Preprint ausgewählter Seiten eines meiner nächsten Bücher für die Referate *11* bis *15* zum Thema

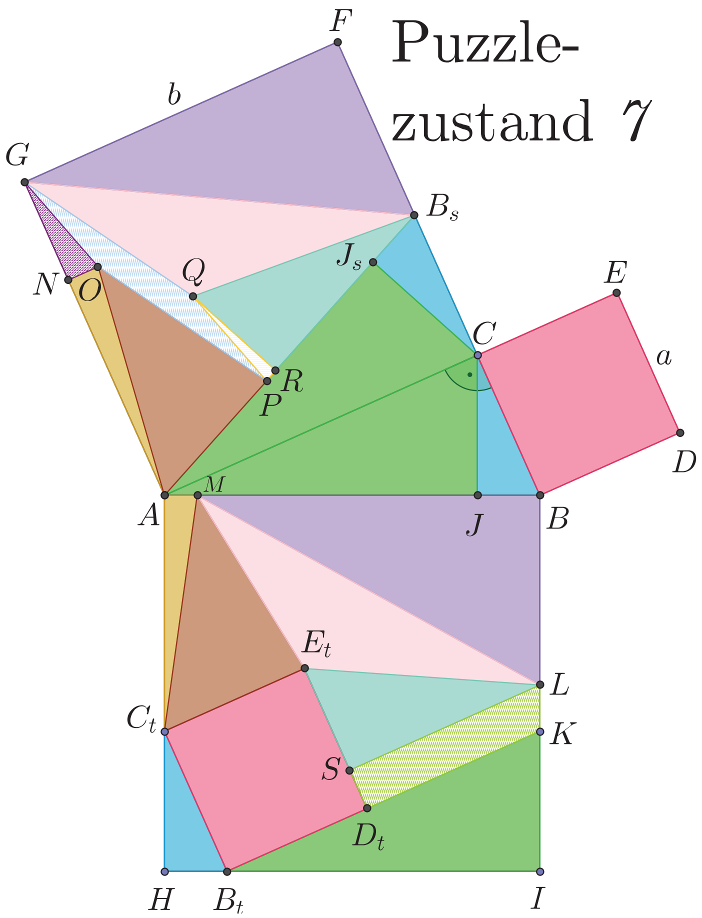
Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes

im Rahmen des Geometrieunterrichts (dm) der Realisten der 4AD sowie der 4E

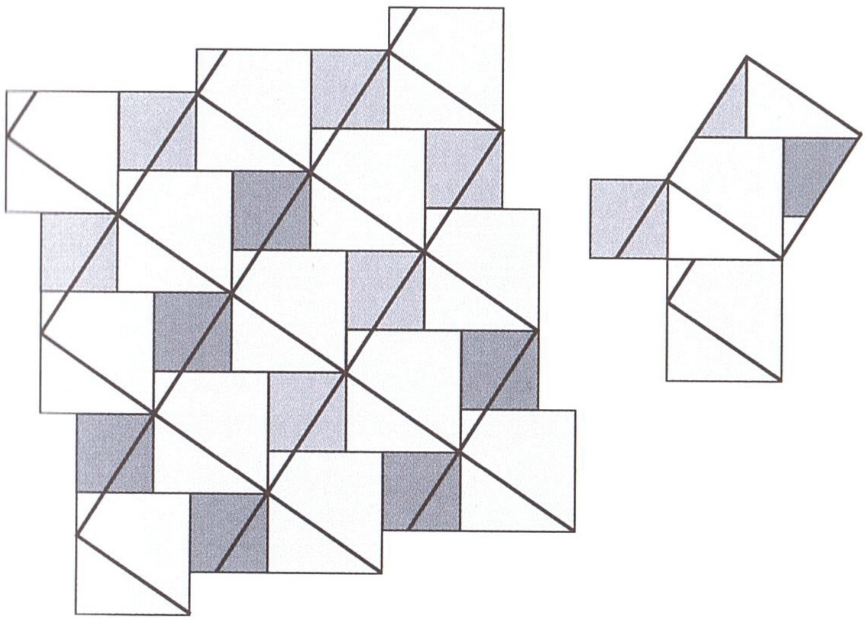
- Referat *11*: Beweis 36 auf S. 155f
- Referat *12*: Beweise 45 und 46 auf S. 166f
- Referat *13*: Beweis 47 auf S. 168f
- Referat *14*: Beweis 52 auf S. 174f (S. 175: nur die ersten zwei & die letzten sechs Zeilen)
- Referat *15*: Beweis 54 auf S. 177f

Wien, im Februar 2017.

Dr. Robert Resel, eh.



