Analytische Geometrie der Parabel

Um die Kegelschnittstypen Ellipse und Parabel nicht lose aneinander zu reihen (was unnatürlich wäre), entwickeln wir den Begriff "Parabel" im Folgenden aus dem Begriff der Ellipse, und zwar über den Weg eines Grenzprozesses (vgl. 6. Klasse!):

Einige der nun anschließenden Überlegungen sind – ein wenig adaptiert – [1] entnommen, was einer der Intentíonen dieser Arbeit entspricht:

Um unseren Weg nun beschreiten zu können, gehen wir von einer Ellipse ell mit den Hauptscheiteln $A(0|0)$ und $B(2a|0)$ und den Brennpunkten $F_1(\frac{p}{2}|0)$ und $F_2(2a-\frac{p}{2}|0)$ aus (vgl. Fig. 36!), welche dann durch die Gleichung

$$\text{ell}: b^2(x-a)^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{bzw.} \quad \text{ell}: b^2x^2 - 2ab^2x + a^2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{ell}: y^2 = \frac{2b^2}{a}\cdot x - \frac{b^2}{a^2}\cdot x^2 \ (i)$$

beschrieben wird.

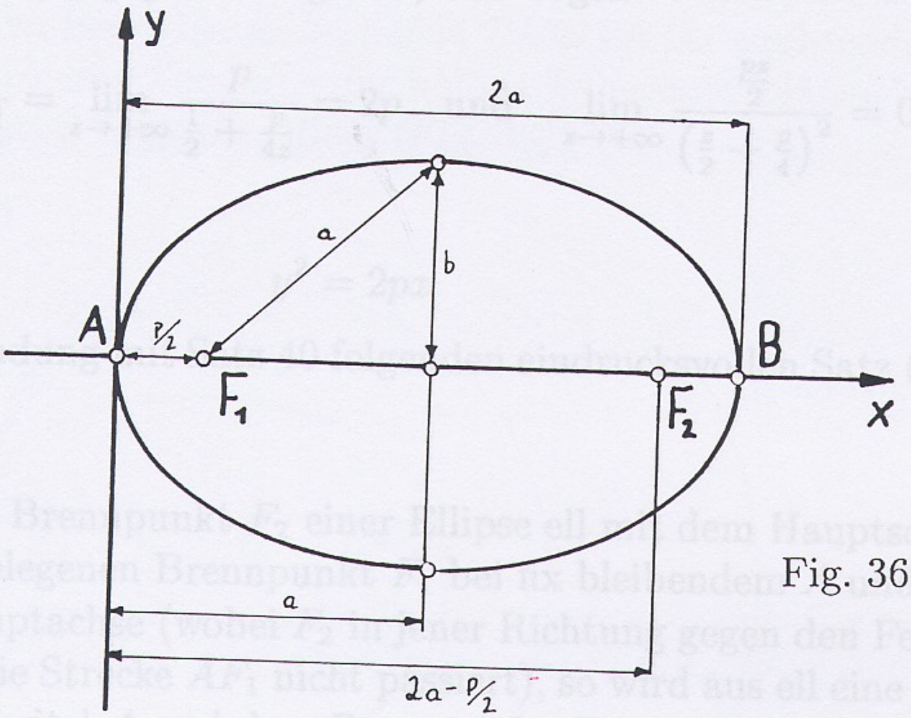


Fig. 36

Beachten wir ferner (vgl. Fig. 36!)

$$\left(a-\frac{p}{2}\right)^2 + b^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = ap - \frac{p^2}{4} \ (ii),$$

und setzen

$$z := 2a - \frac{p}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{z}{2} + \frac{p}{4} \ (iii),$$

woraus dann durch Einsetzen von (iii) in (ii)

$$b^2 = \frac{pz}{2} \ (iv)$$

folgt, so erhalten wir durch Einsetzen von (iii) und (iv) in (i) die Ellipsengleichung

$$\text{ell}: y^2 = \frac{pz}{\frac{z}{2}+\frac{p}{4}} \cdot x - \frac{\frac{pz}{2}}{\left(\frac{z}{2}+\frac{p}{4}\right)^2} \cdot x^2 \ (v).$$

