +4^2 +\dots +n^2
 \end{aligned}$$

und andererseits

$$S = \frac{1}{6} \cdot \left(\sum_{k=1}^n 2k^3 + \sum_{k=1}^n 3k^2 + \sum_{k=1}^n k \right),$$

ergo wegen (*) sowie der berühmten GAUSSschen Formel (vgl. etwa [54], S. 178f!)

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

in weiterer Folge

$$n + (n-1) \cdot 2^2 + (n-2) \cdot 3^2 + \dots + [n - (n-1)] \cdot n^2 = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^n k^3 + \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{12} + \frac{n \cdot (n+1)}{12}$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^n (n-k+1) \cdot k^2 = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^n k^3 + \frac{n \cdot (n+1)}{12} \cdot (2n+1+1)$$

resp.

$$(n+1) \cdot \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^n k^3 + \frac{n \cdot (n+1)^2}{6}$$

und somit

$$\frac{n \cdot (n+1)^2 \cdot (2n+1)}{6} - \frac{n \cdot (n+1)^2}{6} = \frac{4}{3} \cdot \sum_{k=1}^n k^3,$$

also

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{n \cdot (n+1)^2}{6} \cdot (2n+1-1)$$

und schließlich

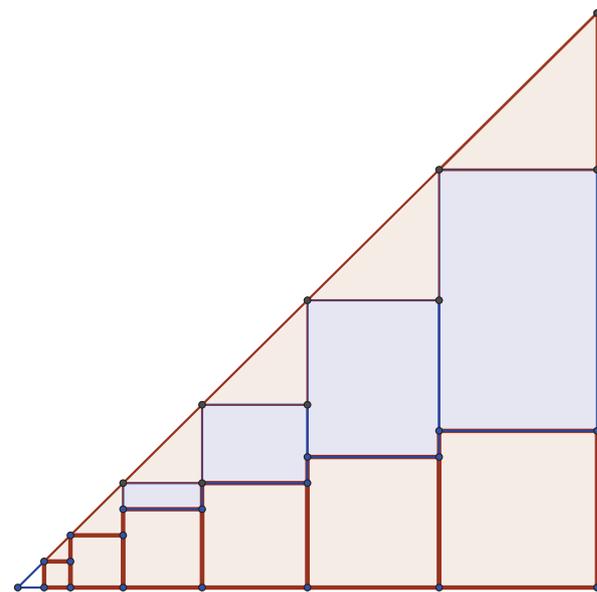
$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \left[= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 \right].$$

2.1.3 Nochmals Quadratsummen (oder Kubensummen?)

Bezugnehmend auf den letzten Literaturhinweis am Ende von Abschnitt 2.1.1 wollen wir nun hier ebenso durch eine (freilich andere) geometrische Interpretation (als in besagtem Literaturzitat) von

$$s_n = \sum_{k=1}^n k^2$$

versuchen¹, für s_n einen geschlossenen Ausdruck zu ermitteln, wozu wir die untere Abbildung betrachten, welche für $n = 6$ bereits sehr gut suggeriert, wie der allgemeine Fall zu behandeln ist, was wir nun genau analysieren wollen:



nicht direkt ablesbaren senkrechten Rechteckseitenlängen der Reihe nach

$$1 + 1 + 2 - 3 = 1, \quad 1 + 1 + 2 + 3 - 4 = 3,$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + 4 - 5 = 6, \quad 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 6 = 10,$$

$$1 + 1 + 2 + 3 + \dots + k - 1 - k = 1 + 2 + 3 + \dots + k - 2,$$

ergo aufgrund der GAUSSschen Formel aus Abschnitt 2.1.1

$$\frac{(k-2)(k-1)}{2} \quad \text{für } k = 3, 4, 5, \dots, n$$

ergibt. Daraus folgt für die Summe $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ der Flächeninhalte aller gefärbten Gebiete einerseits

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

und andererseits

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \frac{1}{2} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \sum_{k=3}^n k \cdot \frac{(k-2)(k-1)}{2}$$

bzw.²

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \frac{3}{2} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{(k-2)(k-1)}{2}$$

was durch weiteres Umformen sowie erneuter Verwendung der GAUSSschen Formel

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)^2}{8} = \frac{3}{2} \cdot s_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n (k^3 - 3k^2 + 2k)$$

¹Der merkwürdige Abschnittstitel deutet schon an, dass ein erfolgreicher Ausgang unserer im Folgenden angestellten Bemühungen alles andere als gewiss ist ...

²weil ja der Wert des Terms $k \cdot \frac{(k-2)(k-1)}{2}$ für $k = 1$ und $k = 2$ ohnehin 0 ergibt

bzw.

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)^2}{8} = \frac{3}{2} \cdot s_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n k^3 - \frac{3}{2} \cdot \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$$

resp.

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)^2}{8} = \frac{3}{2} \cdot s_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n k^3 - \frac{3}{2} \cdot s_n + \frac{n(n+1)}{2}$$

impliziert, womit also sowohl die GAUSSsche Summe (was nicht weiter schlimm ist) als auch die Quadratsumme (was schon schlimm ist, weil wir ja gerade dafür einen geschlossenen Ausdruck herleiten wollen) rausfällt, woran sich ein merkwürdiges mathematisches Phänomen manifestiert: Im Zuge der Berechnung einer Größe über eine für sie aufgestellte Gleichung fällt ebenjene Größe raus und man erhält stattdessen eine Gleichung für eine andere Größe, in unserem konkreten Fall eine Kubensumme (anstelle der eigentlich von uns begehrten Quadratsumme, womit sich nun der Kreis zum merkwürdig anmutenden Abschnittsittel schließt), was uns zu

$$\frac{n^2(n+1)^2}{8} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n k^3$$

und somit zur Summenformel

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

resp. (in vollendeter Form)

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$$

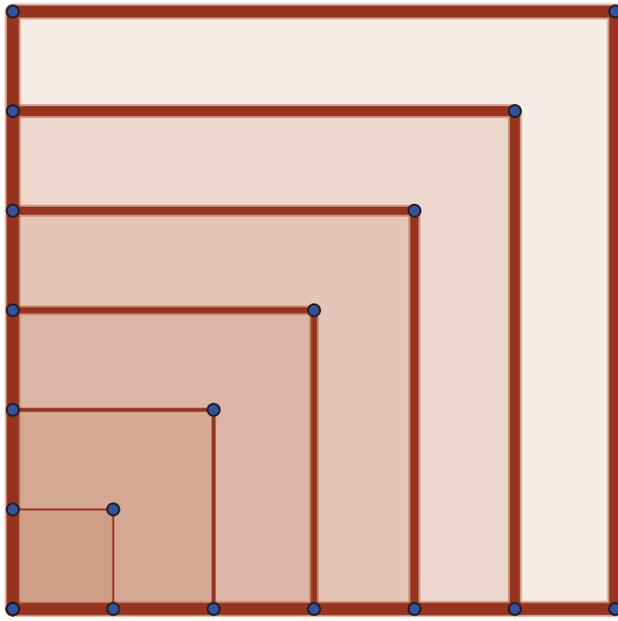
führt.

2.1.4 Erneut Quadratsummen - ein weiterer Versuch

Nachdem unsere Bemühungen einer geometrischen Herleitung eines geschlossenen Ausdrucks für die Quadratsumme

$$s_n := \sum_{k=1}^n k^2$$

im letzten Abschnitt streng genommen gescheitert ist (wiewohl wir stattdessen gar eine Summenformel für die Kubensumme $t_n := \sum_{k=1}^n k^3$ gewonnen haben), nehmen wir einen zweiten Anlauf, indem wir die folgende Abbildung betrachten:



Da die n Quadrate mit den Seitenlängen $1, 2, 3, \dots, n$ nicht paarweise disjunkt sind, ergibt die Summe

$$s_n := \sum_{k=1}^n k^2$$

der Flächeninhalte aller n Quadrate (in der Abbildung für $n = 6$ illustriert) somit (indem man die Flächeninhalte der $n - 1$ großen Ls je nach Parität zählt)

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n + 2 \cdot \alpha$$

mit

$$\alpha := -1 + 2 \cdot (n - 2) + 3 \cdot (n - 3) + \dots + (n - 1) \cdot [n - (n - 1)] \{+n \cdot (n - n)\}$$

bzw. unter Anwendung der GAUSSschen Formel

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} + 2 \sum_{k=1}^n k(n-k)$$

resp.

