2 Analysis

2.1 Überbestimmte Gleichungssysteme: Der analytische Blickwinkel

In Vorgriff auf Abschnitt 6.3 beleuchten wir die dort behandelte Problemstellung aus der Perspektive der Analysis, weshalb unter Verweis auf ebenjenen Abschnitt ohne weitere einleitende Worte gleich in medias res gegangen wird:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{array}\right\} \ (*) \ \text{ bzw. } \ \overrightarrow{a} \cdot x + \overrightarrow{b} \cdot y = \overrightarrow{c}$$

mit

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3$$

führt wegen

$$\left| \overrightarrow{a} \cdot x + \overrightarrow{b} \cdot y - \overrightarrow{c} \right| \ \rightarrow \ \text{Min!} \ \ \Rightarrow \ \ \varphi(x,y) = \left| \overrightarrow{a} \cdot x + \overrightarrow{b} \cdot y - \overrightarrow{c} \right|^2 \ \rightarrow \ \text{Min!}$$

bzw.

$$\varphi(x,y) = \left(\overrightarrow{a} \cdot x + \overrightarrow{b} \cdot y - \overrightarrow{c} \right)^2 \ \rightarrow \ \text{Min!}$$

auf

$$\varphi(x,y) = \overrightarrow{a}^2 \cdot x^2 + 2 \cdot \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \right) \cdot xy + \overrightarrow{b}^2 \cdot y^2 - 2 \cdot (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot x - 2 \cdot \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} \right) \cdot y + \overrightarrow{c}^2 \ \rightarrow \ \text{Min!},$$

dadurch auf

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2 \cdot \overrightarrow{a}^2 \cdot x + 2 \cdot \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \right) \cdot y - 2 \cdot (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2 \cdot \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \right) \cdot x + 2 \cdot \overrightarrow{b}^2 \cdot y - 2 \cdot \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} \right)$$

sowie

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2 \cdot \overrightarrow{a}^2, \ \ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2 \cdot \overrightarrow{b}^2 \ \text{und} \ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 2 \cdot \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \right).$$

Für die HESSEsche Matrix H_φ ergibt sich daher

$$H_\varphi = \begin{pmatrix} 2 \cdot \overrightarrow{a}^2 & 2 \cdot \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \right) \\ 2 \cdot \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \right) & 2 \cdot \overrightarrow{b}^2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det H_\varphi = 4 \cdot \left[\overrightarrow{a}^2 \cdot \overrightarrow{b}^2 - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \right)^2 \right]$$

bzw. wegen der Verallgemeinerung von Satz 4 ("LAGRANGE-Identität") aus Abschnitt 6.5 vom $\mathbb{R}^2$ auf den $\mathbb{R}^3$ in Form von

$$\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \right)^2 + \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right)^2 = \overrightarrow{a}^2 \cdot \overrightarrow{b}^2 \ \ (\#)$$

(was der werte L$\substack{\text{e}\\\text{ö}}$ser als Übung zeigen möge) schließlich

$$\det H_\varphi = 4 \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2,$$

ergo (falls $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ gilt, wovon ausgegangen werden kann, da $(*)$ sonst aus drei zueinander parallelen Geraden bestünde, was die Aufgabenstellung ad absurdum führen würde)

$$\det H_\varphi > 0,$$

was zusammen mit

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} > 0$$

jedenfalls auf ein aus dem Gleichungssystem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

ergo

$$\begin{pmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

resultierendes Minimum von φ führt, welches sich aus $(**)$ durch Anwendung der Cramerschen Regel ergibt:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b}^2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b}^2 \end{pmatrix}}, \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b}^2 \end{pmatrix}}$$

Unter Anwendung des Grassmannschen Entwicklungssatzes

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u}$$

(vgl. etwa [48], S. 106ff oder [50], S. 35f) sowie charakteristischer Rechenregeln für das Spatprodukt (vgl. etwa [48], S. 104ff) und das vektorielle Produkt lassen sich die Zähler wie folgt ...

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= [(\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}] \cdot \vec{b} = \\ &= \left[\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}\right] \cdot \vec{b} = \left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right), \\ (\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) &= [(\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a}] \cdot \vec{c} = \\ &= \left[\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{a}\right] \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot (\vec{a} \times \vec{c}), \end{aligned}$$

... vereinfachen, was uns somit unter erneuter Verwendung von $(\#)$ auf

$$(x|y) = \left(\frac{\left(\vec{c} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)}{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2} \middle| \frac{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot (\vec{a} \times \vec{c})}{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2} \right)$$

führt und eine auffällige Ähnlichkeit zur Cramerschen Regel zeigt.

6.3 Überbestimmte Gleichungssysteme: Der geometrische Blickwinkel

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage nach der besten Näherungslösung für lineare Gleichungssysteme aus $\mathbb{R}^{(3,2)}$ (d.h. es liegen 3 lineare Gleichungen in 2 Variablen vor), wobei wir einer Idee aus [4], S. 466, folgen (von wo auch die Abbildung auf der nächsten Seite übernommen wurde), welche wir aber über das ebda vorliegende konkrete Beispiel hinaus verallgemeinern, um letztlich eine generelle Lösungsformel herzuleiten.

