und aufgrund der obig angestellten Überlegungen auch

$$f_{a,t}(-1) \leq f_{a,t}\left(-\frac{1}{2}\right) \leq f_{a,t}(0),$$

ergo $(*)$ folgt, $\square$.

$\boxed{\text{Übungsaufgabe für den werten L}\,\overset{\text{E}}{\text{Ö}}\,\text{ser:}}$ Durch Ergänzung des Falls $t = 1$ schließe man die Lücke bzgl. der $\leq$-Zeichen in allen Ungleichungsketten!

5.3 Drehungen im $\mathbb{R}^n$ und die $SO(n)$

In Ergänzung zu unseren bereits angestellten Überlegungen bzgl. linearen Abbildungen (vgl. [50], S. 44ff) sowie orthogonalen Matrizen aus $\mathbb{R}^{(3,3)}$ (vgl. [48], S. 88ff und auch [50], S. 30ff) stellen wir uns zunächst für den einfach(st)en Fall der Dimension 2 die Frage nach der Gestalt jener Matrizen aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$, deren zugehörige lineare Abbildungen *distanzerhaltend* operieren. Man spricht *diesfalls* auch von *Isometrien*.

Ausgehend vom Ansatz

$$\varphi: \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{y} = \varphi(\mathfrak{x}) = A \cdot \mathfrak{x} \ \text{ mit } \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

stellen wir also an φ (und damit in weiterer Folge an die Eintragungen a, b, c und d der *Koeffizientenmatrix* A von φ) die Forderung

$$|\mathfrak{x}| = |\varphi(\mathfrak{x})| \quad \forall \mathfrak{x} \in \mathbb{R}^2,$$

was auf

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \right| \quad (*)$$

bzw.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2}$$

resp. nach Quadrieren und Vereinfachen auf

$$\underline{(a^2 + c^2 - 1)} \cdot x^2 + \underline{2 \cdot (ab + cd)} \cdot xy + \underline{(b^2 + d^2 - 1)} \cdot y^2 = 0$$

führt, womit $(*)$ nur dann $\forall (x|y) \in \mathbb{R}^2$ eintritt, wenn die <u>unterstrichenen Koeffizienten</u> sämtlich verschwinden, ergo

$$a^2 + c^2 = 1 \ (1), \quad ab + cd = 0 \ (2) \quad \wedge \ b^2 + d^2 = 1 \ (3)$$

gilt.

Nun sagen (1), (2) und (3) geometrisch interpretiert aber nichts weiter aus, alsdass die Spaltenvektoren von A normiert sind [(1) und (3)] sowie aufeinander normal stehen [(2)], was wegen (1) und (3) motiviert durch Polarkoordinaten den Ansatz $a = \cos\alpha$ und

$c = \sin\alpha$ nahelegt sowie wegen (2) und (3) in weiterer Folge $b = -\sin\alpha$ und $d = \cos\alpha$ impliziert und uns somit zur bekannten Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

führt (vgl. etwa [50], S. 48).

$\boxed{\text{Übungsaufgabe für den werten Leser.}}$ In Verallgemeinerung des soeben behandelten Spezialfalls $n = 2$ beweise man für beliebige Matrizen aus $\mathbb{R}^{(n,n)}$, dass die Forderung der Isometrie an die hinter der Matrix steckende lineare Abbildung ebenso auf normierte und zueinander paarweise orthogonale Spaltenvektoren dieser Matrix führt, m.a.W. also sämtliche Isometrien des $\mathbb{R}^{(n,n)}$ durch orthogonale Matrizen vermittelt werden.

Dass es zur Festlegung einer Isometrie des $\mathbb{R}^2$ in sich nur eines einzigen Parameters (etwa den entsprechenden Drehwinkel α oder eine seiner Winkelfunktionen) bedarf, liegt (vgl. letzte Klammer) auf der Hand und bedarf keines weiteren Kommentars.