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} + 2n \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^n k^2,$$

ergo

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} + n^2(n+1) - 2s_n$$

$$\Rightarrow 3s_n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (1+2n) \Rightarrow s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \square.$$

2.1.5 Kubensummen (nochmals) mittels Quadratsummen

Blicken wir zunächst kurz auf die ersten vier Abschnitte zurück: Nachdem wir in 2.1.1 konstatiert haben, dass die Berechnung von

$$s_n := \sum_{k=1}^n k^2$$

nicht mit der gleichen Grundidee wie bei

$$\sum_{k=1}^n k$$

durch überkreuztes Addieren der verdoppelten Summe (arrangiert durch umgekehrte Anordnung der Summanden) funktioniert, haben wir uns etwas anderes einfallen lassen, darauf aufbauend in 2.1.2

$$t_n := \sum_{k=1}^n k^3$$

berechnet und schließlich sowohl in 2.1.3 und 2.1.4 weitere Versuche zur alternativen Berechnung von s_n unternommen, was einmal geglückt ist (2.1.4) und ein anderes Mal (2.1.3) nicht, jedoch überraschenderweise einen weiteren Weg zur Berechnung von t_n eröffnete.

Jetzt wollen wir in diesem Abschnitt *bewusst* auf eine nunmehr dritte Art und Weise t_n berechnen, und zwar mit der selben Grundidee wie bei

$$\sum_{k=1}^n k :$$

$$\begin{aligned} t_n &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3 \\ t_n &= n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + \dots + 3^3 + 2^3 + 1^3 \end{aligned}$$

Unter Anwendung der Identität

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

führt dies auf

$$2t_n = (n+1) \cdot \begin{bmatrix} 1^2 & -1 \cdot n & +n^2 \\ +2^2 & -2 \cdot (n-1) & +(n-1)^2 \\ +3^2 & -3 \cdot (n-2) & +(n-2)^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ +n^2 & -n \cdot \underbrace{[n - (n-1)]}_{=n-n+1=1} & +1^2 \end{bmatrix},$$

ergo

$$2t_n = (n+1) \cdot \left[2s_n - \sum_{k=1}^n k(n-k+1) \right]$$

bzw. vereinfacht auf

$$2t_n = (n+1) \cdot \left[2s_n - n \cdot \sum_{k=1}^n k + \underbrace{\sum_{k=1}^n k^2}_{s_n} - \sum_{k=1}^n k \right]$$

resp.

$$2t_n = (n+1) \cdot \left[3s_n - (n+1) \cdot \sum_{k=1}^n k \right].$$

Anwendung der bereits in 2.1.1 erhaltenen Resultate

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

liefert schließlich

$$2t_n = (n+1) \cdot \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)^2}{2} \right]$$

bzw.

$$2t_n = (n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot (2n+1 - n - 1),$$

ergo

$$t_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

resp. (in vollendeter Form)

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2, \quad \square.$$

Ergänzend sei noch auf folgende weitere Varianten einer Herleitung (und nicht einem bloßen Beweis durch vollständige Induktion) dieser schönen Formel hingewiesen:

- In [11], S. 6f wird durch Anordnungen von Punkten in einem Quadrat in einem Aufwasch sowohl $\sum_{k=1}^n k$ als auch $\sum_{k=1}^n k^3$ durch geschicktes Betrachten und Kombinieren quasi auf dem Silbertablett serviert, und dies mit gehöriger Raffinesse!
- In [13], S. 45 wird t_n durch sukzessives Addieren ungerader Zahlen erzeugt, was via $\frac{n(n+1)}{2}$ auf eine interessante iterierte Form der Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen (beginnend mit 1) führt und überdies einen schönen (absicherenden) Induktionsbeweis andeutet.
- In [61], S. 73 wird t_n unter Verwendung eines quadratischen Schemas durch zweifache Art der Summierung aller Eintragungen dieses Schemas ermittelt. Ferner schließen sich dieser eleganten Variante zur Berechnung von t_n zwei ebenso interessante Übungsaufgaben (vgl. [61], S. 75) an, welche einmal in ebenso geometrischer Weise wie zuvor beim quadratischen Schema und ein anderes Mal durch eine ähnliche Idee wie eben zuvor in diesem Abschnitt demonstriert mit entsprechenden Hinweisen versehen auf die Berechnung von t_n hinführen.

2.1.6 Biquadratsummen

Der wertel $\ddot{\circ}$ ser möge nun analog zu Abschnitt 2.1.2 durch zweierlei Berechnung der Summe

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4}$$

die Formel

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)}{30}$$

herleiten.

also wegen

$$\overline{MS} = r$$

tatsächlich (*) folgt, \square .

BEMERKUNG 2. Somit werden also alle⁷⁴ Punkte der offenen Kreisscheibe auf Punkte außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe (und umgekehrt) abgebildet, nur die Punkte auf k sind allesamt Fixpunkte.

Da es sich nur um einen Ausblick handelt, wollen wir uns im Folgenden nur der Beantwortung isolierter (aber überaus interessanter) Fragestellungen widmen, nämlich wie man Geraden, Kreise und gleichseitige Hyperbeln einer Kreisinverson unterwirft, wozu wir die Inversionsabbildung naheliegenderweise für $k[(0|0); r]$ analytisch studieren wollen, was aufgrund des Ansatzes

$$P' = k \cdot (x|y) \quad \text{für } P(x|y)$$

wegen (*) unmittelbar auf

$$k \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = r^2 \quad \text{bzw.} \quad k = \frac{r^2}{x^2 + y^2}$$

führt, womit sich via

$$\kappa : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \kappa \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} \\ \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \quad (**)$$

die Inversionsabbildung κ als **nicht-lineare Abbildung** herausstellt.

Wollen wir nun das Bild der Geraden g mit der Gleichung $g : y = kx + d$ unter κ beschreiben, so bietet sich via

$$g : X(t) = \begin{pmatrix} t \\ kt + d \end{pmatrix} \quad (\#)$$

die Verwendung einer Parameterdarstellung von g an, da Einsetzen von (#) in (**) für die Bildkurve k_g zunächst auf die Parameterdarstellung

$$k_g : X(t) = \begin{pmatrix} \frac{r^2 t}{t^2 + (kt+d)^2} \\ \frac{r^2 (kt+d)}{t^2 + (kt+d)^2} \end{pmatrix} \quad (\#\#)$$

führt, woraus wir in weiterer Folge auf

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{kt+d}{t} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y}{x} = k + \frac{d}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{t} = \frac{y - kx}{x} \\ \Rightarrow \quad t &= \frac{dx}{y - kx} \quad \Rightarrow \quad kt + d = \frac{kdx + dy - kdx}{y - kx} = \frac{dy}{y - kx} \end{aligned}$$

⁷⁴Eine Aunsnahmestellung nimmt M ein, worauf in Bemerkung 3 noch mehr oder minder detailliert eingegangen wird.

stoßen, was in die erste Zeile von (##) eingesetzt (Der werte L \ddot{o} ser führe die folgenden Schritte alternativ durch Einsetzen in die zweite Zeile von (##) durch!) auf

$$x = \frac{\frac{dr^2x}{y-kx}}{\left(\frac{dx}{y-kx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{y-kx}\right)^2}$$

bzw.

$$\frac{d^2}{(y-kx)^2} \cdot (x^2 + y^2) = \frac{dr^2}{y-kx}$$

resp.

