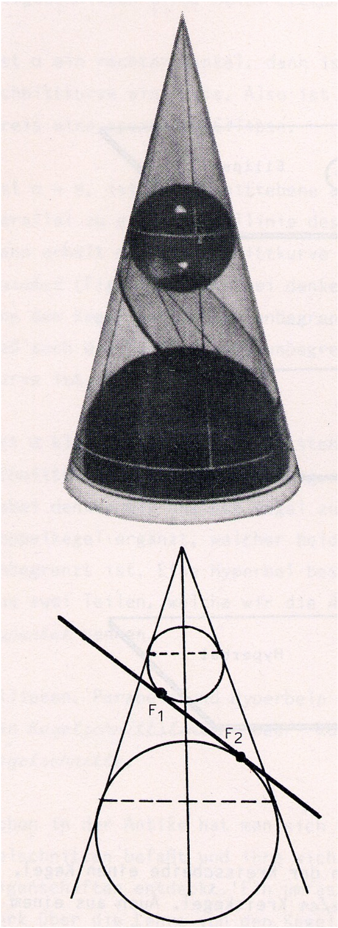
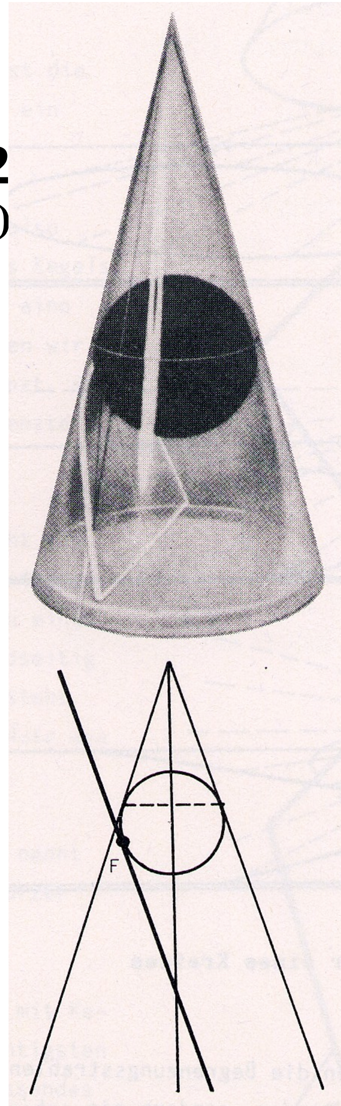


Blatt 7 zum Heimstudium: Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene, Teil 2

(7D, Realgymnasium, PM3, WS 2008/09)



Drei weitere Möglichkeiten zur Herleitung der Berühr(ungs)bedingung für die Parabel [$y^2=2px$] und die Gerade [$y=kx+d$]

1) Suche im Internet unter "Berührbedingung" nach einer weiteren Herleitung der Berührungsbedingung für die Parabel und die Gerade.

   a) Welche Nachteile hat die "konventionelle Form" (eine andere wirst du wohl im www nicht finden; oder doch?!) der Herleitung gegenüber "unserer" Herleitung in der SÜ?

   b) Solltest du welche finden: Erläutere Vorteile der konventionellen Herleitung!

2) Dritte Variante (die du wohl kaum im www finden wirst; oder doch?!): Ausgehend von $\boxed{t: y_T y = p(x + x_T)}$ formst du zunächst zu $\boxed{t: \left(-\frac{1}{x_T}\right)\cdot x + \frac{y_T}{px_T}\cdot y = 1}$ um und stellst dann einen Koeffizientenvergleich mit $t: y = kx + d$ her, indem du umformst …

$$\boxed{t: \left(-\tfrac{k}{d}\right)x + \tfrac{1}{d}y = 1}$$

… und schließlich vergleichst:

$$\text{Koeffizientenvergleich:} -\frac{1}{x_T} = -\frac{k}{d} \Rightarrow \underbrace{x_T = \frac{d}{k}}_{(*)} \Rightarrow 2px_T = \frac{2dp}{k}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y_T}{px_T} = \frac{1}{d} \Rightarrow y_T{}^2 = \frac{p^2 x_T{}^2}{d^2} \Rightarrow \frac{p^2 x_T{}^2}{d^2} = \frac{2dp}{k} \Rightarrow x_T{}^2 = \frac{2d^3 p}{kp^2} = \frac{2d^3}{kp}$$

