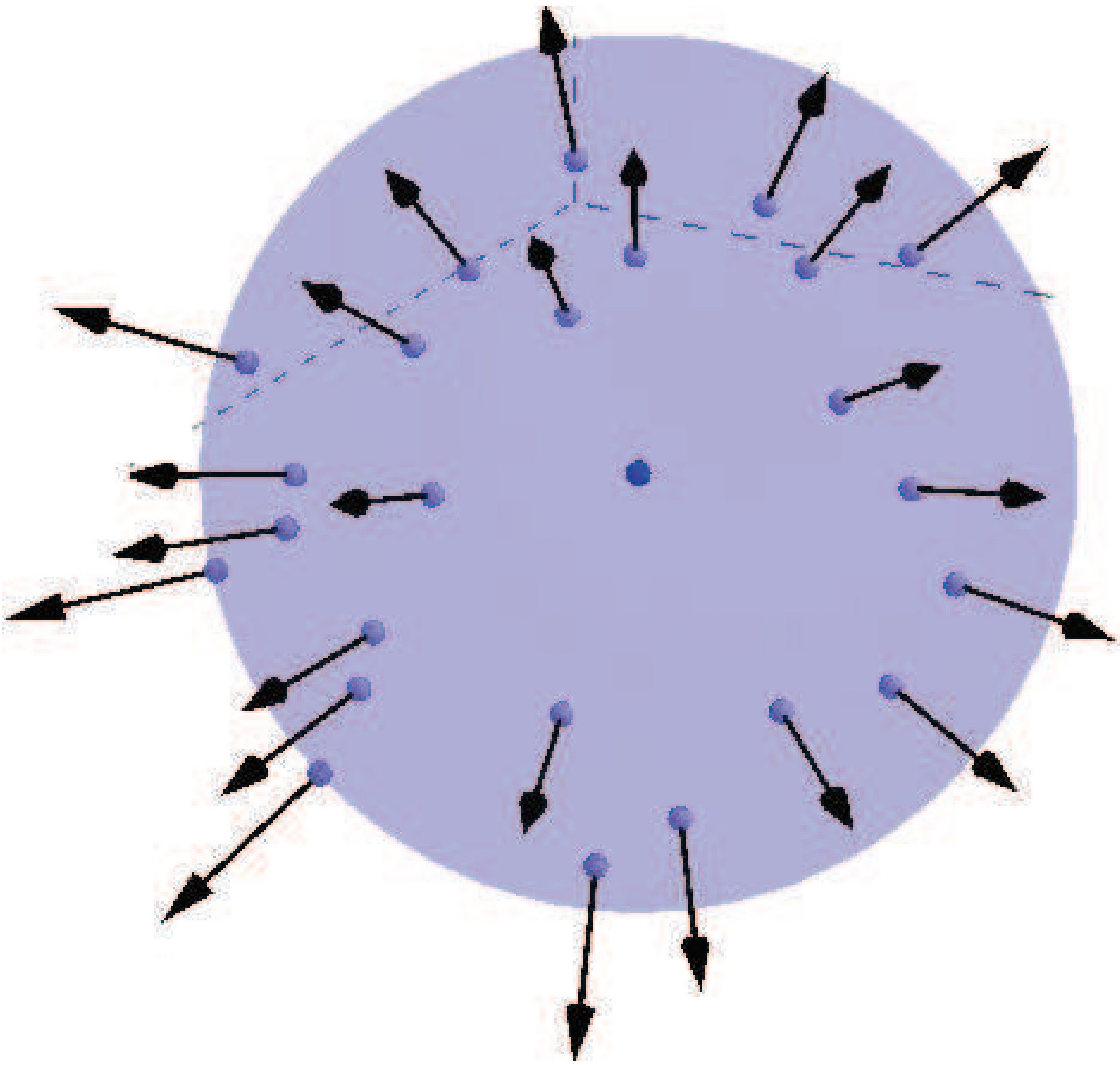
Robert Resel

20000 Normalvektoren (unter) der Sphäre



Logos Verlag, 2015

Inhaltsverzeichnis

Mathematical discoveries, like springtime
violets in the woods, have their season
which no human can hasten or retard.
John Bolyai