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{d} \cdot (y - kx),$$

also wegen der äquivalenten Darstellung

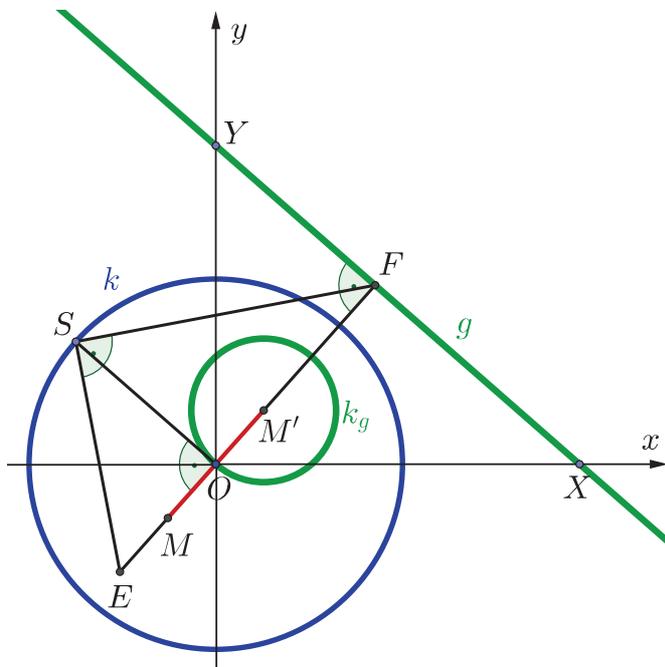
$$\left(x + \frac{kr^2}{2d}\right)^2 + \left(y - \frac{r^2}{2d}\right)^2 = \frac{r^4 \cdot (1+k^2)}{4d^2}$$

auf die Kreislinie

$$k_g \left[\left(-\frac{kr^2}{2d} \mid \frac{r^2}{2d} \right); \frac{r^2 \cdot \sqrt{1+k^2}}{2|d|} \right]$$

führt.

Dieses Resultat lässt sich nun sehr gut geometrisch verwerten, wozu wir folgende Abbildung betrachten:



Für die Kathetenlängen \overline{OX} und \overline{OY} jenes rechtwinkligen Dreiecks, welches die Gerade g mit der Gleichung $g : y = kx + d$ mit den Koordinatenachsen begrenzt, folgt wegen $X\left(\frac{-d}{k} \mid 0\right)$ sowie $Y(0 \mid d)$ unmittelbar $\overline{OX} = \left|\frac{d}{k}\right|$ sowie $\overline{OY} = |d|$. Für die Hypotenusenlänge \overline{XY} ergibt sich dann aufgrund des Lehrsatzes von PYTHAGORAS

$$\overline{XY}^2 = \frac{d^2}{k^2} + d^2 = \frac{d^2}{k^2} \cdot (k^2 + 1),$$

was für die Höhe $h = \overline{OF}$ auf die Hypotenuse wegen

$$\overline{XY} \cdot h = \overline{OX} \cdot \overline{OY}$$

auf

$$h = \frac{\frac{d^2}{k}}{\frac{d}{k} \cdot \sqrt{k^2 + 1}} \quad \text{bzw. vereinfacht} \quad h = \frac{|d|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

führt und für den Radius ρ bzw. den Durchmesser 2ρ von k_g somit die Darstellung

$$\rho = \frac{r^2}{2h} \quad \text{bzw.} \quad 2\rho = \frac{r^2}{h} \quad \text{resp.} \quad r^2 = 2\rho \cdot h$$

zur Folge hat, welche in der letzten Fassung die Anwendung des Höhensatzes möglich macht (siehe Abbildung), woraus wir mit der Streckenlänge \overline{MO} bereits den Radius ρ des Bildkreises k_g der Geraden g erhalten.

Da der Mittelpunkt von k_g ferner auf der Gerade ℓ mit der Gleichung $\ell : x + ky = 0$ bzw. $\ell : y = \frac{-1}{k} \cdot x$ liegt, welche wegen $\frac{-1}{k} \cdot k = -1$ außerdem auf g normal steht (vgl. dazu etwa [54], S. 16) und auch durch O verläuft, ergibt sich unter zusätzlicher Berücksichtigung der Tatsache, dass k_g durch O verläuft, der Mittelpunkt M' von k_g daher durch Spiegelung von M an O , womit die in der Abbildung illustrierte Konstruktion bewiesen ist, \square .

Dass wir aus (dem Beweis) dieser Konstruktion noch weitere Erkenntnisse gewinnen können, gewährleistet schon einmal der Normalabstand h von g zu O , welcher sich aufgrund der im Beweis gewonnenen Darstellung

$$h = \frac{|d|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

leicht erkennbar auch im Radius ρ des Bildkreises k_g von g unter κ auftaucht, was zu

$$\rho = \frac{r^2}{2h} \quad (\sim)$$

führt.

Daran lässt sich erkennen, dass k_g für den Fall $h = r$ (d.h. g ist Tangente an k) den Radius $\rho = \frac{r}{2}$ und somit den Durchmesser r aufweist, weshalb k_g als durch O gehende Kreislinie diesfalls k von innen berührt, und zwar im Berührungspunkt von g und k .

ÜBUNGSAUFGABE 1 FÜR DEN WERTEN LESER. Man leite (\sim) elementargeometrisch aus der Abbildung zur Konstruktion von k_g aus g und k ab!

BEMERKUNG 3. Jetzt sei auf eine dem einen oder anderen L^eöser womöglich schon aufgefallene Problematik aufmerksam gemacht, nämlich die Rolle von M , da $M(0|0)$ gemäß (**) nicht als Bildpunkt auftauchen kann, da dies wegen

$$\frac{r^2 x}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \kappa \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf einen Widerspruch führt, der sich erst im Rahmen der **Projektiven Geometrie**⁷⁵ durch Einführung von Fernelementen⁷⁶ auflöst, wo sich dann zeigen lässt, dass die Ferngerade (vgl. letzte Fußnote!) der Trägerebene von k unter κ auf M abgebildet wird (sozusagen ein Nullkreis, der sich als Inversion eines Kreises mit unendlich großem Radius

⁷⁵Hierzu sei ausdrücklich [33] empfohlen!

⁷⁶Hierbei wird (kurz und bündig hier nur angedeutet) jeder Schar paralleler Geraden ein (unendlich ferner) Schnittpunkt zugeordnet, wodurch dann je zwei (freilich voneinander verschiedene) Geraden immer einen Schnittpunkt besitzen (ungeachtet dessen, ob sie nun zueinander parallel verlaufen oder nicht). Die Menge aller Fernpunkte bildet dann die sogenannte Ferngerade der **projektiven Ebene**.

(i.e. die Ferngerade) ergibt), was auch erklärt, warum die Bildkreise aller Geraden durch O verlaufen (eben weil O der Bildpunkt des entsprechenden Fernpunkts ist).

BEMERKUNG 4 / ÜBUNGSAUFGABE 2 FÜR DEN WERTEN LESER. κ besitzt eine interessante Eigenschaft: Bildet man $\kappa^2(P) := \kappa(\kappa(P))$, so wird man wieder zu P zurückgeführt, was man als **involutorische Eigenschaft** bezeichnet.

Der werte $L \overset{e}{\underset{\circ}{}}$ ser möge dies sowohl elementar als auch unter Verwendung von (**) beweisen!

BEMERKUNG 5 / ÜBUNGSAUFGABE 3 FÜR DEN WERTEN LESER. Eine weitere interessante Eigenschaft von κ besteht darin, dass die Bildkreise zueinander paralleler Geraden einander berühren.

Der werte $L \overset{e}{\underset{\circ}{}}$ ser möge dies beweisen und auch angeben, wo diese Berührung stattfindet.

BEMERKUNG 6 / ÜBUNGSAUFGABE 4 FÜR DEN WERTEN LESER. Eine abschließende interessante Eigenschaft von κ ist jene, dass die Bildkreise zueinander orthogonaler Geraden einander auch orthogonal schneiden, was der werte $L \overset{e}{\underset{\circ}{}}$ ser mit dem Hinweis der Konzentration auf die Mittelpunktskoordinaten der Bildkreise (und wie schon zuvor der Ausnutzung von $k \cdot \frac{-1}{k} = -1$) beweisen möge.

