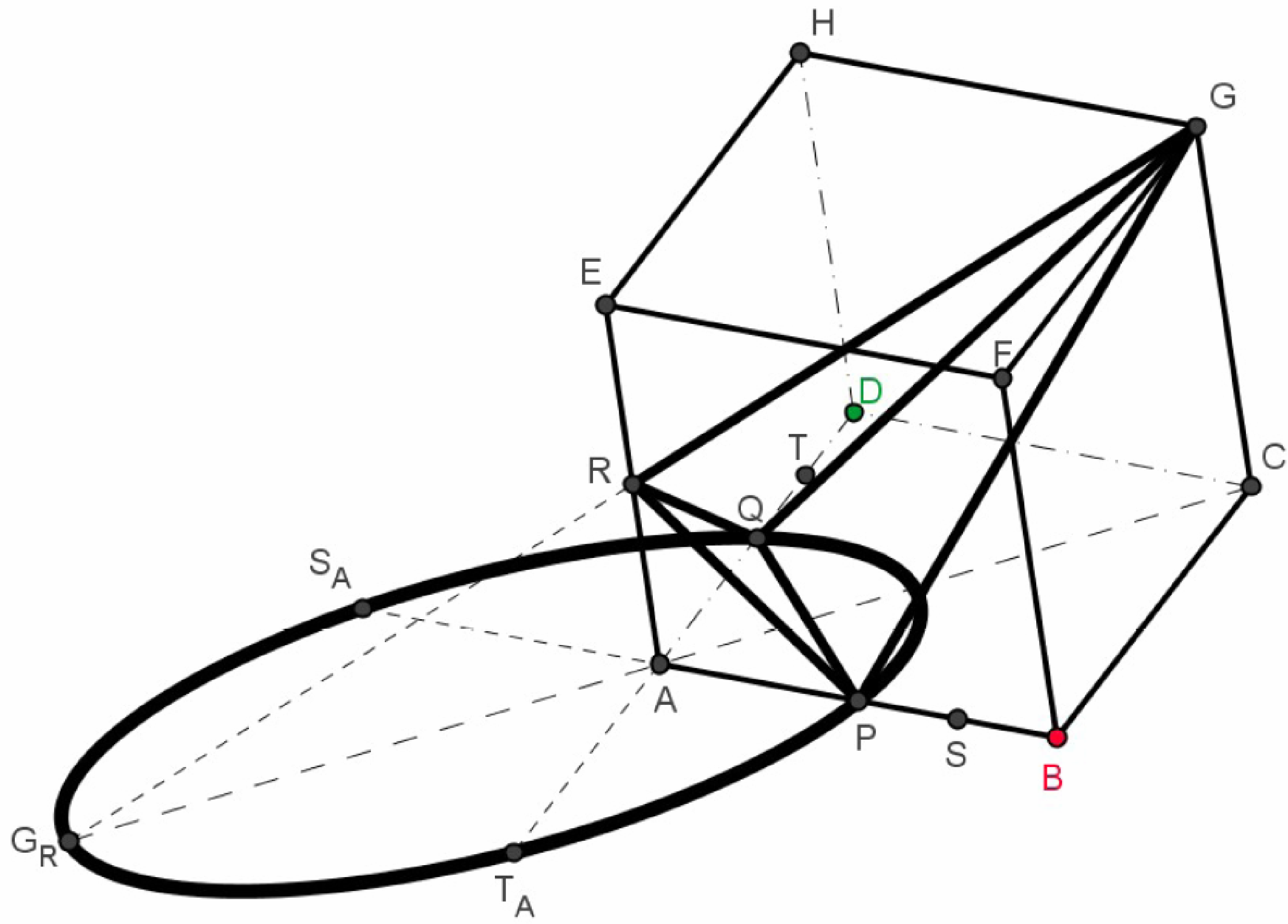
9.6.3 Würfel, Kegel und Ellipse



In der Figur ist ein Würfel $ABCDEFGH$ der Seitenlänge 12 abgebildet zusammen mit drei Kantenmittelpunkten P, Q und R abgebildet. Wir betrachten jetzt die Drehkegelfläche Γ mit der Spitze G und den Erzeugenden GP, GQ und GR, wobei der Umkreis des Dreiecks ΔPQR ein Leitkreis k von Γ sein soll und wollen zeigen, dass die Schnittkurve von Γ mit der Trägerebene ε der Würfelfläche $ABCD$ eine Ellipse ν ist.[215]

Dazu legen wir ein räumliches cartesisches Koordinatensystem derart geeignet in diese Konfiguration, dass A den Ursprung bildet, sowie B bzw. D bzw. E auf der positiven $x-$ bzw. $y-$ bzw. $z-$Achse liegt. Da es sich bei ΔPQR um ein gleichseitiges Dreieck handelt, entspricht der Mittelpunkt M von k dem

[215] Weitere sich bereits aus der Figur ergebende Details bezüglich ν werden dann in weiterer Folge gezeigt werden.

Schwerpunkt des Dreiecks ΔPQR, für welchen wir unter Anwendung der vektoriellen Schwerpunktsformel $M = \frac{1}{3}(P+Q+R)$ wegen $P(6|0|0)$, $Q(0|6|0)$ und $R(0|0|6)$ das Resultat $M(2|2|2)$ erhalten. Die Achse a von Γ ist somit durch G und M festgelegt, was uns wegen $G(12|12|12)$ mit

$$\overrightarrow{MG} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \parallel \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

einen $\boxed{\text{normierten Richtungsvektor}}$ von a liefert.