1 Einleitung

Nicht nur mathematische Entdeckungen, sondern auch deren Darstellung in Form von Büchern wie dem vorliegenden, müssen erst einmal (in den entsprechenden Autoren) so weit reifen, dass sie einer potentiellen Leserschaft zugänglich bzw. zumutbar sind. In diesem Sinne findet der avisierte Leserkreis in diesem Band, welcher als unabhängig von den beiden Vorgängerbänden *Reise zum Mittelpunkt der Mathematik* ("Band 1") sowie *In 101 Abschnitten um die mathematische Welt* ("Band 2") (in weiterer Folge unter Verweis auf das Literturverzeichnis jeweils via [66] sowie [67] angeführt) konzipiert wurde (obgleich - vgl. letzte Klammerbemerkung! - an so mancher Stelle zur Ergänzung auf die beiden Vorgängerbände hingewiesen wird), eine breite Palette mathematischer Delikatessen, welche zur Zeit des Verfassens der ersten beiden Bände noch nicht so weit ausgereift waren, um sich ebenda bereits in adäquater Darstellung einzufinden (nunmehr aber ihren Weg in den dritten Band gefunden haben, dessen Titel sich wie schon bei den beiden Vorgängerbänden wieder an Jules Verne anlehnt). Auf diese kognitiven Köstlichkeiten wird im Zuge dieses Einleitungskapitels noch (mehr oder minder genau) eingegangen, zuvor jedoch ist für jenen Teil der Leserschaft, der keinen der beiden Vorgängerbände kennt, noch eine Bemerkung angebracht:

Da nach Auffassung des Autors der vorliegenden Zeilen die Beschäftigung mit Mathematik bei einer durch Interesse, ja Wissens- oder besser: Erkenntnisdurst und Neugier bestimmten Einstellung zur Materie ein kognitiv in höchstem Maße genussvolles, ja geradezu hedonistisches Erlebnis verspricht, versteht sich von selbst, dass dieses Versprechen freilich nicht (ausschließlich) durch passive Berieselung, sondern (auch) erst durch aktive Prozesse wie der Bearbeitung von Übungsaufgaben, dem eigenständigen Probieren (und erst anschließendem Weiterlesen) u.v.a.m. eingelöst werden kann, wenn man sich erst einmal von der Rolle des reinen Lesers löst, indem man viel mehr auch zum Löser diverser im Rahmen dieses Buchs aufgeworfener mathematischer Problemstellungen (was u.a. auch Übungsaufgaben inkludiert) wird. Aus diesem Grunde wird die Leserschaft im Folgenden stets mit werter L$\substack{\text{e}\\ \text{ö}}$ser angesprochen, wenn der Autor es an so mancher Stelle für angebracht hält, (wieder einmal) an diese aktive (und dann eben kognitiv umso lohnendere) Rolle zu erinnern. Wollen wir uns nun also dem Inhaltlichen zuwenden:

- Im Gegensatz zu den jeweils in elf Abschnitte gegliederten Kapiteln 3 und 4 über Geometrie und Analysis weist das Kapitel 2, welches sich mit algebraischen Themen beschäftigt, mit seinen lediglich vier Abschnitten eine weniger starke Heterogenität auf. Darüber hinaus wird den Themen dieser Abschnitte **ausreichend Platz** gewidmet, was eine **tiefergehende** und auch **facettenreichere Behandlung** ermöglicht.[1]

[1]Dass **dies** in den teilweise(!) kürzeren Abschnitten über Geometrie und Analysis nicht erfolgt, stellt

Beginnend mit dem kürzesten der vier Abschnitte über Summenformeln gehen wir der Frage nach, unter welch unterschiedlichen Gesichtspunkten geschlossene Ausdrücke ("Summenformeln") für Potenzsummen gewonnen werden können, was abgesehen vom Abschnitt 2.1.8 (der als Ausblick bereits unendlichen Summen thematisiert, wodurch wir freilich die Grenze zur Analysis überschreiten, indem wir gar mit FOURIER-Reihen arbeiten und bereits Resultate über Hyperbelfunktionen aus dem Analysis-Abschnitt 4.8 vorwegnehmen) eine gute Aufwärmphase für die beiden folgenden Abschnitte über Quaternionen und Lineare Algebra ermöglicht, obgleich die einzelnen Abschnitte des gesamten Buchs größtenteils unabhängig voneinander (mit einigen Ausnahmen, vgl. etwa letzte Klammerbemerkung!) *genossen* werden können (*inkl. der bereits betonten überaus aktiven kognitiven Rolle*).