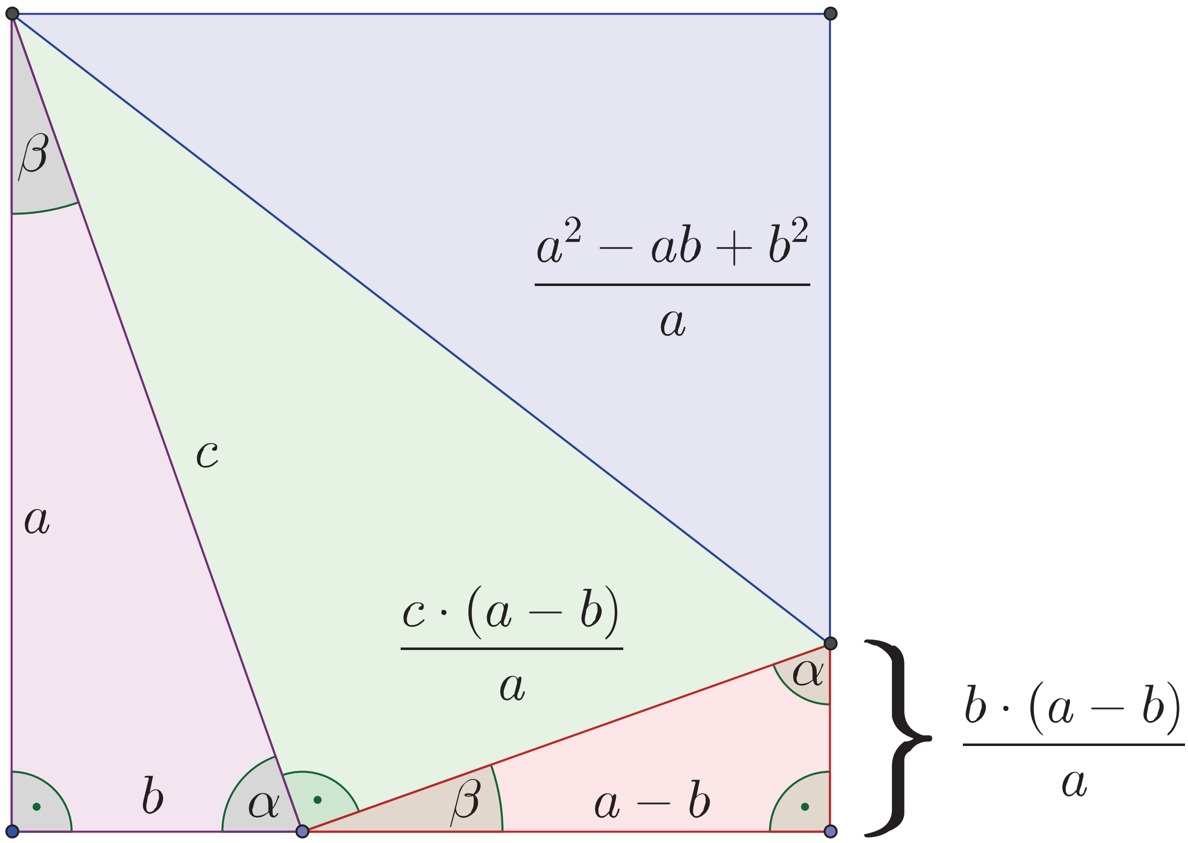
Puzzle-zustand *7*



Bemerkung: Obiger Beweis lässt sich auch als sogenannter *proof without words* führen, was laut [2], S. 47 bereits im neunten vorchristlichen Jahrhundert Annairizi von Arabien vermochte (vgl. untere Abbildung, entnommen a.a.O.[51]).

5.1.2 Ein 36. Beweis des Lehrsatzes von Pythagoras ...

... ist der Inhalt des vorliegenden kurzen Abschnitts, wozu wir die untere Abbildung be-



[51] Der Autor von[2] hat übrigens gemeinsam mit Roger B. Nelsen mit [5] ein wundervolles Buch über schöne Beweise in der Mathematik verfasst, welches unter anderem auch einige derartige *proofs without words* enthält, was kein Zufall ist, zumal Nelsen bereits zuvor mit [3] eine ausschließlich *darauf focussierte* Publikation (samt Fortsetzung [4]) vorgelegt hat.

trachten, in welcher ein Quadrat der Seitenlänge a wie obig illustriert in vier rechtwinklige Dreiecke partitioniert wird, von denen zwei zueinander ähnlich sind (was der werte L $\overset{\text{e}}{\text{ö}}$ ser ebenso zur Übung begründen möge wie die bereits in der Figur angegebenen Längen, welche über a, b und c hinausgehen), was zunächst auf die Gleichung

$$\frac{ab}{2} + \frac{b \cdot (a-b)^2}{2a} + \frac{c^2 \cdot (a-b)}{2a} + \frac{a \cdot (a^2 - ab + b^2)}{2a} = a^2 \quad (*)$$

führt, die durch weitere Umformung ...

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 b + b \cdot (a-b)^2 + c^2 \cdot (a-b) + a \cdot (a^2 - ab + b^2) = 2a^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 \cdot (a-b) = 2a^3 - a^2 b - b \cdot (a-b)^2 - a \cdot (a^2 - ab + b^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 \cdot (a-b) = a \cdot (2a^2 - ab - a^2 + ab - b^2) - b \cdot (a-b)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 \cdot (a-b) = a \cdot (a^2 - b^2) - b \cdot (a-b)^2$$

$\Updownarrow$ (wobei $a \neq b$ zu beachten und zu begründen ist!)

$$c^2 = a \cdot (a+b) - b \cdot (a-b)$$

... schließlich

$$c^2 = a^2 + b^2$$

impliziert, $\Box$.