BEMERKUNG 7. Um das Bild der Kreislinie $c[M(u|v); R]$ unter κ zu studieren, nutzen wir die involutorische Eigenschaft von κ aus, aufgrund derer in der Kreisgleichung

$$c : (x - u)^2 + (y - v)^2 = R^2$$

nur

$$x \text{ bzw. } y \text{ durch } \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} \text{ bzw. } \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}$$

ersetzt zu werden braucht, um zum Bild von c unter κ zu gelangen.⁷⁷

$$k_c : \left(\frac{r^2 x}{x^2 + y^2} - u \right)^2 + \left(\frac{r^2 y}{x^2 + y^2} - v \right)^2 = R^2$$

Umformen liefert

$$k_c : [r^2 x - u \cdot (x^2 + y^2)]^2 + [r^2 y - v \cdot (x^2 + y^2)]^2 = R^2 \cdot (x^2 + y^2)$$

bzw.

$$k_c : r^4 \cdot (x^2 + y^2) - 2r^2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot (ux + vy) + (u^2 + v^2) \cdot (x^2 + y^2)^2 = R^2 \cdot (x^2 + y^2)^2$$

resp.

$$k_c : (u^2 + v^2 - R^2) \cdot (x^2 + y^2) + r^4 - 2r^2 \cdot (ux + vy) = 0.$$

⁷⁷Man beachte, dass man ansonsten die Umkehrabbildung (welche aber im Fall von κ wegen ihrer involutorischen Eigenschaft κ selbst ist) studieren müsste, da jeder Punkt der Bildkurve c_k erst in seinem Urbild die Gleichung der Urbildkurve erfüllt (außer man verwendet - wie wir zuvor - eine Parameterdarstellung).

Gilt nun

$$u^2 + v^2 - R^2 = 0,$$

so liegt O auf c und k_c beschreibt aufgrund der wegfallenden Quadrate in x und y eine Gerade.⁷⁸

Andernfalls kann man die letzte Version einer Gleichung von k_c durch $u^2 + v^2 - R^2$ dividieren, was auf

$$k_c : x^2 + y^2 - \frac{2r^2}{u^2 + v^2 - R^2} \cdot (ux + vy) + \frac{r^4}{u^2 + v^2 - R^2} = 0$$

bzw. auf vollständige Quadrate ergänzt auf

$$k_c : \left(x - \frac{r^2 \cdot u}{u^2 + v^2 - R^2} \right)^2 + \left(y - \frac{r^2 \cdot v}{u^2 + v^2 - R^2} \right)^2 = \frac{r^4 \cdot (-u^2 - v^2 + R^2 + u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2 - R^2)^2},$$

also die Kreislinie

$$k_c \left[\left(\frac{r^2 \cdot u}{u^2 + v^2 - R^2} \mid \frac{r^2 \cdot v}{u^2 + v^2 - R^2} \right); \left| \frac{r^2 \cdot R}{u^2 + v^2 - R^2} \right| \right]$$

als Bild von c unter κ , wobei c demnach unter der Bedingung

$$r^2 = u^2 + v^2 - R^2 \Leftrightarrow u^2 + v^2 = r^2 + R^2 \quad (\sim\sim)$$

auf sich selbst (wenngleich auch nicht punktweise, wie der Werte $L \overset{e}{\underset{o}{\circ}}$ ser begründen möge) abgebildet wird.

ÜBUNGSAUFGABE 5 FÜR DEN WERTEN LESER. Man begründe, dass $(\sim\sim)$ zu $k \perp c$ äquivalent ist (wobei $k \perp c$ bedeutet, dass die Tangenten an k und c in deren Schnittpunkten aufeinander normal stehen)!

Um das Bild der gleichseitigen Hyperbel (d.h. in $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ - vgl. Abschnitt 3.7.5 - gilt $a = b$, weshalb die beiden Medianen die Asymptoten sind) hyp mit der Gleichung

$$\text{hyp: } x^2 - y^2 = r^2$$

bei der Inversion am Kreis k mit der Gleichung

$$k : x^2 + y^2 = r^2$$

zu ermitteln, gehen wir wie zuvor bei der Kreisabbildung vor und erhalten mit

$$\ell : \frac{r^4 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{r^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = r^2$$

⁷⁸Der Werte $L \overset{e}{\underset{o}{\circ}}$ ser möge diesbezüglich als Übung nachweisen, dass es sich dabei um die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{-u}{v} \cdot x + \frac{r^2}{2v}$ handelt, deren (Ur-)Bild in Übereinstimmung mit unseren vorherigen Überlegungen der entsprechende Kreis durch O ist.

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = r^2 \cdot (x^2 - y^2), \quad \square$$

BEMERKUNG 8. Die hinter Bemerkung 6 steckende Eigenschaft von κ gilt in einem noch viel umfassenderen Ausmaß, da die Kreisinvolutionen zu den sogenannten **konformen Abbildungen**⁷⁹ zählen, welche sich durch ihre **Winkeltreue** auszeichnen. Dies bedeutet, dass der Schnittwinkel zweier Kurven k_1 und k_2 mit den Parameterdarstellungen

$$k_1 : X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k_2 : X(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

in ihrem Schnittpunkt S

– wo freilich $x_1(t) = x_2(t) \wedge y_1(t) = y_2(t)$ ($\sim\sim\sim$) gilt –

dem Schnittwinkel der Bildkurven von k_1 und k_2 im Bildpunkt von S (jeweils unter der Inversion κ) gleicht, was wir nun beweisen werden.

Dazu wenden wir zunächst (***) auf k_1 und k_2 an und erhalten für die Bildkurven k_1' und k_2' die Darstellungen

$$k_1' : X(t) = \begin{pmatrix} \frac{r^2 \cdot x_1(t)}{x_1^2(t) + y_1^2(t)} \\ \frac{r^2 \cdot y_1(t)}{x_1^2(t) + y_1^2(t)} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k_2' : X(t) = \begin{pmatrix} \frac{r^2 \cdot x_2(t)}{x_2^2(t) + y_2^2(t)} \\ \frac{r^2 \cdot y_2(t)}{x_2^2(t) + y_2^2(t)} \end{pmatrix}.$$

Für die Tangentialvektoren von k_1 und k_2 ergibt sich

$$k_1 : X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k_2 : X'(t) = \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix},$$

für jene von k_1' und k_2' durch Anwendung der Quotientenregel

$$k_1' : X'(t) = r^2 \begin{pmatrix} \frac{x_1'(t) \cdot (x_1^2(t) + y_1^2(t)) - 2x_1(t) \cdot (x_1(t)x_1'(t) + y_1(t)y_1'(t))}{(x_1^2(t) + y_1^2(t))^2} \\ \frac{y_1'(t) \cdot (x_1^2(t) + y_1^2(t)) - 2y_1(t) \cdot (x_1(t)x_1'(t) + y_1(t)y_1'(t))}{(x_1^2(t) + y_1^2(t))^2} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$k_1' : X'(t) \parallel \begin{pmatrix} x_1'(t) \cdot (y_1^2(t) - x_1^2(t)) - 2x_1(t)y_1(t)y_1'(t) \\ y_1'(t) \cdot (x_1^2(t) - y_1^2(t)) - 2x_1(t)y_1(t)x_1'(t) \end{pmatrix}$$

und entsprechend durch Übergang von den Indizes 1 zu den Indizes 2

$$k_2' : X'(t) \parallel \begin{pmatrix} x_2'(t) \cdot (y_2^2(t) - x_2^2(t)) - 2x_2(t)y_2(t)y_2'(t) \\ y_2'(t) \cdot (x_2^2(t) - y_2^2(t)) - 2x_2(t)y_2(t)x_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Für den Schnittwinkel α zwischen k_1 und k_2 in S gilt daher

$$\cos \alpha = \frac{x_1'(t)x_2'(t) + y_1'(t)y_2'(t)}{\sqrt{x_1'^2(t) + y_1'^2(t)} \cdot \sqrt{x_2'^2(t) + y_2'^2(t)}}.$$