Im Abschnitt über den Schiefkörper $\mathbb{H}$ wird ausgehend von der Frage, was bei der Belegung von Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl mit komplexen Koeffizienten unter Hinzunahme einer weiteren imaginären Einheit passieren kann, das Fundament von $\mathbb{H}$ geschaffen, wobei insbesondere der Imaginärraum $\Im(\mathbb{H})$ mit den entsprechenden Anwendungen im assoziierten $\mathbb{R}^3$ (sowohl algebraisch im Hinblick auf das vektorielle Tripelprodukt als auch geometrisch bzgl. räumlicher Rotationen, wobei letztere mit der in diesem Abschnitt realisierten Konstruktion der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$ wiederum in die (lineare) Algebra führen) focussiert wird, aber auch Vergleiche zwischen $\mathbb{C}$ einerseits und $\mathbb{H}$ andererseits angestellt werden, was im Vier-Quadrate-Satz kulminiert sowie im Zuge eines neuen Beweises der Unmöglichkeit, den $\mathbb{R}^3$ zu einem Körper zu machen, schließlich die Notwendigkeit der Hinzunahme von zwei weiteren imaginären Einheiten erarbeitet (wodurch dann zumindest im $\mathbb{R}^4$ eine Vektormultiplikation definiert werden kann - obgleich diese nicht mehr kommutativ ist).

Wie der Abschnittstitel schon verrät, behandelt Abschnitt 2.3 vorrangig erlesene Gustostückerln zur linearen Algebra, und dies auf zum Teil neue Art und Weise (etwa in Form der Genese der Eigenwerte- und Eigenvektor-Thematik über Matrizenmultiplikation und -inversion), wobei besonders dieser Abschnitt eine reiche Vielzahl an Übungsaufgaben beinhaltet sowie überdies im Rahmen doppelt-stochastischer Matrizen bzw. der Transformationsformel für Doppelintegrale Querverbindungen zur Stochastik (die sonst in diesem Buch nicht behandelt wird) bzw. zur Analysis aufweist.

Schließlich ergänzt der das Algebra-Kapitel abrundende Abschnitt über Algebraische Gleichungen bereits in den beiden Vorgängerbänden vorgenommene Überlegungen zu algebraischen Gleichungen der Grade 2 bis 4, wobei hier inbesondere der Diskriminantenbegriff einer detaillierten Analyse unterworfen wird (quasi unter der Lupe, vgl. Abschnittstitel) und in Form des zweiten Ausblicks ein völlig neuer und überraschender Zusammenhang zwischen kubischen Gleichungen und dem goldenen Schnitt hergestellt wird.

aber keinen Qualitätsverlust dar, vielmehr ist es ja gerade die Intention kürzerer Abschnitte, lediglich die *Neugier auf manche mathematischen Phänomene zu wecken* bzw. bereits in den Vorgängerbänden behandelte Themen nochmals aufzugreifen und entsprechend zu ergänzen, wobei besonders (aber keineswegs ausschließlich) für den *ersten Fall* das Literaturverzeichnis ausreichend Anregungen für weitere Vertiefungen bietet.

- Die Hauptakzente des (im Vergleich zu den beiden Vorgängerbänden kürzesten) Geometriekapitels liegen auf der analytischen Behandlung der Kreislinie sowie der Dreiecksgeometrie, wobei im ersten Fall eine enorme Bandbreite abgedeckt wird, was ausgehend von Kreisgleichungen und Kreistangenten über Polarentheorie und Kreisschnitte bis zur Kreisinversion führt, wobei bezüglich letzterer auch auf Schmankerln wie die Konformität der Inversion sowie die Lemniskate (als Inversionsbild einer gleichseitigen Hyperbel) genauer eingangen wird, was bis zum elliptischen Integral und somit erneut noch vor dem Beginn des eigentlichen Kapitels 4 in die Analysis führt. Was die Dreiecksgeometrie betrifft, so wird hier mit besonders exquisiten kognitiven Delikatessen aufgewartet, was nebst einer Querverbindung zwischen Differenzengleichungen und dem Schwerpunkt, orthogonalen Schwerlinienpaaren, dem Neun- bzw. eigentlich Zehnpunktekreis (auch bzw. eher als Feuerbach-Kreis bekannt) bis hin zu weniger bekannten merkwürdigen Punkten auch ungewöhnliche Themen wie etwa den Bierdeckelsatz inkludiert und schließlich auch (in einem eigenen Abschnitt synthetischen Charakters) der verblüffenden Satz von Morley nicht fehlen darf.