Soweit, so gut! Nun wird man sich berechtigt die Frage stellen, was all dies bezwecken soll. Diese technischen Vorbereitungen sollen es uns nun ermöglichen, folgenden Vorgang analytisch umzusetzen:

Wir wollen uns nun überlegen, was passiert, wenn der rechte Brennpunkt $F_2(z|0)$ von ell in Richtung der positiven $x-$Achse ins Unendliche wandert (also *projektiv formuliert* zum *Fernpunkt* der $x-$Achse wird).

Dazu lassen wir z in (v) gegen $+\infty$ gehen, was wegen

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{pz}{\frac{z}{2}+\frac{p}{4}} = \lim_{z\to+\infty} \frac{p}{\frac{1}{2}+\frac{p}{4z}} = 2p \quad \text{und} \quad \lim_{z\to+\infty} \frac{\frac{pz}{2}}{\left(\frac{z}{2}+\frac{p}{4}\right)^2} = 0$$

die Gleichung

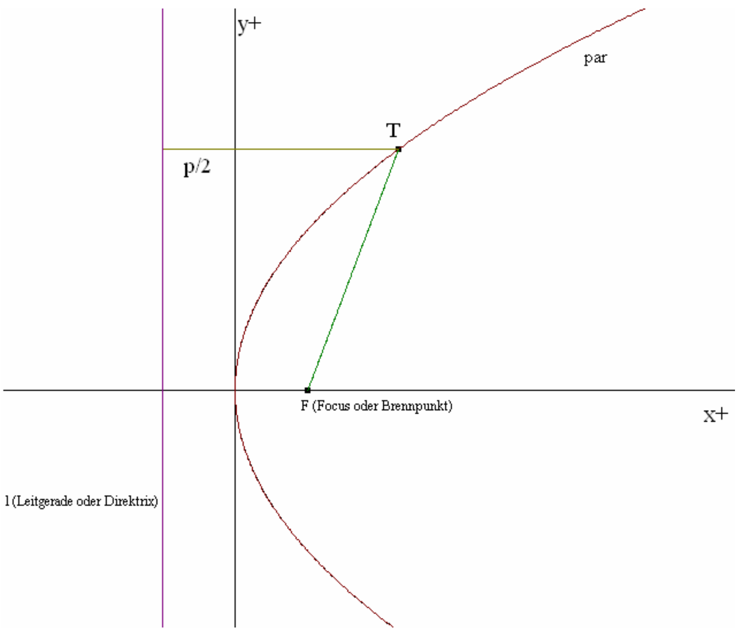
$$y^2 = 2px$$

liefert, welche somit $\boxed{\text{jene Kegelschnittskurve}}$ beschreibt, die sich ergibt, wenn ein Brennpunkt einer Ellipse bei fest bleibendem zweiten Brennpunkt zum Fernpunkt der Hauptachse der Ellipse wird.

Und $\boxed{\text{eben diese Kegelschnittskurve}}$ wird als Parabel par (in erster Hauptlage) mit dem Brennpunkt $F(\frac{p}{2}|0)$ bezeichnet, p selbst wird Parameter der Parabel genannt und hat folgende Bedeutung:

BEACHTE(!): DA $\boxed{\text{T}}$ AUF PAR LIEGT, ERFÜLLEN $\boxed{\text{SEINE}}$ KOORDINATEN DIE PARABELGLEICHUNG!
↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