5.1.3 Ein 37. Beweis des Lehrsatzes von Pythagoras ...

... ist der Inhalt des vorliegenden kurzen Abschnitts, wozu wir die untere Abbildung betrachten, in welcher die Seiten AG und BD der Kathetenquadrate $\Box ACFG$ und $\Box BDEC$ über die Punkte A und B hinaus verlängert wurden, was innerhalb des Hypotenusenquadrats $\Box AHIB$ die zueinander ähnlichen (was der werte L $\overset{\text{e}}{\text{ö}}$ ser zur Übung begründen möge) rechtwinkligen Dreiecke ΔALH und ΔBAK generiert, welche zusammen mit dem Trapez $IJKL$ sowie dem zu ΔALH kongruenten Dreieck ΔIBJ eine Partition von $\Box AHIB$ bilden. Dies führt zunächst (wobei der Nachweis der entsprechenden - bereits in der Abbildung beschrifteten - Streckenlängen nebst der bereits nachgewiesenen Ähnlichkeit $\Delta ALH \sim \Delta BAK$ ebenso dem werten L $\overset{\text{e}}{\text{ö}}$ ser zur Übung überlassen bleibt) zur Gleichung

$$\frac{ac^2}{2b} + 2 \cdot \frac{ab}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(b + \frac{c^2}{b} - a \right) \cdot (b-a) = c^2 \quad (*)$$

führt, die durch weitere Umformung ...

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ac^2}{2b} + ab + \frac{1}{2} \cdot (b-a)^2 + \frac{c^2}{2b} \cdot (b-a) = c^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{2} + ab + \frac{1}{2} \cdot (b-a)^2 = c^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2b + b^3 = bc^2 \quad \Leftrightarrow \quad b \cdot (a^2 + b^2) = bc^2w$$

...

$$a^2 + b^2 = c^2$$

impliziert, $\Box$.

Übungsaufgabe *1* für den werten L$\overset{\text{E}}{\text{Ö}}$ser: Man beweise, dass das Trapez genau dann die Hälfte des Quadrats einnimmt, wenn für c die Darstellung $c = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot (b - a)$ gilt und zeige ferner auch die äquivalente Formel

$$c = \sqrt{\frac{2a}{b-a}} \cdot b.$$

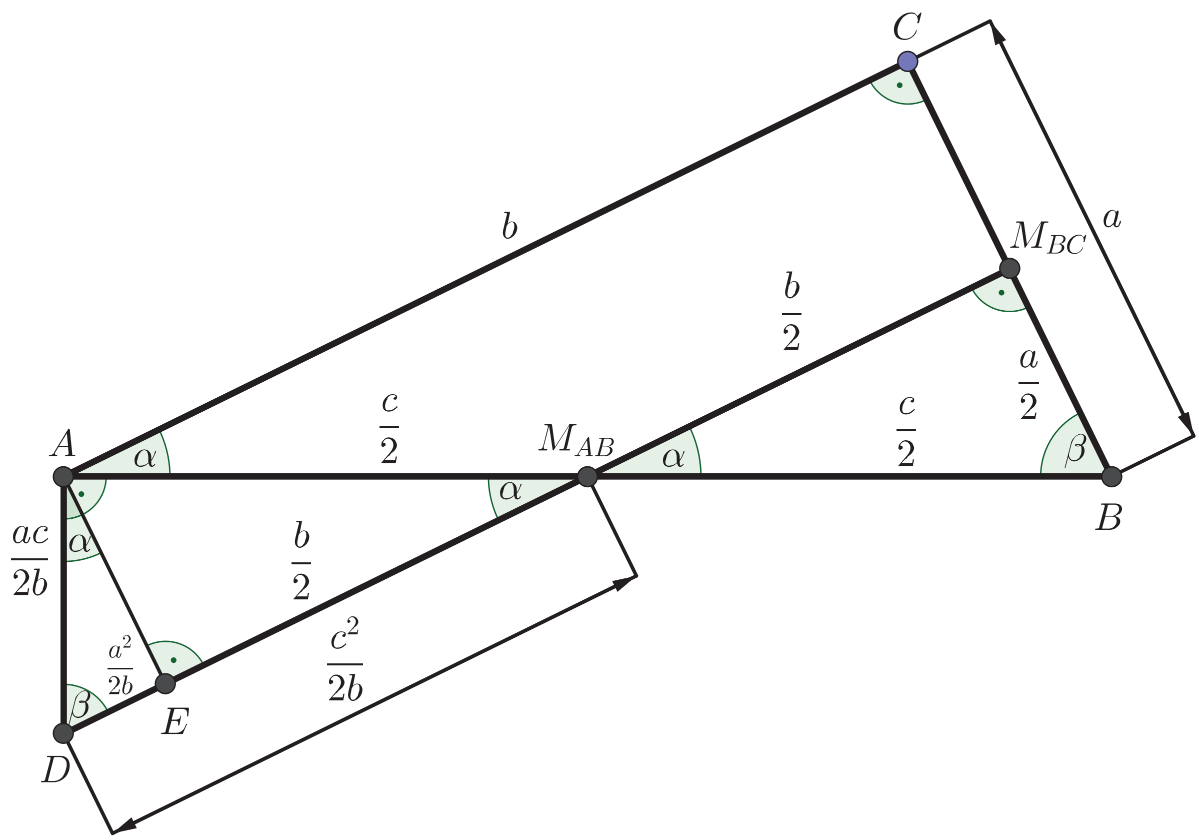
Übungsaufgabe *2* für den werten L$\overset{\text{E}}{\text{Ö}}$ser: Man beweise, dass die beiden zueinander ähnlichen Dreiecke genau dann jeweils ein Viertel des Quadrats einnehmen, wenn für c die Darstellung