  Auch die Ellipse erfährt in diesem Band auf 13 Seiten eine sehr differenzierte Betrachtungsweise, welche von der nichts an Ästhetik verlorenen la Hireschen Konstruktion, über konstruktive Elemente aus der Darstellenden Geometrie sowie differentialgeometrische Aspekte bis zu einem kinematischen Szenario reicht, aus welchem zum Abschluss des Abschnitts gar ein weiterer Kegelschnittstyp entspringt.

  Ebenso behandelte Themen (für *welche* aber kein so breiter Raum notwendig war als für den Kreis und die Dreiecksgeometrie, was *deren* Attraktivität und Relevanz aber in keinster Weise schmälert) sind eine analytische Behandlung des Ikosaederstumpfs (der ja u.a. als Fußball in Erscheinung tritt) und der Regelflächen, eine zu in weiterer Folge **äußerst wertvollen Einsichten führende Ergänzung** zur Hesseschen Abstandsformel (**was** mit nicht-trivialen Pendants des **pythagoreischen Lehrsatzes im Raum** einhergeht), kleine (aber feine) Bemerkungen zur Trigonometrie (Sinus- und Summensatz) sowie in Fortsetzung der ersten beiden Bände (vor allem Band 1!) das skalare und vektorielle Produkt und schließlich Determinanten (was zu einer neuen, äußerst interessanten Sichtweise und gegenseitigen Wechselwirkung bereits bekannter Sätze der elementaren linearen Algebra führt).

- Das mit ziemlich genau drei Achteln des Inhalts umfangreichste Kapitel ist in diesem Band jenes über Analysis, wobei sich hier auch die Bandbreite (selbst im Vergleich zum Geometriekapitel, da dort ja zwei Abschnitte jeweils der Dreiecksgeometrie bzw. Trigonometrie gewidmet waren) der Themen am stärksten manifestiert, welche von elementaren Fragestellungen wie einer Alternative zum klassischen Differentialquotienten in Gestalt der Kreismethode von Descartes (die sich als zum Konzept des Differentialquotienten äquivalent herausstellen wird) bis hin zu differentialgeometrischen Fragestellungen (welche vom Krümmungsbegriff - dem wir uns über die Kurvenrektifikation annähern - über Evoluten (samt deren Eigenschaften) bis zu Kurvenscharen und deren Einhüllenden anhand nicht-trivialer Beispiel) spannt.

  Nebst der im Zuge des letzten Absatzes bereits abgedeckten Abschnitte 4.2 bis 4.4 sowie 4.9 sind mit 4.1, 4.5, 4.8, 4.10 und 4.11 noch jene Abschniite speziell anzuführen, welche Methoden der Integralrechnung für Flächeninhalts- (4.1, 4.5 und

4.8) bzw. Volumsberechnungen (4.10 und 4.11) verwenden, wobei im ersten Fall 4.1 für sich spricht (in diesem Zusammenhang aber dennoch explizit die damit einhergehende unkonventionelle (in diesem Band) erstmalige (formale) Konfrontation mit - komplexen - Kurvenintegralen und Elementen der Funktionentheorie (welche ja im Gegensatz zu den Kurvenintegralen auch schon in den beiden Vorgängerbänden thematisiert wurde) besonders betont werden soll), 4.5 über die Herleitung der KEPLER-Regel (bzw. erweitert: der SIMPSON-Regel) hinaus auch ein erstes Hineinschnuppern in numerische Methoden ermöglicht und 4.8 auf den ersten Blick gar nichts mit Integralrechnung zu tun hat. Der Grund dafür liegt darin, dass in 4.8 der (den Autor dieser Zeile zuweilen quälende) Frage nachgegangen wird (vgl. den etwas seltsamen Abschnittstitel), wie die Basis der natürlichen Exponentialfunktion überhaupt in die Hyperbelfunktionen kommt, wozu Analoga zu den Winkelfunktionen sowie eine fundamentale abbildungsgeometrische Idee verwendet werden, was dann in weiterer Folge den Einsatz von Methoden der Integralrechnung nötig macht.