Fixieren wir einen Punkt $T(x_T|y_T)$ der Parabel par [par: $y^2 = 2px$] und betrachten den zugehörigen Brennstrahl $\overrightarrow{TF} = \begin{pmatrix} p/2 - x_T \\ -y_T \end{pmatrix}$, so ergibt sich für $\overline{TF} = |\overrightarrow{TF}| = \sqrt{(p/2 - x_T)^2 + y_T^2}$ bzw. (weil wegen $T \in$ par ja $\boxed{y_T^2 = 2px_T}$ gilt!) $\overline{TF} = \sqrt{(p/2 - x_T)^2 + 2px_T} = \sqrt{p^2/4 - px_T + x_T^2 + 2px_T} = \sqrt{p^2/4 + px_T + x_T^2} = p/2 + x_T$, was man **folgendermaßen interpretieren kann**:



Da der Normalabstand von T zur Gerade l mit der Gleichung $\boxed{l : x = -p/2}$ exakt $p/2 + x_T$ beträgt und somit gerade der Länge $\overline{TF}$ der Brennstrecke TF entspricht, folgt daraus die Eigenschaft der Parabel, dass für jeden Parabelpunkt der Brennstrahl TF und der Leitstrahl (auf dem der Normalabstand von T zur Leitgeraden l gemessen wird) gleich lang sind.[1]
Ferner ist der Parabelparameter p dadurch als Normalabstand von T zu l interpretierbar.

---

[1]: Betrachtet man die Parabel nicht (wie im vorliegenden Zugang) als entartete Ellipse, sondern **definiert** sie durch die Eigenschaft, die wir gerade **bewiesen** haben, spricht man von der *planimetrischen Definition der Parabel*.

6.3 Parabeltangenten

Aufgrund von Satz 41, demzufolge die Parabel aus der Ellipse hervorgeht, wenn einer ihrer Brennpunkte zum Fernpunkt ihrer Hauptachse wird, können wir nun mit Leichtigkeit durch Anwendung von Satz 5 und eben Satz 41 unmittelbar die entsprechende Eigenschaft der Parabeltangente in einem Punkt T einer Parabel (wobei wir dies hier für Parabeln in erster und dritter Hauptlage durchführen werden, für die zweite und vierte Hauptlage verläuft dies nach Vertauschung der Koordinaten analog) ableiten. Der erste Brennstrahl TF_1 bleibt fix, der zweite Brennstrahl TF_2 verläuft parallel zur Parabelachse, da F_2 der Fernpunkt selbiger ist. Dementsprechend gilt (vgl. Fig. 42!) folgender Satz:

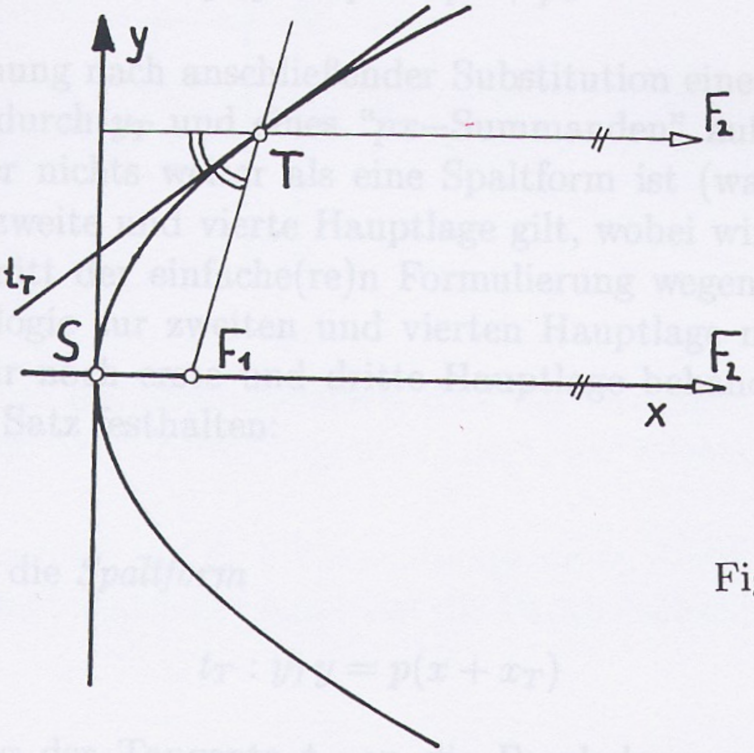


Fig. 42

Satz 43. Die Parabeltangente t_T in einem Punkt T einer Parabel ist die Winkelhalbierende des Brenn- und des Leitstrahls.