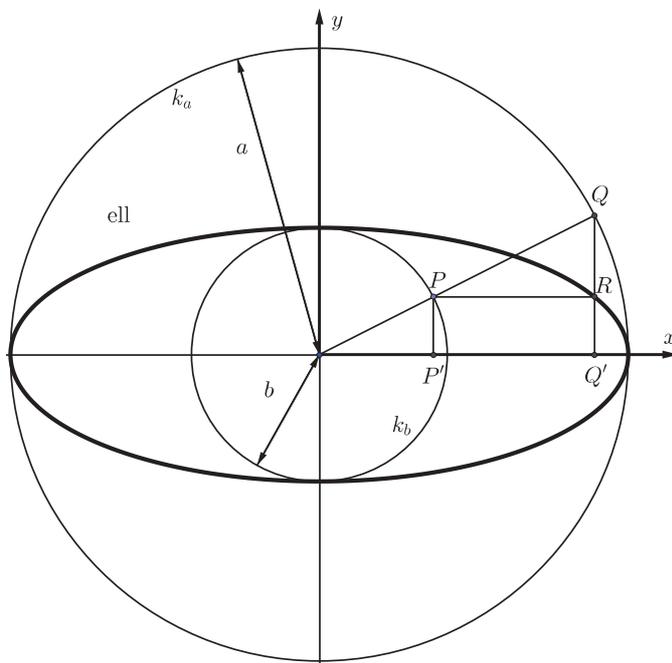
⁷⁹Näheres dazu entnehme man etwa [5]

3.7 Die Ellipse als affines Kreisbild

Neben der aus den DANDELINSchen Kugeln folgenden planimetrischen Ellipsendefinition (vgl. etwa [54], S. 186f!) gibt es noch andere Erzeugungsweisen, von denen wir uns hier mit zwei zueinander äquivalenten beschäftigen werden, welche abbildungsgeometrischer Natur sind (und analytisch betrachtet mit affinen Abbildungen zusammenhängen, wobei bezüglich detaillierter(er) Untersuchungen der damit in Zusammenhang stehenden **perspektiven Affinitäten** auf [54], S. 45ff verwiesen sei!).

3.7.1 Die Konstruktion von LA HIRE

Die in der unteren Abbildung illustrierte LA HIREsche⁸⁰ Konstruktion geht von zwei zueinander konzentrischen Kreisen k_a und k_b mit den (wie die Notation bereits suggeriert) Radien a und b (wobei $a > b$ gilt) aus, wobei wir den gemeinsamen Mittelpunkt geeigneterweise in den Koordinatenursprung O legen. Betrachten wir nun zwei variable Punkte



P und Q auf k_b und k_a , deren zugehörige Radien auf der gleichen Ursprungsgerade liegen und ordnen diesem Punktepaar durch den Schnitt der Parallelen zur x -Achse durch P mit der Parallelen zur y -Achse durch Q den Punkt $R(x|y)$ zu, so interessieren wir uns für die Bahnkurve von R , die entsteht, wenn P und Q eine volle Umdrehung auf k_b und k_a vollziehen.

Dazu konstatieren wir zunächst, dass die Dreiecke $\triangle OP'P$, $\triangle OPQ'Q$ sowie $\triangle PRQ$ paarweise zueinander ähnlich sind und aufgrund der Koordinatisierung sowie des Lehrsatzes von PYTHAGORAS⁸¹ für die zugehörigen Seitenlängen $\overline{OP'}$, $\overline{PP'}$, \overline{OP} , $\overline{OQ'}$, $\overline{QP'}$, \overline{OQ} , \overline{PR} , \overline{RQ} sowie \overline{PQ} die Dar-

stellungen

$$\overline{OP'} = \sqrt{b^2 - y^2}, \quad \overline{PP'} = y, \quad \overline{OP} = b, \quad \overline{OQ'} = x, \quad \overline{QQ'} = \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\overline{OQ} = a, \quad \overline{PR} = x - \sqrt{b^2 - y^2}, \quad \overline{QR} = \sqrt{a^2 - x^2} - y \quad \text{sowie} \quad \overline{PQ} = a - b$$

gelten (was der werte L $\begin{smallmatrix} e \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}$ ser als Übungsaufgabe beweisen möge, und zwar inklusive der behaupteten Ähnlichkeit der Dreiecke!).

⁸⁰Philippe de LA HIRE (1640-1718) war ein französischer Architekt und Maler, der auch Schüler des Mathematikers Gérard DESARGUES (1593-1662) war (vgl. dazu den Satz von DESARGUES in [54], S. 128ff!) und mit seiner Schrift "Theorie des coniques" den Versuch unternahm, die aus der Antike durch Apollonius von PERGA (262-190 v. Chr. Geb.) erforschten Kegelschnitte in einfacherer Form darzustellen (vgl. [42], S. 153). Außerdem hat er 1708 den Umfang der Kardioide (vgl. Abschnitt 4.10.3!) berechnet.

⁸¹Für neue Beweise dieses fundamentalen elementargeometrischen Satzes vgl. man etwa [54], S. 133ff!

Nun gibt es angesichts der zur Verfügung stehenden Seiten(längen) neun Möglichkeiten, durch Anwendung des **Strahlensatzes** die laufenden Koordinaten x und y von R mit den Radien a und b zu koppeln, von denen wir die Proportion

$$\overline{PP'} : \overline{OP} = \overline{QQ'} : \overline{OQ} \quad \text{bzw. dazu äquivalent} \quad \overline{PP'} : \overline{QQ'} = \overline{OP} : \overline{OQ}$$

auswählen (Der Werte L $\frac{e}{\ddot{O}}$ ser möge als umfangreiche Übungsaufgabe zeigen, dass auch die anderen acht Proportionen auf jene Bahnkurvengleichung führen, welche wir in Kürze erhalten werden!), was uns zu

$$y : b = \sqrt{a^2 - x^2} : a \quad (*) \quad \Leftrightarrow \quad ay = b\sqrt{a^2 - x^2}$$

bzw. quadriert, ...

$$a^2y^2 = b^2(a^2 - x^2)$$

... ausmultipliziert ...

$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$$

und umarrangiert schließlich zur Gleichung

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (*)$$

für die Bahnkurve von R führt, welche wir als **Ellipse mit der halben Hauptachsenlänge a sowie der halben Nebenachsenlänge b** bezeichnen und mit ell abkürzen, wobei wir es aufgrund der speziellen Lage von ell (symmetrisch zu beiden Koordinatenachsen) mit einer **Ellipse in erster Hauptlage**⁸² zu tun haben.

3.7.2 Orthogonale Stauchungen und Streckungen ("OS")

Durch die Abbildung in 3.9.1 entsteht der Eindruck, dass ell durch eine Stauchung von k_a in Richtung der y -Achse (also normal zur x -Achse, weshalb man auch von einer *orthogonalen Stauchung* spricht) mit dem Stauchfaktor $\frac{b}{a}$ (bzw. durch eine Streckung von k_b in Richtung der x -Achse mit dem Streckfaktor $\frac{b}{a}$) hervorgeht, was wir wie folgt kurz und bündig zeigen:

Aus (*) folgt unmittelbar

$$y : \sqrt{a^2 - x^2} = b : a, \quad \square.$$

ÜBUNGSAUFGABE FÜR DEN WERTEN L $\frac{E}{\ddot{O}}$ SER:

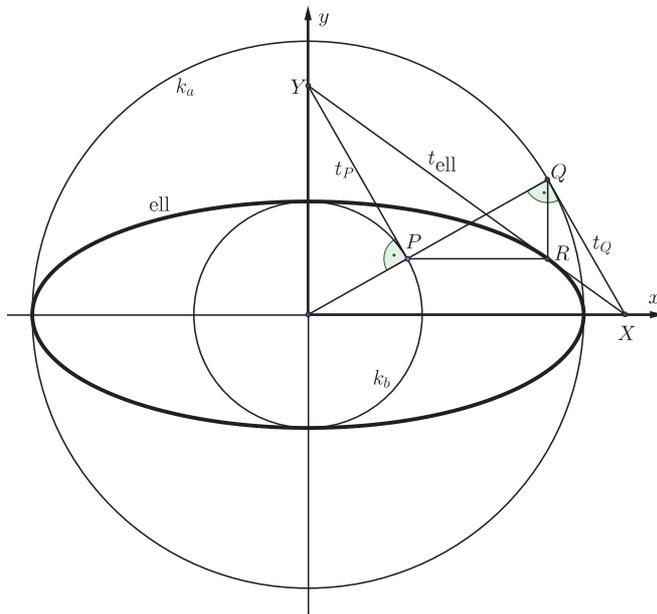
Man beweise analog die geklammer- te Bemerkung über die entsprechende orthogonale Streckung, indem man von einer der verbleibenden acht Proportionen aus 3.9.1 Gebrauch mache.