$$c^2 = 2ab$$

gilt und schließe daraus zusammen mit dem Lehrsatz des Pythagoras und einer geeigneten binomischen Formel darauf, dass dies $a = b$ impliziert.

5.1.9 Ein 45. und 46. Beweis des Lehrsatzes von Pythagoras ...

... ist der Inhalt des vorliegenden kurzen Abschnitts, wozu wir die untere Abbildung be-



trachten, wo ausgehend vom rechtwinkligen Dreieck ΔABC die Streckensymmetrale m_{BC} eingezeichnet wurde, welche AB aus Ähnlichkeitsgründen ebenso im Mittelpunkt M_{AB} sowie die Normale auf AB durch A in D schneidet. Ferner sei E der Schnittpunkt der Normale auf DM_{AB} durch A mit DM_{AB}.

Vor der weiteren Argumentation ergeht zunächst die folgende

ÜBUNGSAUFGABE *1* AN DEN WERTEN L$\overset{\text{E}}{\text{Ö}}$SER: Man beweise die Ähnlichkeit der Dreiecke ΔABC, $\Delta M_{AB}BM_{BC}$, $\Delta M_{AB}DA$, ΔADE und $\Delta M_{AB}AE$, wobei im Fall von $\Delta M_{AB}BM_{BC}$ und $\Delta M_{AB}AE$ sogar Kongruenz vorliegt. Ferner sind darauf aufbauend die in obiger Abbildung bereits beschrifteten Katheten- und Hypotenusenlängen herzuleiten.