Da der Brennstrahl $\vec{b}$ und der Leitstrahl $\vec{l}$ aufgrund der *planimetrischen Parabeldefinition* gleich lang sind, erhalten wir für par:$y^2 = 2px$ und $T(x_T|y_T) \in$ par wegen

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{p}{2} - x_T \\ -y_T \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{l} = \begin{pmatrix} -\frac{p}{2} - x_T \\ 0 \end{pmatrix}$$

via (Man beachte $T \in$ par!)

$$\vec{b}+\vec{l} = \begin{pmatrix} -2x_T \\ -y_T \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2px_T \\ py_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_T^2 \\ py_T \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} y_T \\ p \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} p \\ -y_T \end{pmatrix}$$

einen Richtungs- bzw. Normalvektor von t_T , was durch Anwendung des Inzidenzkriteriums und des Normalvektorsatzes die Gleichung(en)

$$t_T : px - y_T y = px_T - \underbrace{y_T^2}_{2px_T}$$

bzw.

$$t_T : y_T y = p(x + x_T)$$

für die Tangente t_T an par in T liefert, was wegen der Form

$$y \cdot y = 2px = px + px$$

der Parabelgleichung nach anschließender Substitution eines "y–Faktors" auf der linken Seite durch y_T und eines "px–Summanden" auf der rechten Seite durch px_T wieder nichts weiter als eine Spaltform ist (was mutatis mutandis auch für die zweite und vierte Hauptlage gilt, wobei wir aber von nun an in diesem Abschnitt der einfache(re)n Formulierung wegen (mit dem bloßen Verweis der Analogie zur zweiten und vierten Hauptlage nach Koordinatenvertauschung) nur noch erste und dritte Hauptlage behandeln werden), was wir in folgendem Satz festhalten:

SATZ 44. Durch die *Spaltform*

$$t_T : y_T y = p(x + x_T)$$

ist eine Gleichung der Tangente t_T an die Parabel par mit der Gleichung par:$y^2 = 2px$ im Punkt $T(x_T|y_T) \in$ par gegeben.

Nach einigen einfachen Einstiegsübungsaufgaben folgt nun analog zur Ellipse die Herleitung einer **Berührungsbedingung** für eine Gerade g mit der Gleichung $\boxed{g: y=kx+d}$ und eine Parabel par in erster Hauptlage [$\boxed{par: y^2 = 2px}$]:

Aus $t_T : y_T y = p(x + x_T)$ folgt durch Umformung $\boxed{t_T : y = \frac{p}{y_T} \cdot x + \frac{px_T}{y_T}}$. Demnach gilt $k = \frac{p}{y_T}$ sowie $d = \frac{px_T}{y_T}$, woraus $y_T = \frac{p}{k}$ (*) sowie $dy_T = px_T$ bzw. $\boxed{2dy_T = 2px_T \quad (**)}$ folgt. Wegen $T(x_T|y_T) \in$ par wird (**) somit zunächst zu $2dy_T = y_T^2$ bzw. zu $2d = y_T$ bzw. wegen (*) zu $2d = \frac{p}{k}$, was äquivalent zu **p = 2kd** ist.

Und **dies** ist die Berührungsbedingung für g: y=kx+d und par.: $y^2 = 2px$.

[1] RESEL, Robert (2001): Didaktisch-methodische Überlegungen zu ausgewählten Kapiteln des Geometrieunterrichts der AHS-Oberstufe. Dissertation an der Universität Wien.