Dass es sich dabei im Allgemeinen tatsächlich um ein überbestimmtes Gleichungssystem handelt, suggeriert ja bereits die positive Differenz aus der Gleichungs- und der Variablenanzahl und wird durch die geometrische Interpretation der drei Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \\ a_3x+b_3y=c_3 \end{array}\right\} \; (*) \quad \text{bzw.} \quad x\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\vec{a}}+y\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}=\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{\vec{c}} \; (**)$$

als je eine Gerade schließlich besiegelt, da drei Geraden einander bis auf Ausnahmefälle (wie etwa die Höhen, Strecken- und Winkelsymmetralen oder Schwerlinien eines Dreiecks) nicht in einem gemeinsamen Punkt schneiden, sondern die Anschauungsebene in sieben Bereiche (drei Winkelfelder, ein Dreieck sowie drei von einer Strecke und zwei Halbgeraden begrenzte nach einer Seite offene Bereiche) unterteilen.

Um nun dennoch ein $(x|y)\in\mathbb{R}^2$ zu bestimmen, welches (wenn es $(*)$ schon nicht exakt zu lösen vermag) $(*)$ zumindest möglichst nahekommt, schreiben wir die linke Seite von $(*)$ in der äquivalenten Form

$$\begin{pmatrix} a_1x+b_1y \\ a_2x+b_2y \\ a_3x+b_3y \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b} \quad \text{resp.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}}_{A}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

an und legen unser Hauptaugenmerk jetzt auf die via

$$\varphi:\ \mathbb{R}^2 \ \to\ \mathbb{R}^3,\ \mathfrak{x}\mapsto\mathfrak{y}=\varphi(\mathfrak{x})=A\cdot\mathfrak{x}$$

definierte lineare Abbildung φ:

Multiplizieren wir

$$\mathfrak{y}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}$$

beiderseits mit $\vec{a}\times\vec{b}$, so erhalten wir mit

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\mathfrak{y}=0$$

die Gleichung einer durch den Ursprung des $\mathbb{R}^3$ verlaufenden Ebene ε, bei welcher es sich demnach um das Bild von φ handelt.

Nun liegt der "Zielpunkt" $Z(c_1|c_2|c_3)$ (welchen wir nach oben mit seinem Ortsvektor $\vec{c}$ identifizieren können) aber im Allgemeinen nicht in ε, weshalb wir nun danach trachten, sozusagen als Kompromiss zumindest einen Punkt F in ε zu ermitteln, welcher Z möglichst nahe kommt, was dann entsprechend auch einer Lösung von $(*)$ ziemlich nahekommen wird, wenn wir zum Punkt F noch sein Urbild bezüglich φ ermitteln.

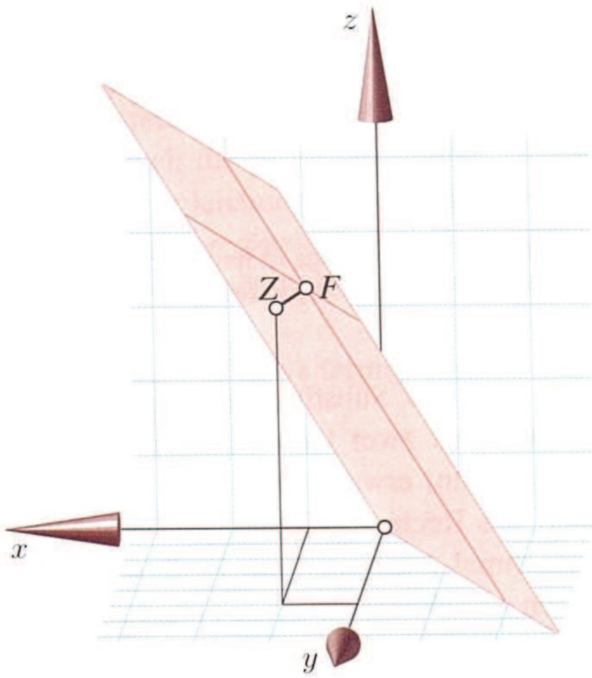

Abbildung 1: ([4], S. 466)

Gehen wir also ans Werk, wobei wir gemäß der linken Abbildung für F naheliegenderweise den Fußpunkt von Z bzgl. ε wählen werden:

Da es sich bei der Trägergerade der Strecke ZF gerade um die Normale n auf ε durch Z handelt, gilt entsprechend

$$n: \ \mathfrak{y} = \overrightarrow{c} + t \cdot \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right),$$

was für $\varepsilon \cap n$ die "Schnittgleichung"

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} + t \cdot \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)^2 = 0$$

mit der Lösung

$$t = -\frac{\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}}{\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)^2}$$

impliziert und somit auf

$$\mathfrak{y} = F = \overrightarrow{c} - \frac{\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}}{\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)^2} \cdot \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)$$

führt.

Für die gesuchte optimale Approximation $(x|y)$ von $(*)$ zieht dies

$$x \cdot \overrightarrow{a} + y \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} - \frac{\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}}{\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)^2} \cdot \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)$$

nach sich, was nach beidseitiger Multiplikation mit $\overrightarrow{a}$ bzw. $\overrightarrow{b}$ die Gleichungen

$$\overrightarrow{a}^2 \cdot x + \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) \cdot y = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} \ (\#)$$

und

$$\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) \cdot x + \overrightarrow{b}^2 \cdot y = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} \ (\#\#)$$

generiert, also auf ein lineares Gleichungssystem aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$ führt, welches in Abschnitt 2.1 gelöst wird, wo die Fragestellung des vorliegenden Abschnitts alternativ mit Methoden der mehrdimensionalen Analysis behandelt wird und wir dadurch ebenso auf das aus (#) und (##) resultierende Gleichungssystem stoßen.