3.7.3 Ellipsentangenten und -polaren via OS

Aufgrund der soeben in 3.9.2 nachgewiesenen Äquivalenz der LA HIREschen Konstruktion von ell aus k_a und k_b mit der orthogonalen Stauchung bzw. Streckung von k_a bzw. k_b

⁸²In Abschnitt 3.8.5 betrachten wir als Ausblick Ellipsen in allgemeiner Lage.

können wir wegen eines Satzes über die Tangententreue perspektiver Affinitäten⁸³ (welche ja orthogonale Stauchungen/Streckungen beinhalten) die Tangente an ell in $R(x|y)$ dadurch konstruktiv ermitteln, indem wir vom Ellipsenpunkt R zum sogenannten Urbild-



punkt der orthogonalen Stauchung bzw. Streckung zurückgehen und dann zunächst in P bzw. Q die Tangente t_P bzw. t_Q an k_b bzw. k_a legen. Nun ist der Schnittpunkt Y bzw. X von t_P bzw. t_Q mit der y - bzw. x -Achse jeweils ein Fixpunkt unter der orthogonalen Stauchung bzw. Streckung, womit es sich bei der Gerade durch Y und R bzw. durch R und X um die gesuchte Ellipsentangente t_{ell} an ell in R handelt. Gemäß dem in 3.9.2 angeführten Stauch- bzw. Streckfaktor erhalten wir aus $R(x_R|y_R)$ entsprechend $P(\frac{bx_R}{a}|y_R)$ sowie $Q(x_R|\frac{ay_R}{b})$ und somit in weiterer Folge unter Anwendung der

Spaltform der Kreistangente aus Abschnitt 3.8.2 für die entsprechenden Kreistangenten in t_P und t_R die Gleichungen

$$t_P : \frac{bx_R}{a} \cdot x + y_R \cdot y = b^2 \quad \text{sowie} \quad t_Q : x_R \cdot x + \frac{ay_R}{b} \cdot y = a^2,$$

woraus sich unmittelbar die Fixpunkte

$$Y \left(0 \mid \frac{b^2}{y_R} \right) \quad \text{sowie} \quad X \left(\frac{a^2}{x_R} \mid 0 \right)$$

ergeben. Aus

$$\overrightarrow{YX} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{x_R} \\ \frac{x_R}{-y_R} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a^2 y_R \\ -b^2 x_R \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b^2 x_R \\ a^2 y_R \end{pmatrix}$$

folgt mit

$$t_{\text{ell}} : b^2 x_R \cdot x + a^2 y_R \cdot y \quad \underbrace{=} \quad a^2 b^2$$

Einsetzen von Y oder X !

schließlich die Spaltform der Ellipsentangente, wobei der werte $L \begin{smallmatrix} e \\ o \end{smallmatrix}$ ser zur Übung analog zur Begriffsbestimmung der Spaltform am Ende von Abschnitt 3.8.2 deren Bedeutung begründen möge und ferner durch Einsetzen von R unter Beachtung von (*) aus 3.9.1 nachweise, dass R auch (sic!) auf t_{ell} liegt.

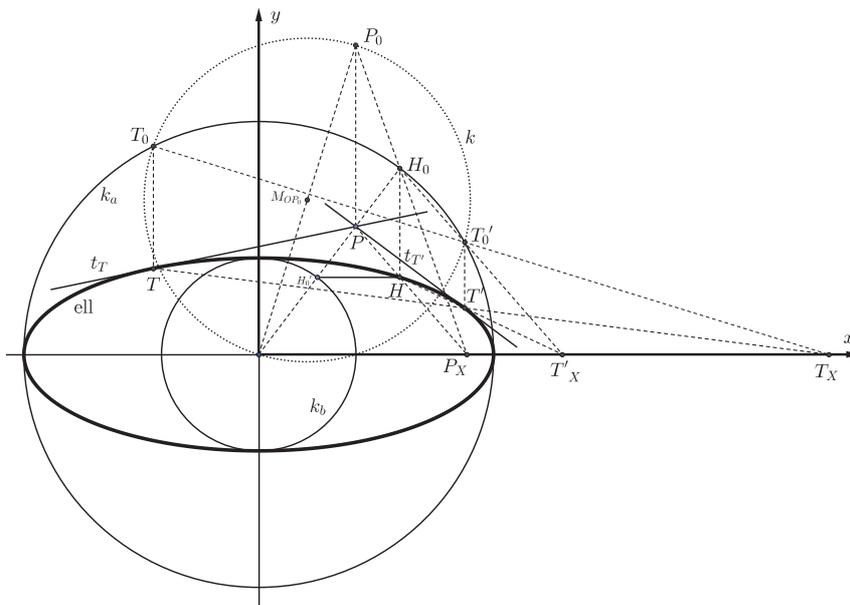
Halten wir uns jetzt noch einmal klar und deutlich vor Augen, **wie** wir auf die Spaltform der Ellipsentangente t_{ell} in R gestoßen sind, so müssen wir uns eingestehen, dass die Inzidenz $R \in \text{ell}$ an keiner Stelle benutzt wurde (abgesehen von der Übung für den werten

⁸³vgl. [54], S. 55f!

L_öser!)⁸⁴, weshalb wir bei der Ermittlung der Polaren eines beliebigen Punkts bezüglich ell (wobei die Polare genau so definiert ist wie beim Kreis in Abschnitt 3.8.3!) genauso vorgehen können und sich die Polargleichung daher ebenso durch Einsetzen des Pols in die Spaltform von ell ergibt.

Da wir uns im Gegensatz zur Tangententreue perspektiver Affinitäten aber auf keinerlei entsprechende Polarentreue stützen können (eben weil Polaritäten mit perspektiven Kollineationen - und nicht mit perspektiven Affinitäten zusammenhängen), gehört aber auch dies noch abgesichert, wofür wir uns den **konstruktiven Aspekt** zunutze machen und in diesem Zusammenhang **zwei grundlegende Eigenschaften perspektiver Affinitäten** verwenden (Genaueres dazu findet man etwa in [54], S. 48 bzw. S. 45ff!), nämlich:

- 1) Einander zugeordnete Punkte liegen immer auf einer Gerade mit fest vorgegebener Richtung. In unserem speziellen Fall der orthogonalen Stauchung ist diese Richtung durch die y -Achse festlegt.
- 2) Der Schnittpunkt einer Gerade und ihrer Bildgerade liegt stets auf einer festen Gerade, der sogenannten Affinitätsachse. Dabei handelt es sich in unserem Fall um die x -Achse.



Zur (konstruktiven) Ermittlung der Polare von P bezüglich ell als die Gerade, welche die Berührungspunkte jener Tangenten enthält, welche man durch P an ell legen kann, gehen wir daher wie folgt vor [wobei die konstruktive Komponente unter Verwendung von 1) und 2) aus der Abbildung ersichtlich ist!