Um nun Satz 6 aus 3.1 anwenden zu können, benötigen wir noch den Neigungswinkel φ einer Erzeugenden gegenüber jeder Normalebene zu a, wozu wir z.B. PG heranziehen und wegen

$$\overrightarrow{PG} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu

$$\sin\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{5}{3 \cdot \sqrt{3}}$$

bzw. wegen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ schließlich zu

$$\cos^2\varphi = \frac{2}{27}$$

gelangen.

Damit lautet eine Gleichung von Γ gemäß Satz 6

$$\Gamma: \ \frac{2}{27} \cdot \begin{pmatrix} x-12 \\ y-12 \\ z-12 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} x-12 \\ y-12 \\ z-12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 \quad (*).$$

Somit läuft die Bestimmung einer Gleichung der Schnittkurve ν von Γ mit ε auf das Lösen des aus den Gleichungen $(*)$ und $z = 0$ (da ε ja π_1 entspricht!) resultierenden Gleichungssystems hinaus, womit durch

$$\nu: \ 2 \cdot \begin{pmatrix} x-12 \\ y-12 \\ -12 \end{pmatrix}^2 = 9 \cdot \left[\begin{pmatrix} x-12 \\ y-12 \\ -12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2$$

(wenn auch noch in äußerst latenter Form) eine Gleichung von ν gegeben ist, die wir jetzt weiter umformen:

$$\nu:\ 2\cdot(x^2+y^2-24x-24y+432)=9\cdot\begin{pmatrix} y \\ -x \\ x-y \end{pmatrix}^2$$

$$\nu:\ 2x^2+2y^2-48x-48y+864=18\cdot(x^2-xy+y^2)$$

$$\nu:\ 8x^2-9xy+8y^2+24x+24y-432=0\quad(\#)$$

Wegen $\Delta=81-4\cdot8\cdot8=-175<0$ ist ν also eine Ellipse. Da ferner

$$\det\begin{pmatrix} 8 & -\frac{9}{2} & 12 \\ -\frac{9}{2} & 8 & 12 \\ 12 & 12 & -432 \end{pmatrix}=144\cdot\det\begin{pmatrix} 8 & -\frac{9}{2} & 1 \\ -\frac{9}{2} & 8 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}=$$

$$=144\cdot\det\begin{pmatrix} 8 & -\frac{25}{2} & 25 \\ -\frac{9}{2} & \frac{25}{2} & -\frac{25}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=144\cdot\left(\frac{25}{2}\right)^2\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=-900\neq0$$

gilt, ist ν gemäß Satz 88 aus 9.2 nicht entartet, weshalb wir nun nach der in 8.3.2 entwickelten Methode sämtliche Charakteristika von ν ermitteln:

Lösen wir (#) nach y auf ...

$$\nu:\ 8y^2-(9x-24)y+8x^2+24x-432=0$$

... und formen um

$${}_1y_2=\frac{9x-24\pm\sqrt{81x^2-432x+576-256x^2-768x+13824}}{16}$$

...

$${}_1y_2=\frac{9x-24\pm\sqrt{-175x^2-1200x+14400}}{16}$$

..., so erhalten wir

$$y_{1,2}(x)=\frac{9x-24\pm5\cdot\sqrt{-7x^2-48x+576}}{16}\quad(\#\#).$$

Um uns ökonomisch auf die Suche nach Gitterpunkten von ν zu machen, ermitteln wir den Defintionsbereich des Radikandenpolynoms, indem wir zunächst dessen Nullstellen ${}_1x_2$ berechnen:

$$
{}_1x_2 = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 28 \cdot 576}}{14} = \frac{-48 \pm 48\sqrt{1+7}}{14} =
$$

$$
= \frac{-48 \pm 96\sqrt{2}}{14} = \frac{-24}{7} \cdot (1 \pm 2\sqrt{2}) \quad \Rightarrow x_1 \approx -13.13, \quad x_2 \approx 6.27
$$

Durch Auswertung des Radikandenpolynoms $\wp$ für $[-13; 6] \cap \mathbb{Z}$ erhalten wir ausschließlich für die $x-$Werte -12, -9, 0 und 6 Quadratzahlen als Funktionswerte, was durch Einsetzen in (##) nicht auf acht, aber immerhin fünf Gitterpunkte, nämlich

$$
G_R(-12|-12), \quad S_A(-9|0), \quad T_A(0|-9), \quad \underbrace{Q(0|6) \text{ und } P(6|0)}_{\text{(sic!)}}
$$

führt, für die sehr einfach folgende Eigenschaften nachgewiesen werden können:

- Ist S der Mittelpunkt der Strecke BP, dann ist S_A der Spiegelpunkt von S an A.
- Ist T der Mittelpunkt der Strecke DQ, dann ist T_A der Spiegelpunkt von T an A.
- G_R ist der Spiegelpunkt von G an R und auch ein Hauptscheitel von ν.[216]

[216] Diese Eigenschaft überrascht schon deshalb nicht sonderlich, weil ν invariant gegenüber Vertauschung von x und y ist, womit die erste Mediane *eine* Symmetrieachse ist. Dass es sich dabei um die Haupt– (und nicht die Neben-)achse handelt, kann man etwa wie folgt zeigen: Man ermittelt die Schnittpunkte der ersten Mediane mit ν, berechnet sich den Mittelpunkt dieser Schnittpunkte sowie deren Abstand, führt dies ebenso mit der Normalen auf die erste Mediane durch den berechneten Mittelpunkt durch und vergleicht die Längen, was bei der ersten Mediane auf $\frac{60}{7} \cdot \sqrt{2}$ und bei der Normalen auf $\frac{12}{7} \cdot \sqrt{14}$ führt, womit also wegen $\frac{60}{7} \cdot \sqrt{2} > \frac{12}{7} \cdot \sqrt{14}$ die erste Mediane die Haupt- und die Normale die Nebenachse von ν trägt.