Auf Basis der Resultate der obigen Übungsaufgabe ergibt sich wegen

$$\overline{DM_{AB}} = \overline{DE} + \overline{EM_{AB}}$$

gemäß der (im Zuge der Übungsaufgabe bewiesenen) Beschriftungen zunächst

$$\frac{a^2}{2b} + \frac{b}{2} = \frac{c^2}{2b}$$

bzw. nach Multiplikation dieser Gleichung mit $2b$ schließlich

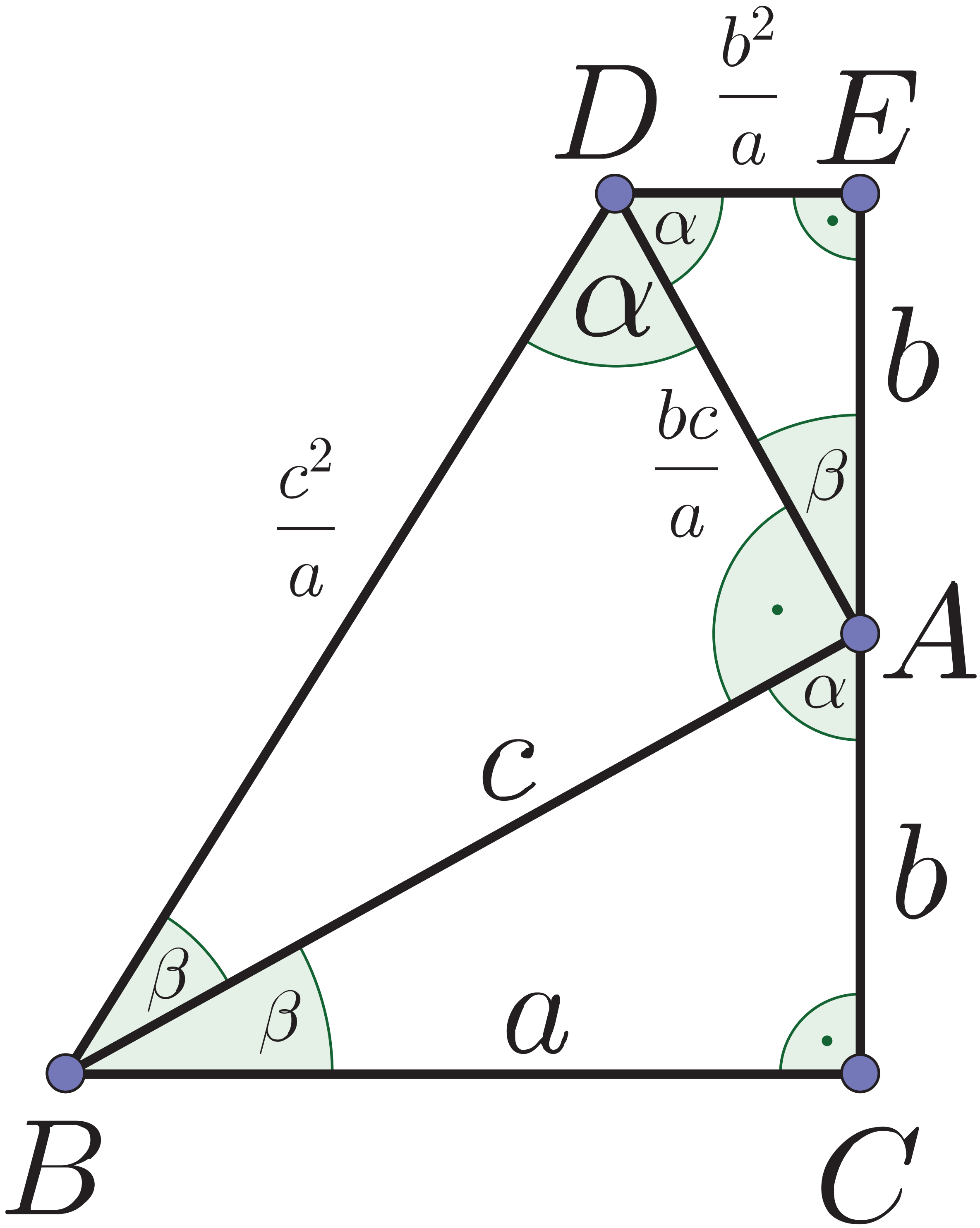
$$a^2 + b^2 = c^2, \ \square.$$

ÜBUNGSAUFGABE *2* AN DEN WERTEN L$\overset{\text{E}}{\text{Ö}}$SER: Man erläutere ebenso auf Basis der umseitigen Abbildung den folgenden 46. Beweis des Lehrsatzes von PYTHAGORAS:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{2b} + \frac{b}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ac}{2b} \cdot \frac{c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(a^2 + b^2) \cdot a}{8b} = \frac{ac^2}{8b} \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2, \ \square$$

5.1.10 Ein 47. Beweis des Lehrsatzes von Pythagoras ...

... ist der Inhalt des vorliegenden kurzen Abschnitts, wozu wir die untere Abbildung be-



trachten, in welcher zunächst von einem rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit den Kathetenlängen $a = \overline{BC}$ und $b = \overline{AC}$ sowie der Hypotenusenlänge $c = \overline{AB}$ ausgegangen wird.

Spiegelt man die Trägergerade der Kathete BC an jener der Hypotenuse AB und schneidet die gespiegelte Gerade mit der Normalen auf AB durch A, so entsteht ein zu ΔABC ähnliches Dreieck ΔABD.

$\boxed{\text{Übungsaufgabe } \mathit{1} \text{ für den werten L}\overset{\text{E}}{\text{Ö}}\text{ser:}}$ Man leite die in der obigen Abbildung bereits beschriftete fehlende Kathetenlänge sowie die entsprechende Hypotenusenlänge im Dreieck ΔABD unter Verwendung von $\Delta ABC \sim \Delta ABD$ sowie unter Gebrauch des Strahlensatzes her!

Legt man jetzt noch eine Normale n auf die Trägergerade g von AC durch D und schneidet n mit g, so resultiert daraus ein weiteres zu den beiden bereits vorhandenen Dreiecken wiederum ähnliches Dreieck ΔDAE.

$\boxed{\text{Übungsaufgabe } \mathit{2} \text{ für den werten L}\overset{\text{E}}{\text{Ö}}\text{ser:}}$ Man leite die in der obigen Abbildung bereits beschrifteten Kathetenlängen im Dreieck ΔDAE unter Verwendung von $\Delta ABC \sim \Delta DAE$ sowie unter Gebrauch des Strahlensatzes her!

Berechnen wir nun schließlich den Flächeninhalt des insgesamt generierten Trapezes $CEDB$ auf zwei Arten, so liefert dies

$$\left(a + \frac{b^2}{a}\right) \cdot b = \frac{ab}{2} + \frac{bc^2}{2a} + \frac{b^3}{2a}$$

bzw.

$$\frac{a^2 + b^2}{a} \cdot b = \frac{a^2 b + bc^2 + b^3}{2a}$$

resp. nach Multiplikation mit $\frac{2a}{b}$ in weiterer Folge

$$2a^2 + 2b^2 = a^2 + c^2 + b^2,$$

ergo

$$a^2 + b^2 = c^2, \ \Box.$$

5.1.11 Drei weitere Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes ("PLS")

In diesem Abschnitt ergänzen wir die bislang aus unseren Überlegungen in den letzten fünf Bänden (ausgenommen [35] und [36]) sowie dem vorliegenden Band folgenden 47 Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes ("**PLS**") um drei weitere Herleitungen, womit wir dann summa summarum auf 50(!) Beweise kommen.