- Wir gehen von $P(x_P|y_P)$ zum Urbildpunkt $P_0(x_P|\frac{ay_P}{b})$ über, ermitteln die Berührungspunkte T_0 und T_0' der Tangenten, welche man durch P_0 an k_a legen kann über den strichlierten THALES-Kreis k , dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt M_{OP_0} der Strecke OP_0 zusammenfällt, wodurch via

$$k : \left(x - \frac{x_P}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{ay_P}{2b}\right)^2 = \frac{x_P^2}{4} + \frac{a^2 y_P^2}{4b^2}$$

⁸⁴Nota bene: An und für sich hätten wir t_{ell} auch als Trägergerade der Strecke YR oder RX erhalten können, wozu wir aber von der Inzidenz $R \in \text{ell}$ Gebrauch gemacht hätten!

eine Gleichung von k gegeben ist. Gemäß Abschnitt 3.8.3 erhalten wir die Polare p_0 von P_0 bezüglich k_a dann durch den Schnitt von k mit k_a , was wegen

$$k_a : x^2 + y^2 = a^2$$

in obige Gleichung von k eingebaut auf

$$p_0 : -x_P \cdot x - \frac{ay_P}{b} \cdot y + a^2 = 0$$

führt und unmittelbar die Spurpunkte

$$X_0 \left(\frac{a^2}{x_P} \mid 0 \right) \quad \text{und} \quad Y_0 \left(0 \mid \frac{ab}{y_P} \right)$$

liefert. Um nun von p_0 zur Polaren p von P bezüglich ell zu gelangen, können wir X als Fixpunkt verwenden und brauchen nur noch Y an der x -Achse mit dem Faktor $\frac{b}{a}$ orthogonal stauchen, was dann auf $X = X_0$ sowie

$$Y \left(0 \mid \frac{b^2}{y_P} \right)$$

und somit wegen

$$\overrightarrow{YX} = \begin{pmatrix} a^2/x_P \\ -b^2/y_P \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a^2y_P \\ -b^2x_P \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b^2x_P \\ a^2y_P \end{pmatrix}$$

auf

$$p : b^2x_P \cdot x + a^2y_P \cdot x \quad \underbrace{\quad}_{X \text{ oder } Y \text{ einsetzen!}} \quad = a^2b^2$$

führt, \square .

3.7.4 Die Ellipse in allgemeiner Lage

Befindet sich eine Ellipse in allgemeiner Lage (d.h. die ihr eigene doppeltaxiale Symmetrie bezieht sich nicht auf die beiden Koordinatachsen, sondern auf zwei Geraden mit jeweils von 0 verschiedener Steigung, welche einander nicht im Koordinatenursprung schneiden), so ändert sich entsprechend auch deren Gleichung gegenüber der in 3.8.1 abgeleiteten speziellen Hauptlagenform.

Was wir hier als gegeben voraussetzen (und etwa in [54], S. 186f detailliert analysiert wird), ist folgende *planimetrische Eigenschaft* (welche oftmals zur Definition der Ellipse verwendet wird, was raumgeometrisch aufgrund der bekannten DANDELINSchen Kugeln naheliegt) der Ellipse:

Für jeden Punkt X auf ell ist die Abstandssumme $\overline{F_1X} + \overline{F_2X}$ konstant, wobei F_1 und F_2 (die sogenannten Brennpunkte oder Foci) derart auf der Hauptachse von ell liegen, dass $\overline{F_1F_2} = 2e$ mit $e < a$ gilt sowie der Mittelpunkt der Strecke F_1F_2 mit dem Schnittpunkt der Haupt- und Nebenachse von ell zusammenfällt.

Gehen wir von den zwei Foci $F_1(u|v)$ und $F_2(w|z)$ sowie einem beliebigen Ellipsenpunkt $X(x|y)$ aus, bilden

$$\ell_1 := |\overrightarrow{F_1X}| = \left| \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix} \right| \quad \text{sowie} \quad \ell_2 := |\overrightarrow{F_2X}| = \left| \begin{pmatrix} x-w \\ y-z \end{pmatrix} \right|$$

und führen via

$$\ell_1 = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = \sqrt{\underbrace{x^2 + y^2 - 2(ux + vy) + u^2 + v^2}_{R_1}}$$

sowie

$$\ell_2 = \sqrt{(x-w)^2 + (y-z)^2} = \sqrt{\underbrace{x^2 + y^2 - 2(wx + zy) + w^2 + z^2}_{R_2}}$$

passende Hilfsgrößen ein, so lässt sich die *Algebraisierung* der planimetrischen Eigenschaft

$$\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2} = 2a \quad [\text{wobei } \overline{F_1F_2} < 2a \text{ (\#) zu beachten ist!}]$$

durch sukzessives Quadrieren entscheidend verkürzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_1 + R_2 + 2\sqrt{R_1R_2} &= 4a^2 &\Rightarrow 4R_1R_2 &= [4a^2 - (R_1 + R_2)]^2 \\ & &\Rightarrow 0 &= 16a^4 - 8a^2(R_1 + R_2) + (R_1 - R_2)^2 \end{aligned}$$

Erst jetzt setzen wir für R_1 und R_2 die von x, y, u, v, w, z und a abhängigen Terme ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= 16a^4 - 8a^2 \cdot [2 \cdot (x^2 + y^2) - (u+w) \cdot x - (v+z) \cdot y + u^2 + v^2 + w^2 + z^2] + \\ &\quad + [2 \cdot (w-u) \cdot x + 2 \cdot (z-v) \cdot y + u^2 + v^2 - w^2 - z^2]^2 \end{aligned}$$

bzw.

$$[4a^2 - (w-u)^2] \cdot x^2 - 2 \cdot (w-u) \cdot (z-v) \cdot xy + [4a^2 - (z-v)^2] \cdot y^2 + \dots = 0 \quad (*),$$

wobei die *für uns im Folgenden nicht relevanten* linearen und konstanten Anteile lediglich mit Punkten angedeutet wurden, da uns in der allgemeinen algebraischen Gleichung zweiten Grades in zwei Variablen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (**)$$

lediglich deren via

$$\mathcal{D} := B^2 - 4AC$$

definierte *Diskriminante* \mathcal{D} interessiert, für welche wir im vorliegenden Fall (*) demnach

$$\mathcal{D} = 4 \cdot \{(w-u)^2 \cdot (z-v)^2 - 16a^4 + 4a^2 \cdot [(w-u)^2 + (z-v)^2] - (w-u)^2 \cdot (z-v)^2\}$$

erhalten.

Unter Beachtung von $\overline{F_1F_2}^2 = (w-u)^2 + (z-v)^2$ sowie (#) ergibt sich daher

$$\mathcal{D} < 0, \quad \square.$$

Somit haben wir bewiesen⁸⁵, dass Ellipsen in allgemeiner Lage durch **quadratische Gleichungen in zwei Variablen** beschrieben werden, deren Diskriminante negativ ist.⁸⁶

⁸⁵Dabei sei auch ausdrücklich auf [9], S. 171ff sowie [53], S. 48f verwiesen, wo ebenso in allgemeinerer (als sonst üblichen!) Art und Weise die planimetrische Ellipsendefinition *algebraisiert* wird, wenngleich auch nicht derart umfassend wie hier!

⁸⁶In Ergänzung dazu sei ausdrücklich auf [54] hingewiesen, wo die (hier nur am Beispiel der Ellipse vorgenommene) Klassifikation der Kurven zweiter Ordnung auch für die verbleibenden Kegelschnittstypen