Ferner wird in Abschnitt 4.6 die bereits in den beiden Vorgängerbänden auf mitunter sehr unterschiedlichen Wegen hergeleitete EULERsche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

auf Basis eines ebenso durchgeführten Existenzbeweises der EULERschen Zahl e durch geometrische Analyse des Ausdrucks e^{ix} in der GAUSSschen Zahlenebene bewiesen, wobei in diesem Zusammenhang auch ein im Vergleich zu Band 1 verschiedener Beweis der Potenzreihenentwicklung der (Co)-Sinusfunktion sowie eine Anwendung der EULERschen Formel inkludiert sind, wobei letztere illustriert, dass $\mathbb{C}$ nicht nur algebraisch abgeschlossen ist, sondern in $\mathbb{C}$ auch transzendente Gleichungen, deren Lösungsmengen über $\mathbb{R}$ leer sind, Lösungen besitzen (als *eine* Konsequenz des Satzes von LOIUVILLE, eine *andere* ist - wie wir in Band 2 erörtert haben - der Fundamentalsatz der Algebra).

Schließlich wird im kürzesten Abschnitt 4.7 die Differentiationsregel für die natürliche Exponentialfunktion über die EULERsche Formel hergeleitet.

Nach dieser *Tour d´horizon* durch den Inhalt des vorliegenden Buchs darf ich nun dem werten L$\substack{\text{e}\\ \text{ö}}$ser eine spannende Exkursion in Richtung "Mittelerde der Mathematik" wünschen, welche sich 20000 Normalvektoren unter der (nicht notwendigerweise "nur" zweidimensionalen!) Sphäre befindet, wobei nicht erst am Ziel, sondern auch (oder gar vor allem?) am Weg dorthin gar viele kogntitive Köstlichkeiten darauf warten, von Ihnen goutiert zu werden.

Wien, im März 2014. Robert Resel

Literatur

[1] Arndt, Jörg und Christoph Haenel (1998²): π. Algorithmen, Computer, Arithmetik. Springer, Berlin.

[2] Artmann, Benno (1983): Der Zahlbegriff. Vandenhoeck % Ruprecht, Göttingen.

[3] Asperl, Andreas (2005): GZ-Handbuch. R. Oldenbourg Verlag, Wien.

[4] Ballik, Thomas (2012): Mathematik-Olympiade. ikon, Brunn am Gebirge.

[5] Baptist, Peter (1998): Pythagoras und kein Ende? Klett, Stuttgart.

[6] Basieux, Pierre (2004⁵): Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze. Rowohlt, Reinbek.

[7] Behrends, Erhard (2004). Analysis Band 2. Vieweg, Braunschweig.

[8] Betz, Albert (1964²): Konforme Abbildung. Springer, Berlin.

[9] Beutelspacher, Albrecht (2001⁵): Lineare Algebra. Vieweg, Braunschweig.

[10] Bewersdorff, Jörg (2007³): Algebra für Einsteiger. Vieweg, Braunschweig.

[11] Blattner, David (2000): π-Magie einer Zahl. Rowohlt, Reinbek.

[12] Bröcker, Theodor (2003): Lineare Algebra und Analytische Geometrie – Ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker. Birkhäuser, Basel.

[13] Bürger, Heinrich, Roland Fischer, Günther Malle, Manfred Kronfellner, Thomas Mühlgassner und Franz Schlöglhofer (1991): Mathematik Oberstufe 3. öbv&hpt, Wien.

[14] Cigler, Johann (1976): Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie, 1. Teil. Manz, Wien.

[15] Cigler, Johann (1992): Grundideen der Mathematik. BI-Verlag, Mannheim.

[16] Cigler, Johann (1986²): Einführung in die Differential- und Integralrechnung, 1. Teil. Manz, Wien.

[17] Cigler, Johann (1995): Körper, Ringe, Gleichungen. Spektrum, Heidelberg.

[18] Conway, John H. und Richard K. Guy (1997): Zahlenzauber. Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen. Birkhäuser, Basel.