Wir beginnen mit einer Verbindung von drei Elementen, nämlich:

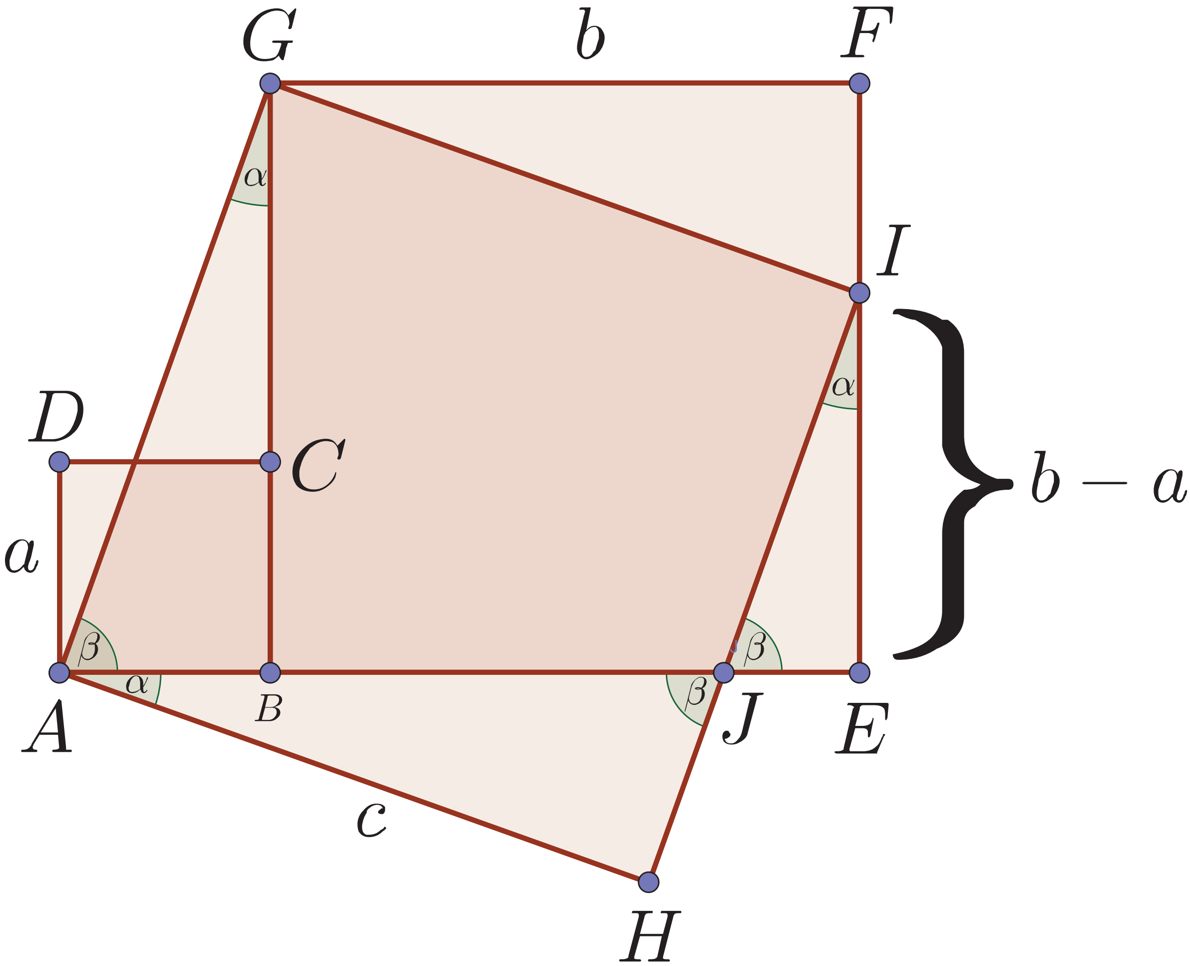
Sehnen-Tangenten-Satz, PLS und zwei binomische Formeln

Bei diesem Unterabschnitt handelt es sich um eine erweiterte Version des Artikels [33] des Autors der vorliegenden Zeilen und geht zunächst vom Sehnen-Tangenten-Satz aus (den wir bereits in [34], S. ... bewiesen haben, jedoch mit vektoriellen Methoden, was auch Vektorbeträge und somit freilich den PLS voraussetzt, weshalb wir nun einen elementargeometrischen Beweis führen werden), den wir zunächst (vgl. vorherige Klammerbemerkung) synthetisch beweisen werden:

Dazu gehen wir von der unteren Abbildung aus, ergo von einer Kreislinie k mit dem Ra-

5.1.12 Ein 51. und 52. Beweis des Lehrsatzes von Pythagoras ...

... ist der Inhalt des vorliegenden kurzen Abschnitts, wozu wir die untere Abbildung be-



trachten, anhand der wir ausgehend vom Quadrat $\square ABCD$ bzw. $\square BEFG$ resp. $\square AHIG$ der Seitenlänge a bzw. b resp. c für die Katheten(längen) $a = \overline{AB}$ und $b = \overline{BG}$ sowie die Hypotenuse(nlänge) $c = \overline{AG}$ des Dreiecks ΔGAB folgende Überlegungen anstellen $\Big($wobei der werte L$\overset{e}{\text{ö}}$ser zur Übung das mehrfache Auftreten der Winkel α und β begründen möge$\Big)$:

