Lineare Algebra und Analytische Geometrie im Wahlpflichtgegenstand Mathematik (8BCD)

Um die Orthogonalität zweier Ebenen im $\mathbb{R}^3$ nachzuweisen, gibt es natürlich die Möglichkeit, über das *Vektorielle Produkt* zweier Stellungsvektoren jeder der beiden Ebenen Normalvektoren der Ebenen zu ermitteln und dann zu zeigen, dass diese aufeinander normal stehen, woraus dann auch die Orthogonaltät der Ebenen folgt.

Eine weitaus elegantere (wenngleich natürlich sehr **abstrakte** Methode) nützt einen sehr hübschen Satz der Vektoralgebra aus:

$\boxed{\text{Satz.}}$ Sind $\overrightarrow{a_1}$ und $\overrightarrow{b_1}$ sowie $\overrightarrow{a_2}$ und $\overrightarrow{b_2}$ jeweils linear unabhängige Stellungsvektoren zweier Ebenen ε_1 und ε_2, so gilt:

$$\varepsilon_1 \;\perp\; \varepsilon_2 \quad \Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} & \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{b_2} \\ \overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{b_1} & \overrightarrow{b_1} \cdot \overrightarrow{b_2} \end{pmatrix} = 0$$

Wende diesen Satz auf die folgenden beiden Figuren an (wobei der linke Würfel eine Seitenlänge von 2 aufweist und alle Punkte aus (fortgesetzten) Streckenhalbierungen und Spiegelungen hervorgehen, der rechte Würfel eine Seitenlänge von 8 aufweist und bis auf den Punkt P - welcher eine Einheit von W entfernt liegt - wiederum alle Punkte durch (fortgesetzte) Streckenhalbierungen und Spiegelungen entstehen), um zu zeigen, dass die beiden Ebenen jeweils aufeinander normal stehen!

$\boxed{\text{Bemerkung}}$. Aus der Sicht der universitären Linearen Algebra läßt sich sich die Matrix aus dem Satz als "nordöstlicher Teil" der sogenannten Gramschen Matrix der Vektoren $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ und $\overrightarrow{b_2}$ interpretieren, also als "Durchschnitt" der ersten und zweiten Zeile mit der dritten und vierten Spalte der Matrix $A_{ij} = [\overrightarrow{c_i} \cdot \overrightarrow{c_j}]$, wobei $\overrightarrow{c_1} = \overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{c_2} = \overrightarrow{b_1}$, $\overrightarrow{c_3} = \overrightarrow{a_2}$ und $\overrightarrow{c_4} = \overrightarrow{b_2}$.

Wien, im August 2011. Dr. Robert Resel, e. h.