[19] Courant, Richard und Herbert Robbins (1992⁴): Was ist Mathematik? Springer, Berlin.

[20] Ebbinghaus, Heinz-Dieter et al. (1992³): Zahlen. Springer, Berlin.

[21] Felzmann, Reinhold, Walter Weidinger und Manfred Blümel (1988): Geometrisches Zeichnen (3. Klasse). öbv&hpt, Wien.

[22] FIALA, Friedrich und Wolfgang MOSER (1989^5): Mathematik Maturaaufgaben. öbv&hpt, Wien.

[23] FRANK, Heinz (1986): Programmier- und Überwachungsfunktionen für teileartbezogene NC-Werkzeugmaschinen. Springer, Berlin.

[24] FREITAG, Eberhard und Rolf BUSAM (2000^3): Funktionentheorie 1. Springer, Berlin.

[25] GAUSS, Carl Friedrich (2005^5): Mathematisches Tagebuch 1796-1814 (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 256). Harri Deutsch, Frankfurt.

[26] GLAESER, Georg (2007^2): Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik. Spektrum, Heidelberg.

[27] GLAESER, Georg und Konrad POLTHIER (2009): Bilder der Mathematik. Spektrum, Heidelberg.

[28] GÜRLEBECK, Klaus, Klaus HABETHA und Wolfgang SPRÖSSIG (2006): Funktionentheorie in der Ebene und im Raum. Birkhäuser, Basel.

[29] HELLUS, Michael (2013^3): Lineare Algebra nicht-vertieft. Logos, Berlin.

[30] HESS, Hans-Ulrich (2010): Das Wunder der Anwendung - Einführung in die Analysis und ihre Anwendung in Naturwissenschaft und Technik. Logos, Berlin.

[31] HILBERT, David und Stephan COHN-VOSSEN (1996^2): Anschauliche Geometrie. Springer, Berlin.

[32] HUPPERT, Bertram und Wolfgang WILLEMS (2006): Lineare Algebra. B.G. Teubner, Wiesbaden.

[33] HURWITZ, Adolf (1919): Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen. Springer, Berlin.

[34] JÄNICH, Klaus (1993^2): Vektoranalysis. Springer, Berlin.

[35] JOST, Jürgen (1994): Differentialgeometrie und Minimalflächen. Springer, Berlin.

[36] KAPLAN, Robert und Ellen (2003): Das unendliche denken. Econ, München.

[37] KEHLMANN, Daniel (2005): Die Vermessung der Welt. Rowohlt, Reinbek.

[38] KEMPERMANN, Theo (2005^2): Zahlentheoretische Kostproben. Harri Deutsch, Frankfurt.

[39] KNOPP, Konrad (1996^6): Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer, Berlin.

[40] KOECHER, Max und Aloys KRIEG (2007^2): Elliptische Funktionen und Modulformen. Springer, Berlin.

[41] KORECKY, Jan (2015): Der Goldene Schnitt. Vorwissenschaftliche Arbeit, Wien.

[42] Kowol, Gerhard (1990): Gleichungen. Freies Geistesleben, Stuttgart.

[43] Kowol, Gerhard (2009): Projektive Geometrie und Cayley-Klein Geometrien der Ebene. Birkhäuser, Boston.

[44] Kranzer, Walter (1989): So interessant ist Mathematik. Aulis Verlag, Köln.

[45] Lamotke, Klaus (2005): Riemannsche Flächen. Springer, Berlin.

[46] Lehmann, Johannes (1996): 666 Olympiadeaufgaben aus 42 Ländern.. Klett, Stuttgart.

[47] Lenze, Burkhard (2010^3): Einführung in die Fourier-Analysis. Logos, Berlin.

[48] Lietzmann, Walther (1923^3): Trugschlüsse. B.G. Teubner, Leipzig.

[49] Lietzmann, Walther (1943): Lebendige Mathematik. Hirt, Breslau.

[50] Lietzmann, Walther (1950): Wo steckt der Fehler? B.G. Teubner, Leipzig.

[51] Matthiessen, Ludwig (1878): Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. B.G. Teubner, Leipzig.

[52] Mäder, Peter (1992): Mathematik hat Geschichte. Metzler, Hannover.