- Da $\Big($wie der werte L$\overset{e}{\text{ö}}$ser zur Übung begründen möge$\Big)$ die Dreiecke ΔGAB und ΔGIF kongruent sind, gilt für den Flächeninhalt $\mathcal{A}_{\square AHIG}$ des Quadrats $\square AHIG$ demnach

$$\mathcal{A}_{\square AHIG} = \mathcal{A}_{\square BEFG} - \mathcal{A}_{\Delta IJE} + \mathcal{A}_{\Delta AJH} \quad (*).$$

- Wegen der Ähnlichkeiten

$$\Delta IJE \sim \Delta GAB \quad \text{und} \quad \Delta AJH \sim \Delta GAB$$

sowie

$$\overline{JE} = \frac{a(b-a)}{b}$$

(was wiederum der werte L $\overset{\text{e}}{\text{ö}}$ ser zur Übung begründen möge) und damit

$$\overline{AJ} = \overline{AB} + \overline{BE} - \overline{JE} = a + b - \frac{a(b-a)}{b} = \frac{ab + b^2 - ab + a^2}{b} = \frac{a^2 + b^2}{b}$$

geht (∗) somit in

$$c^2 = b^2 - \frac{a(b-a)^2}{2b} + \frac{ab}{2} \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{bc}\right)^2$$

(wobei der werte L $\overset{\text{e}}{\text{ö}}$ ser die Darstellung von $\mathcal{A}_{\Delta AJH}$ zur Übung begründen möge)

bzw.

$$c^2 = b^2 - \frac{a(b-a)^2}{2b} + \frac{a(a^2 + b^2)^2}{2bc^2}$$

resp.

$$c^2 - b^2 = \frac{a}{2bc^2} \cdot [(a^2 + b^2)^2 - c^2(b-a)^2] \quad (**)$$

über, was weiter umgeformt ...

$$(**) \quad \Leftrightarrow \quad 2bc^4 - 2b^3c^2 = a(a^2 + b^2)^2 - a(b-a)^2c^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 2bc^4 - [2b^3 - a(b-a)^2]c^2 - a(a^2 + b^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = \frac{\overbrace{2b^3 - a(b-a)^2}^{=:k} \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{4b} \quad \text{mit} \quad \mathcal{D} = k^2 + 8ab(a^2 + b^2)^2$$

bzw. wegen
$$\begin{aligned} k &= 2b^3 - ab^2 + 2a^2b - a^3 = 2a^2b + 2b^3 - a^3 - ab^2 = \\ &= 2b(a^2 + b^2) - a(a^2 + b^2) = (2b-a)(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$c^2 = \frac{(2b-a)(a^2 + b^2) \pm (a^2 + b^2)\sqrt{(2b-a)^2 + 8ab}}{4b} =$$
$$= (a^2 + b^2) \cdot \frac{2b - a \pm \sqrt{4b^2 - 4ab + a^2 + 8ab}}{4b} = (a^2 + b^2) \cdot \frac{2b - a \pm \sqrt{4b^2 + 4ab + a^2}}{4b} =$$
$$= (a^2 + b^2) \cdot \frac{2b - a \pm \sqrt{(2b+a)^2}}{4b} = (a^2 + b^2) \cdot \frac{2b - a \pm (2b + a)}{4b}$$
$$\Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad \vee \quad \boxed{c^2 = (a^2 + b^2) \cdot \tfrac{-2a}{4b} < 0 \ (\sim)}$$

... wegen (bzw. entgegen $\boxed{(\sim)}$) schließlich auf

$$c^2 = a^2 + b^2$$

führt, womit der 51. Beweis des Lehrsatzes von PYTHAGORAS abgeschlossen ist.