Eine Dimension höher sieht dies mit der räumlichen Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \kappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 & -2\kappa\nu + 2\lambda\mu & 2\kappa\mu + 2\lambda\nu \\ 2\kappa\nu + 2\lambda\mu & \kappa^2 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2 & -2\kappa\lambda + 2\mu\nu \\ -2\kappa\mu + 2\lambda\nu & 2\kappa\lambda + 2\mu\nu & \kappa^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 \end{pmatrix}$$

nicht mehr so einfach aus wie im Fall $n = 2$. Dies betrifft sowohl die Herleitung der Eintragungen von A (siehe Abschnitt 5.4 sowie ferner [48], S. 88ff *ohne Verwendung von Quaternionen* oder [50], S. 30ff *unter Verwendung von Quaternionen*) als auch die Bedeutungen der involvierten Parameter κ, λ, μ und ν, welche einerseits durch $\kappa^2+\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = 1$ (∗∗) untereinander gekoppelt sind und via

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\overrightarrow{r}| = \sin\frac{\alpha}{2}$$

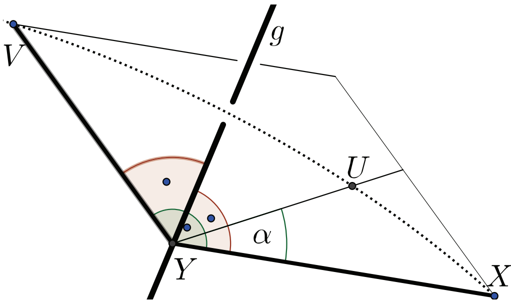
den Richtungsvektor $\overrightarrow{r}$ jener Gerade g durch den Koordinatenursprung angeben, um welche via φ gedreht wird, und zwar durch den Drehwinkel α.

Wegen (∗∗) besitzt A somit drei Freiheitsgrade, welche sich auch durch die geometrische Interpretation der hinter φ steckenden Drehung ergeben, da für einen Richtungsvektor der Drehachse g zwei der drei Komponenten ausreichen (weil man ja ungeachtet der Bedeutung der Parameter λ, μ und ν dennoch o.B.d.A. von einem normierten Richtungsvektor ausgehen darf) und somit mit dem Drehwinkel insgesamt drei Freiheitsgrade bestehen, $\square$.

Steigen wir jetzt in den abstrakten $\mathbb{R}^n$ auf und beginnen mit der analytischen Seite, so hat die entsprechende Matrix A aus $\mathbb{R}^{(n,n)}$ zunächst n^2 Eintragungen. Nun liefert zunächst die Normierung aller Spaltenvektoren von A eine Restriktion in Form von n Gleichungen, welche jeweils n der n^2 Eintragungen untereinander koppeln. Überdies liefert die paarweise Orthogonalität ebenjener Spaltenvektoren über das Orthogonalitätskriterium $\binom{n}{2}$ Gleichungen, welche jeweils $2n$ der n^2 Eintragungen untereinander koppeln, womit für die Anzahl f_n der Freiheitsgrade von A und somit auch der dahintersteckenden Isometrie φ

demnach

$$f_n = n^2 - n - \binom{n}{2} = n\cdot(n-1) - \frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}, \quad \text{ergo } \boxed{f_n = \tbinom{n}{2}} \text{ gilt.}$$



Zur Klärung der geometrischen Interpretation von f_n erinnern wir an die Herleitung der Darstellung von A in [48], S. 88f, woran wir anhand der linken Abbildung (geringfügig für unsere Zwecke gegenüber [48], S. 88 adaptiert) die Notwendigkeit einer eindeutig bestimmten Normalen auf die Trägergerade des Vektors $\overrightarrow{YX}$ – wobei $U = Y + \cos\alpha\cdot\overrightarrow{YX} + \sin\alpha\cdot\overrightarrow{YV}$ das Bild von X unter φ ist – in jenem *affinen Raum* $\mathcal{U}$ erkennen, bei welchem es sich um ein (durch den Vektor $\overrightarrow{OY}$) translatiertes Bild des orthogonalen Komplements $\mathcal{D}^\perp$ des **Drehraums** $\mathcal{D}$ (in Verallgemeinerung der Drehachse g im $\mathbb{R}^3$ bzw. des Drehzentrums im $\mathbb{R}^2$) bezüglich des $\mathbb{R}^n$ handelt. Da die obig postulierte Existenz einer eindeutigen Normalen zwingend $\dim\mathcal{U} = \dim\mathcal{D}^\perp = 2$ impliziert, muss für den **Drehraum** demnach $\dim\mathcal{D} = n-2$ gelten[36], wobei wir o.B.d.A. von einer *Orthonormalbasis* $\mathcal{B}$ von $\mathcal{D}$ ausgehen können. Bezüglich der insgesamt $n\cdot(n-2)$ Komponenten der $n-2$ Vektoren des $\mathbb{R}^n$ aus $\mathcal{B}$ konstatieren wir, dass durch die Normierung der $n-2$ Vektoren ebenso $n-2$ Restriktionsgleichungen zwischen je n der $n\cdot(n-2)$ Komponenten resultieren. Außerdem ergeben sich aus der paarweisen Orthogonalität der $n-2$ Vektoren $\binom{n-2}{2}$ Restriktionsgleichungen zwischen je $2n$ der $n\cdot(n-2)$ Komponenten, womit für die Anzahl der Freiheitsgrade f_n von φ aus geometrischer Sicht inkl. Beachtung des Drehwinkels α also