[53] Meschkowski, Herbert (1968): Mathematiker-Lexikon. BI-Verlag, Mannheim.

[54] Meyer, Wilhelm Franz und Hans Mohrmann (Hrsg.) (1902): Enczyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band 3 (Geometrie), Teil 3: Differentialgeometrie. B.G. Teubner, Leipzig.

[55] Müller, Emil und Erwin Kruppa (1936^4): Lehrbuch der Darstellenden Geometrie. B.G. Teubner, Leipzig.

[56] Needham, Tristan (2001): Anschauliche Funktionentheorie. Oldenbourg, München.

[57] Novak, Johann, Heinz-Christian Schalk, Siegfried Stemmer et al. (1992): Mathematik Oberstufe 4. Reniets, Wien.

[58] Odehnal, Boris (2006): Three points related to the incenter and excenters of a triangle. In: Elemente der Mathematik, Band 61, Nr. 2 (S.74-80). Birkhäuser, Basel.

[59] Rademacher, Hans und Otto Töplitz (1933^2): Von Zahlen und Figuren. Springer, Berlin.

[60] Reichel, Hans-Christian, Robert Müller, Josef Laub und Günter Hanisch (1992^3): Lehrbuch der Mathematik 6. öbv&hpt, Wien.

[61] Reichel, Hans-Christian, Robert Müller, Günter Hanisch und Josef Laub (1992^2): Lehrbuch der Mathematik 7. öbv&hpt, Wien.

[62] Reichel, Hans-Christian, Robert Müller und Günter Hanisch (1993^2): Lehrbuch der Mathematik 8. öbv&hpt, Wien.

[63] Reichel, Hans-Christian und Robert Resel (2002): Der Beitrag der Mathematik und des Mathematikunterrichts zur Persönlichkeitsbildung. In: ÖMG Didaktik-Reihe (34), S. 85-100.

[64] Resel, Robert (1999): Ausbaumöglichkeiten der Oberstufen-Schulmathematik. Diplomarbeit, Universität Wien.

[65] Resel, Robert (2001): Didaktisch-methodische Überlegungen zu ausgewählten Kapiteln des Geometrieunterrichts der AHS-Oberstufe. Dissertation, Universität Wien.

[66] Resel, Robert (2014): Reise zum Mittelpunkt der Mathematik. Logos, Berlin.

[67] Resel, Robert (2014): In 101 Abschnitten um die mathematische Welt. Logos, Berlin.

[68] Richter-Gebert, Jürgen und Thorsten Orendt (2009): Geometriekalküle. Springer, New York/Berlin/Heidelberg.

[69] Roman, Tiberiu (1987): Reguläre und halbreguläre Polyeder. Harri Deutsch, Thun/Frankfurt.

[70] Schark, Rainer (1992): Konstanten in der Mathematik - variabel betrachtet. Harri Deutsch, Frankfurt.

[71] Scheid, Harald (1994^2): Zahlentheorie. BI-Verlag, Mannheim.

[72] Scheid, Harald (2007^4): Elemente der Geometrie. Spektrum, Heidelberg.

[73] Scheid, Harald (1997): Folgen und Funktionen. Spektrum, Heidelberg.

[74] Scheid, Harald und Wolfgang Schwarz (2007^5): Elemente der Arithmetik und Algebra. Spektrum, Heidelberg.

[75] Schupp, Hans und Heinz Dabrock (1995): Höhere Kurven. BI-Verlag, Mannheim.

[76] Sonar, Thomas (1999): Einführung in die Analysis. Vieweg, Braunschweig.

[77] Spiegel, Murray R. (1982): Endliche Differenzen und Differenzengleichungen. McGraw-Hill, Hamburg.

[78] Stillwell, John (2002): Mathematics and its history. Springer, Berlin.

[79] Taschner, Rudolf (2000): Mathematik 3. Übungs- und Lehrbuch für die 7. Klasse AHS. Oldenbourg, Wien.

[80] Wanner, Gerhard (2004): Elementare Beweise des Satzes von Morley. In: Elemente der Mathematik, Band 59, Nr. 4 (S.144-150). Birkhäuser, Basel.

[81] Zeitler, Herbert und Dusan Pagon (2007): Kreisgeometrie - gestern und heute. WBG, Darmstadt.