Rund um die Mathematik-Uhr

In meinem Arbeitszimmer hängt (was für alle Menschen, unter denen ich als "Mathemaniac" verschrien bin, keine Überraschung ist!☺) die links abgebildete Mathematik(er)-Uhr, an der mir kürzlich etwas aufgefallen ist:

Der Eintrag bei 4 Uhr schien mir kurzweilig falsch, da ich den Verdacht hegte, dass die Masterminds hinter dieser Uhr womöglich vergessen hatten, um ¾ eine Klammer zu setzen, weshalb ich zu rechnen begann.

Erstaunlicherweise liefert sowohl die Summe ohne Klammer als auch jene mit Klammer dasselbe Resultat (nämlich – sic! – 4).

Die sich automatisch ergebende Frage, ob es neben dem Zahlenpaar (a|b)=(3|4) noch weitere Zahlenpaare mit der Eigenschaft $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a}{b^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^k$ (*) gibt, ist wegen $s_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a}{b^k}=\frac{a}{1-\frac{1}{b}}=\frac{ab}{b-1}$,

$$s_2=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{a}{b}}=\frac{b}{b-a}$$ und somit $$s_1=s_2 \Leftrightarrow \frac{ab}{b-1}=\frac{b}{b-a} \Leftrightarrow ab-a^2=b-1$$

$$\Leftrightarrow b(a-1)=a^2-1 \Leftrightarrow b=a+1$$ (wobei der triviale Sonderfall a=1 ausgenommen wurde!)

rasch beantwortet, lässt aber m.E. für vorwissenschaftliche Arbeiten noch viele Fragen offen, wie etwa:

- Gibt es andere Argumentationsmöglichkeiten zum Auffinden aller Lösungen von (*) (z.B. rein figurale Beweise wie in Alsinas und Nelsens Klassiker ***Proofs without words***)?
- abseits dieser Thematik: Welche Möglichkeiten zur Ergründung der hinter (etwa!) 8 Uhr und 10 Uhr steckenden Sachverhalte[1] gibt es (siehe etwa Resel, Robert (1999): Ausbaumöglichkeiten der Oberstufenschulmathematik. Diplomarbeit, Universität Wien, oder Resel, Robert (2014): Reise zum Mittelpunkt der Mathematik. Logos Verlag, Berlin)?

Wien, im März 2014. Dr. Robert Resel, eh.

[1]: Nota bene: Die hinter 2 Uhr, 5 Uhr, 6 Uhr, 7 Uhr, 9 Uhr, 11 Uhr und 12 Uhr steckenden Sachverhalte sind ja eher trivial, wohingegen jene bei 1 Uhr, 3 Uhr doch schon (zumindest für Schüler) recht tief in die Analysis eintauchen (besonders 1!).