$$f_n = n\cdot(n-2) - (n-2) - \binom{n-2}{2} + 1$$

bzw. vereinfacht

$$f_n = n\cdot(n-2) - (n-2) - \frac{(n-2)\cdot(n-3)}{2} + 1$$

resp.

$$f_n = \frac{(n-2)}{2}\cdot(2n-2-n+3)+1 = \frac{(n-2)\cdot(n+1)}{2}+1 = \frac{n^2-n-2+2}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2},$$

ergo

$$\boxed{f_n = \tbinom{n}{2}} \text{ gilt, } \square.$$

BEMERKUNGEN:

- Wegen

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

[36] Dies impliziert insbesondere für $2 \le n \le 4$ die Drehung um einen Punkt bzw. eine Gerade resp. eine Ebene(!) im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^4$.

(was der kleine GAUSS ja der Anekdote nach bereits im zarten Alter von acht Jahren für $n = 100$ zu erkennen vermochte, vgl. etwa [29]) und der sich daraus unmittelbar ergebenden Formel

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

ist die Dimension (in unserem Zusammenhang ein ebenso gebräuchlicher Begriff für die Anzahl der Freiheitsgrade) der $SO(n)$ also gleich der Summe der Dimensionen aller unter dem $\mathbb{R}^n$ liegenden $\mathbb{R}^k$ (ergo der natürlichen Zahlen von 1 bis $n-1$).

- Für den Fall $n = 3$ ergibt sich über die sogenannten drei EULERschen Winkel eine mögliche Festlegung von orthogonalen Abbildungen des Anschauungsraums in sich, nähere Details dazu entnehme man [31], S. 301ff!

- Ebenso für den Fall $n = 3$ sei ergänzend zu den soeben erwähnten EULERschen Winkel auch noch auf die alternative Verwendung der CARDAN-Winkel (ebenso drei an der Zahl) hingewiesen und für Details auf [36], S. 318f verwiesen!

5.4 Ein alternativer Weg zur $SO(3)$

Ergänzend zu den im vorherigen Abschnitt bereits zitierten Herleitungen der Parameterdarstellung

$$A = \begin{pmatrix} \kappa^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2 & -2\kappa\nu+2\lambda\mu & 2\kappa\mu+2\lambda\nu \\ 2\kappa\nu+2\lambda\mu & \kappa^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2 & -2\kappa\lambda+2\mu\nu \\ -2\kappa\mu+2\lambda\nu & 2\kappa\lambda+2\mu\nu & \kappa^2-\lambda^2-\mu^2+\nu^2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

für alle Matrizen A der *speziellen orthogonalen Gruppe* der Dimension 3 (Dies betrifft sowohl die Dimension der involvierten Vektoren als auch der $SO(3)$ selbst, bzgl. letzterer vgl. man den vorangegangen Abschnitt!) behandeln wir in diesem Abschnitt einen alternativen Zuganng zu $(*)$, wobei wir von folgender charakteristischen Eigenschaft jeder linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (wobei wir sowohl den *Urbildraum* $\mathbb{R}^n$ als auch den *Bildraum* $\mathbb{R}^m$ mit der *Standardbasis* versehen) mit der Koeffizientenmatrix $A = (a_{i,j}),\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$ Gebrauch machen:

In den n (jeweils m-dimensionalen) Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix A

von φ stehen die Bilder der Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,