Ein 52. Beweis ergibt sich, wenn wir die Ähnlichkeit

$$\Delta AJH \sim \Delta GAB$$

zusammen mit

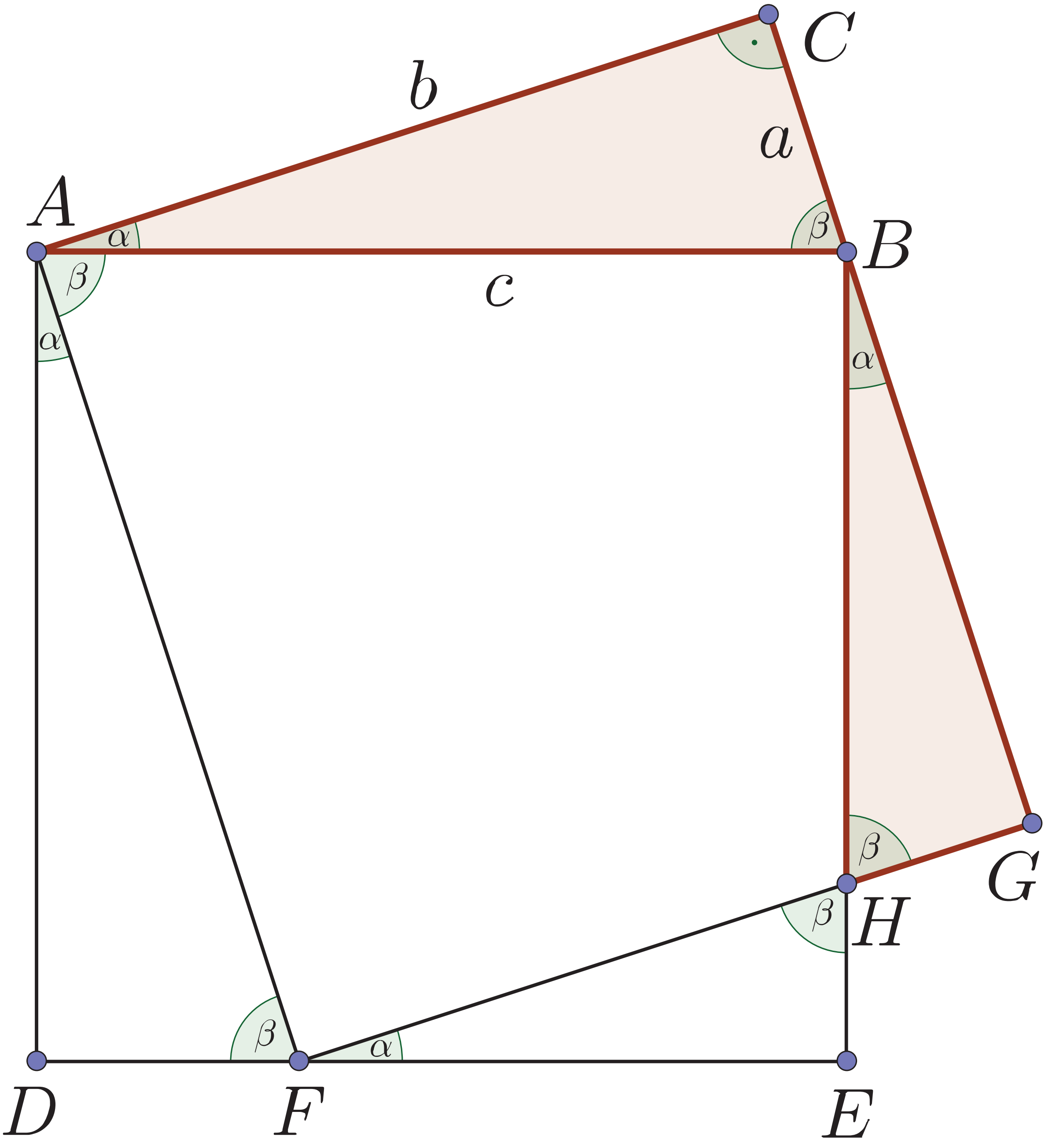
$$\overline{AJ} = \frac{a^2 + b^2}{b}$$

durch Anwendung des Strahlensatz nützen:

$$\overline{AJ} : \overline{AH} = \overline{AG} : \overline{BG}, \quad \text{ergo} \quad \frac{a^2 + b^2}{b} : c = c : b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

5.1.14 Ein 54. Beweis des Lehrsatzes von PYTHAGORAS ...

... ist der Inhalt des vorliegenden kurzen Abschnitts, wozu wir die untere Abbildung be-



trachten, in welcher ausgehend vom rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit der Hypotenusen(länge) $c = \overline{AB}$, den Katheten(längen) $a = \overline{BC}$ und $b = \overline{AC}$ sowie den Innenwinkeln $\alpha = \measuredangle CAB$ und $\beta = \measuredangle CBA$ über der Hypotenuse das Quadrat $\square ADEB$ errichtet wurde, aus dem durch Fällen entsprechender Normaler ferner die zum Ausgangsdreieck ΔABC ähnlichen Dreiecke ΔAFD, ΔFHE sowie ΔBHG generiert werden (Dabei möge der werte L$\stackrel{\text{e}}{\text{ö}}$ser zur Übung die Ähnlichkeiten begründen!).

Dies hat aufgrund des Strahlensatzes (wie der werte L$\stackrel{\text{e}}{\text{ö}}$ser im Detail begründen möge) die Streckenlängen

$$\overline{AF} = \frac{c^2}{b} \quad \text{sowie} \quad \overline{DF} = \frac{ac}{b}$$

und dadurch

$$\overline{BG} = \frac{c^2}{b} - a \quad \text{bzw.} \quad \overline{BG} = \frac{c^2 - ab}{b}$$

zur Folge.

Ferner resultiert daraus

$$\overline{EF} = c - \frac{ac}{b} \quad \text{bzw.} \quad \overline{EF} = \frac{(b-a)c}{b}$$

sowie

$$\overline{EH} = \frac{ac(b-a)}{b^2}$$

und überdies

$$\overline{BH} = c - \frac{ac(b-a)}{b^2} \quad \text{bzw.} \quad \overline{BH} = \frac{(a^2+b^2-ab)c}{b^2},$$

was via

$$\overline{BH} : \overline{BG} = c : b \quad \Rightarrow \quad \frac{(a^2+b^2-ab)c}{b^2} \cdot \frac{b}{c^2-ab} = \frac{c}{b} \quad (*)$$

resp.

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 - ab = c^2 - ab$$

schließlich auf

$$a^2 + b^2 = c^2$$

führt, $\square$.