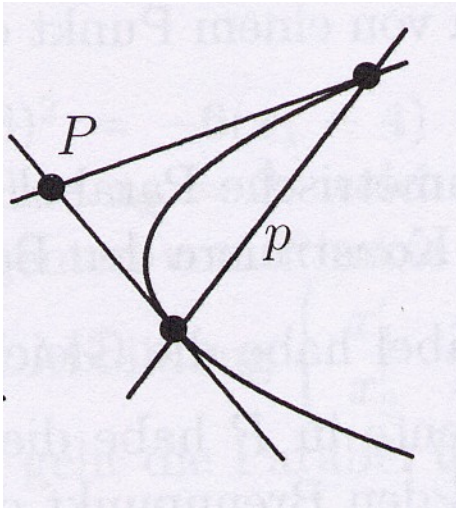
$$\Downarrow (*)!$$

$$\frac{d^2}{k^2} = \frac{2d^3}{kp} \Leftrightarrow d^2 kp = 2k^2 d^3 \Leftrightarrow p = 2kd$$

3) 4. Variante: Wir benutzen den Satz aus Aufgabe 10, demzufolge die Normale n auf $t: y = kx+d$ durch den Schnittpunkt $Y(0|d)$ von t mit der y-Achse durch den Brennpunkt F der Parabel verläuft (d.h. n schneidet die x-Achse in F!). Nun folgt aus $t: -kx + y = d$ sofort $n: x + ky = kd$, woraus sich durch Schnitt von n mit der x-Achse $F(kd|0)$ ergibt, was verglichen mit $F(\frac{p}{2}|0)$ auf $\frac{p}{2} = kd$ bzw. $\boxed{p=2kd}$ führt, w.z.z.w.

Blatt 8 zum Heimstudium: Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene, Teil 2 [7D(Rg), PM3, WS 2008/09]

<u>Tangenten an eine Parabel durch einen Punkt außerhalb des von der Parabel umschlossenen Bereichs (Teil I)</u>



In der Abbildung siehst du eine Parabel par sowie einen außerhalb des von par umschlossenen Bereichs liegenden Punkt P, durch den genau zwei Tangenten an par gelegt werden können.

Wie schon bei den Heimstudienblättern 5 und 6 stellen wir uns auch hier die Frage, wie man zu den Tangenten gelangt, wozu wir ausgehend von der Parabel par [par: $y^2 = 2px$] zwei auf par liegende Punkte T_1 und T_2 wählen, in denen wir die y-Koordinaten frei wählen, da sich nur dann die andere Koordinate eindeutig ergibt (Umgekehrt ist dies nicht der Fall, weil …………………………………......   .)

↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

E R G Ä N Z E   S E L B S T

1\. Versuch: Der Ansatz $T_1(x_1|u)$ würde wegen $u^2 = 2px_1$ auf einen Bruchterm für x_1 führen, wovon wir uns ganz klar distanzieren und deshalb modifizieren:

2\. Versuch: Der Ansatz $T_1(x_1|2pu)$ führt wegen $4p^2u^2 = 2px_1$ auf $x_1 = 2pu^2$, was zu $\boxed{T_1(2pu^2|2pu)}$ bzw. mit dem Ansatz $T_2(x_2|2pv)$ zu $\boxed{T_2(2pv^2|2pv)}$ führt.

