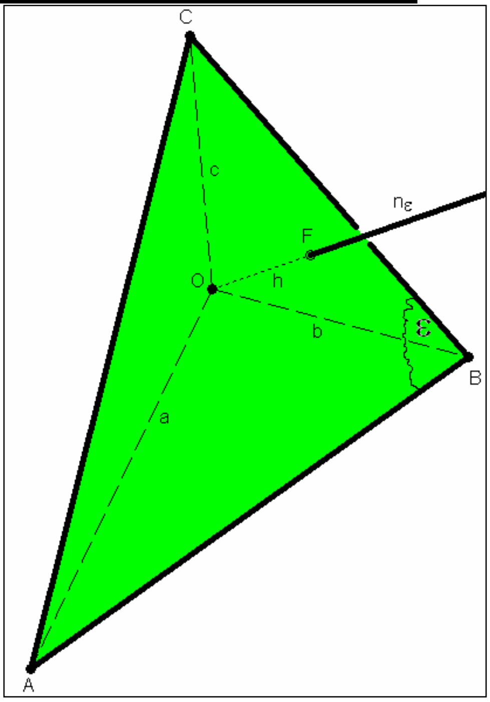
3D-Version des Lehrsatzes von Pythagoras: Die nächste Runde



- *Im Schuljahr 2010/11 haben wir im WPF Mathematik die 3D-Variante des PLS für rechtwinklige Pyramiden behandelt [worüber Jan-Jan oder Joschi-Joschi (nicht nur, aber auch) für Lisa gleich ein Referat halten kann (Auffrischung für Dave, Alfons und Jimmy!☺)!].*

- *Die unten gerahmte Aufgabe 13) aus einer Aufgabensammlung für die 6A aus ebenjenem Schuljahr zeigt eine exemplarische Behandlung dieses Themas (und auch ein wenig darüber hinaus!).*

- *Auf Seite 137 des Jahresberichts der AHS Heustadelgasse des Schuljahres 2004/05 findet man in einem Artikel von mir (welcher eine Art Werbeartikel für die damals von mir geleitete Mathematikolympiade war) die folgende Aufgabe:*

> 3) "Pythagoras steht Kopf!":
> Beweise: In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen a und b sowie der Höhe h auf die Hypotenuse gilt die Gleichung
> $1/a^2 + 1/b^2 = 1/h^2$.

Davon gibt es interessanterweise eine sehr ähnliche 3D-Variante: Ist OABC ein rechtwinkliges Tetraeder mit der Hypotenusenfläche ABC, ε dessen Trägerebene, n_ε die Normale auf ε durch O sowie F der Schnittpunkt von n_ε mit ε, so gilt

$$\boxed{\overline{OA}^{-2} + \overline{OB}^{-2} + \overline{OC}^{-2} = \overline{OF}^{-2}}$$

> 13) Gegeben ist das rechtwinklige Tetraeder ABCD[A(49|0|0), B(0|98|0), C(0|0|147), D(0|0|0)], dessen vier Begrenzungsflächen die Flächeninhalte $F_{\Delta ABC}$, $F_{\Delta ACD}$, $F_{\Delta BCD}$ sowie $F_{\Delta ABD}$ aufweisen.
>
> a) Verifiziere, dass dann $\boxed{F_{\Delta ABD}^2 + F_{\Delta ACD}^2 + F_{\Delta BCD}^2 = F_{\Delta ABC}^2}$ ***(Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes für rechtwinklige Dreiecke aus der Ebene für rechtwinklige Tetraeder im Raum)*** gilt!
>
> b) Mit den Bezeichnungen $\boxed{h = d(D, \varepsilon_{ABC})}$ (Normalabstand!), $a = \overline{AD}$, $b = \overline{BD}$ und $c = \overline{CD}$ läßt sich beweisen [**Wer dies probiert und – ansatzweise – erfolgreich ist, kann mit einem gehörigen $\boxed{\text{BONUS}}$ rechnen, was auch für einen Beweis von Aufgabenteil a) gilt, wobei dazu lediglich A(a|0|0), B(0|b|0), C(0|0|c), D(0|0|0) angesetzt werden braucht!**],
>
> dass $\boxed{\frac{h^2}{3} = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^4 \cdot w_a^2 + b^4 \cdot w_b^2 + c^4 \cdot w_c^2}{4 \cdot F_{\Delta ABC}^2}}$ gilt, wobei hier w_a, w_b bzw. w_c für die Länge jener Tetraederkante steht, welche zur Kante mit der Seitenlänge a, b bzw. c windschief verläuft. Verifiziere diese Formel am vorliegenden konkreten Beispiel!

(vgl. Abbildung recht oben!). DIES GILT ES NUN IM WAHLPFLICHTFACH ZU BEWEISEN!!

Wien, im September 2011. Dr. Robert Resel, e. h.