Literatur

- [1] ARTMANN, Benno (1983): Der Zahlbegriff. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.
- [2] BALLIK, Thomas (2012): Mathematik-Olympiade. ikon, Brunn am Gebirge.
- [3] BASIEUX, Pierre (2004⁵): Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze. Rowohlt, Reinbek.
- [4] BEHREND, Erhard (2004). Analysis Band 2. Vieweg, Braunschweig.
- [5] BETZ, Albert (1964²): Konforme Abbildung. Springer, Berlin.
- [6] BEUTELSPACHER, Albrecht (2001⁵): Lineare Algebra. Vieweg, Braunschweig.
- [7] BEWERSDORFF, Jörg (2007³): Algebra für Einsteiger. Vieweg, Braunschweig.
- [8] BRÖCKER, Theodor (2003): Lineare Algebra und Analytische Geometrie – Ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker. Birkhäuser, Basel.
- [9] BÜRGER, Heinrich, Roland FISCHER, Günther MALLE, Manfred KRONFELLNER, Thomas MÜHLGASSNER und Franz SCHLÖGLHOFER (1991): Mathematik Oberstufe 3. öbv&hpt, Wien.
- [10] CIGLER, Johann (1976): Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie, 1. Teil. Manz, Wien.
- [11] CIGLER, Johann (1992): Grundideen der Mathematik. BI-Verlag, Mannheim.
- [12] CIGLER, Johann (1986²): Einführung in die Differential- und Integralrechnung, 1. Teil. Manz, Wien.
- [13] CONWAY, John H. und Richard K. GUY (1997): Zahlenzauber. Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen. Birkhäuser, Basel.
- [14] COURANT, Richard und Herbert ROBBINS (1992⁴): Was ist Mathematik? Springer, Berlin.
- [15] EBBINGHAUS, Heinz-Dieter et al. (1992³): Zahlen. Springer, Berlin.
- [16] FELZMANN, Reinhold, Walter WEIDINGER und Manfred BLÜMEL (1988): Geometrisches Zeichnen (3. Klasse). öbv&hpt, Wien.
- [17] FIALA, Friedrich und Wolfgang MOSER (1989⁵): Mathematik Maturaaufgaben. öbv&hpt, Wien.
- [18] FREITAG, Eberhard und Rolf BUSAM (2000³): Funktionentheorie 1. Springer, Berlin.
- [19] GLAESER, Georg (2007²): Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik. Spektrum, Heidelberg.
- [20] GLAESER, Georg und Konrad POLTHIER (2009): Bilder der Mathematik. Spektrum, Heidelberg.
- [21] GÜRLEBECK, Klaus, Klaus HABETHA und Wolfgang SPRÖSSIG (2006): Funktionentheorie in der Ebene und im Raum. Birkhäuser, Basel.
- [22] HELLUS, Michael (2013³): Lineare Algebra nicht-vertieft. Logos, Berlin.

- [23] HESS, Hans-Ulrich (2010): Das Wunder der Anwendung - Einführung in die Analysis und ihre Anwendung in Naturwissenschaft und Technik. Logos, Berlin.
- [24] HUPPERT, Bertram und Wolfgang WILLEMS (2006): Lineare Algebra. B.G. Teubner, Wiesbaden.
- [25] HURWITZ, Adolf (1919): Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen. Springer, Berlin.
- [26] JÄNICH, Klaus (1993²): Vektoranalysis. Springer, Berlin.
- [27] KEHLMANN, Daniel (2005): Die Vermessung der Welt. Rowohlt, Reinbek.
- [28] KEMPERMANN, Theo (2005²): Zahlentheoretische Kottproben. Harri Deutsch, Frankfurt.
- [29] KNOPP, Konrad (1996⁶): Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer, Berlin.
- [30] KOECHER, Max und Aloys KRIEG (2007²): Elliptische Funktionen und Modulformen. Springer, Berlin.
- [31] KORECKY, Jan (2015): Der Goldene Schnitt. Vorwissenschaftliche Arbeit, Wien.
- [32] KOWOL, Gerhard (1990): Gleichungen. Freies Geistesleben, Stuttgart.
- [33] KOWOL, Gerhard (2009): Projektive Geometrie und Cayley-Klein Geometrien der Ebene. Birkhäuser, Boston.
- [34] KRANZER, Walter (1989): So interessant ist Mathematik. Aulis Verlag, Köln.
- [35] LAMOTKE, Klaus (2005): Riemannsche Flächen. Springer, Berlin.
- [36] LENZE, Burkhard (2010³): Einführung in die Fourier-Analysis. Logos, Berlin.
- [37] LIETZMANN, Walther (1923³): Trugschlüsse. B.G. Teubner, Leipzig.
- [38] LIETZMANN, Walther (1943): Lebendige Mathematik. Hirt, Breslau.
- [39] LIETZMANN, Walther (1950): Wo steckt der Fehler? B.G. Teubner, Leipzig.
- [40] MATTHIESSEN, Ludwig (1878): Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. B.G. Teubner, Leipzig.
- [41] MÄDER, Peter (1992): Mathematik hat Geschichte. Metzler, Hannover.
- [42] MESCHKOWSKI, Herbert (1968): Mathematiker-Lexikon. BI-Verlag, Mannheim.
- [43] MEYER, Wilhelm Franz und Hans MOHRMANN (Hrsg.) (1902): Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band 3 (Geometrie), Teil 3: Differentialgeometrie. B.G. Teubner, Leipzig.
- [44] NEEDHAM, Tristan (2001): Anschauliche Funktionentheorie. Oldenbourg, München.
- [45] NOVAK, Johann, Heinz-Christian SCHALK, Siegfried STEMMER et al. (1992): Mathematik Oberstufe 4. Reniets, Wien.
- [46] ODEHNAL, Boris (2006): Three points related to the incenter and excenters of a triangle. In: Elemente der Mathematik, Band 61, Nr. 2 (S.74-80). Birkhäuser, Basel.

- [47] RADEMACHER, Hans und Otto TÖPLITZ (1933²): Von Zahlen und Figuren. Springer, Berlin.
- [48] REICHEL, Hans-Christian, Robert MÜLLER, Josef LAUB und Günter HANISCH (1992³): Lehrbuch der Mathematik 6. öbv&hpt, Wien.
- [49] REICHEL, Hans-Christian, Robert MÜLLER, Günter HANISCH und Josef LAUB (1992²): Lehrbuch der Mathematik 7. öbv&hpt, Wien.
- [50] REICHEL, Hans-Christian, Robert MÜLLER und Günter HANISCH (1993²): Lehrbuch der Mathematik 8. öbv&hpt, Wien.
- [51] REICHEL, Hans-Christian und Robert RESEL (2002): Der Beitrag der Mathematik und des Mathematikunterrichts zur Persönlichkeitsbildung. In: ÖMG Didaktik-Reihe (34), S. 85-100.
- [52] RESEL, Robert (1999): Ausbaumöglichkeiten der Oberstufen-Schulmathematik. Diplomarbeit, Universität Wien.
- [53] RESEL, Robert (2001): Didaktisch-methodische Überlegungen zu ausgewählten Kapiteln des Geometrieunterrichts der AHS-Oberstufe. Dissertation, Universität Wien.
- [54] RESEL, Robert (2014): Reise zum Mittelpunkt der Mathematik. Logos, Berlin.
- [55] RESEL, Robert (2014): In 101 Abschnitten um die mathematische Welt. Logos, Berlin.
- [56] RICHTER-GEBERT, Jürgen und Thorsten ORENDT (2009): Geometriekalküle. Springer, New York/Berlin/Heidelberg.
- [57] ROMAN, Tiberiu (1987): Reguläre und halbbreguläre Polyeder. Harri Deutsch, Thun/Frankfurt.
- [58] SCHARK, Rainer (1992): Konstanten in der Mathematik - variabel betrachtet. Harri Deutsch, Frankfurt.
- [59] SCHEID, Harald (1994²): Zahlentheorie. BI-Verlag, Mannheim.
- [60] SCHEID, Harald (1997): Folgen und Funktionen. Spektrum, Heidelberg.
- [61] SCHEID, Harald und Wolfgang SCHWARZ (2007⁵): Elemente der Arithmetik und Algebra. Spektrum, Heidelberg.
- [62] SCHUPP, Hans und Heinz DABROCK (1995): Höhere Kurven. BI-Verlag, Mannheim.
- [63] SONAR, Thomas (1999): Einführung in die Analysis. Vieweg, Braunschweig.
- [64] SPIEGEL, Murray R. (1982): Endliche Differenzen und Differenzgleichungen. McGraw-Hill, Hamburg.
- [65] STILLWELL, John (2002): Mathematics and its history. Springer, Berlin.
- [66] WANNER, Gerhard (2004): Elementare Beweise des Satzes von Morley. In: Elemente der Mathematik, Band 59, Nr. 4 (S.144-150). Birkhäuser, Basel.
- [67] ZEITLER, Herbert und Dusan PAGON (2007): Kreisgeometrie - gestern und heute. WBG, Darmstadt.