Jetzt stellen wir unter Verwendung der Spaltform $\boxed{y\cdot y=p(x+x)}$ von par Gleichungen der Tangenten in T_1 und T_2 auf, was $\boxed{t_1\text{: } 2puy = p(x+2pu^2)}$ bzw. $\boxed{t_2\text{: } 2pvy = p(x+2pv^2)}$ liefert.

Schneiden wir nun t_1 mit t_2 (geschickt: Gleichung von t_1 bzw. t_2 mit v bzw. u multiplizieren, dann jeweils durch p dividieren und dann die rechten Seiten gleichsetzen!), erhalten wir die Gleichung $vx+2pu^2v = ux + 2puv^2$ bzw. $(u-v)x=2pu^2v-2puv^2$ bzw. $(u-v)x=2puv(u-v)$, ergo $x=2puv$, was eingesetzt in (z.B.!) t_1 die Gleichung $2puy=p(2puv+2pu^2)$ bzw. $2uy=2puv+2pu^2$ bzw. $2uy=2pu(v+u)$ bzw. $y=p(u+v)$ liefert, was für den Schnittpunkt P von t_1 mit t_2 das Resultat $\boxed{P(2puv|p(u+v))}$ nach sich zieht.

Stellen wir jetzt eine Gleichung der Gerade $\wp$ durch T_1 und T_2 auf, so erhalten wir wegen

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \begin{pmatrix} 2pv^2-2pu^2 \\ 2pv-2pu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p(v^2-u^2) \\ 2p(v-u) \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} v^2-u^2 \\ v-u \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} (v-u)(v+u) \\ v-u \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} v+u \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -(v+u) \end{pmatrix}$$

mit $\wp : x-(u+v)y = 2pu^2-2pu(u+v)$ bzw. $\wp : x-(u+v)y = -2puv$ bzw. (durch Multiplikation mit p und geschickter Umstellung!) $\wp :\ p(u+v)y = px + 2p^2uv$ bzw. $\boxed{\wp :\ p(u+v)y = p(x+2puv)}$. Wir nennen $\wp$ die **<u>Polare von P bezüglich der Parabel par.</u>**

Blatt 9 zum Heimstudium: Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene, Teil 2 [7D(Rg), PM3, WS 2008/09]

Tangenten an eine Parabel durch einen Punkt außerhalb des von der Parabel umschlossenen Bereichs (Teil II)

Sie trägt also die Berührungspunkte jener Tangenten, die man durch P an par legen kann und entsteht offensichtlich durch Einsetzen von $\boxed{P(2puv|p(u+v))}$ in die Spaltform von par, was wir zusammenfassen:

Definition. Die zum Punkt $P(x_P|y_P)$ zugehörige Gerade $\wp$ mit der Gleichung $\boxed{\wp: y_P y = p(x+x_p)}$ heißt **Polare des Punktes P** bezüglich der Parabel par [par.: $y^2 = 2px$]. Umgekehrt ist P der **Pol von $\wp$ bezüglich par**.

Aus unseren soeben angestellten Überlegungen ergibt sich folgender

Satz. Für einen außerhalb des von einer Parabel par umschlossenen Bereichs liegenden Punkt P trägt seine Polare $\wp$ bezüglich par gerade die Berührungspunkte jener Tangenten, die man von P aus an par legen kann.

Abschließende Bemerkungen:

(1) Liegt P innerhalb des von par umschlossenen Gebiets, so ist $\wp$ eine Passante von par (was man sich intuitiv auch erwartet, da man durch einen Punkt "innerhalb einer Parabel" par keine Tangenten an par legen kann, da ja jede Gerade durch P par in mindestens einem Punkt schneidet!).

(2) Liegt P auf der Parabel, dann ….
Ja, was gilt denn dann?
Überlege selbst, notiere deine
Überlegung in eigenen Worten
und sei auch darauf vorbereitet,
in der nächsten Mathematikstunde
darauf angesprochen zu werden!