AHS HEUSTADELGASSE

Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 1/7)

- Zur Herausforderung ein Beispiel aus einem Gebietswettbewerb (für Fortgeschrittene!):

37. Österreichische Mathematik Olympiade
Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene
27. April 2006

1. Es seien $0 < x < y$ reelle Zahlen und

$$H = \frac{2xy}{x+y}, \quad G = \sqrt{xy}, \quad A = \frac{x+y}{2}, \quad Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

das harmonische, geometrische, arithmetische und quadratische Mittel von x und y. Bekanntermaßen gilt $H < G < A < Q$.
Man ordne die Intervalle $[H, G]$, $[G, A]$ und $[A, Q]$ aufsteigend nach ihrer Länge.

- Zur Anwendung eines Teils der QAGH-UGL-Kette:

41. Österreichische Mathematik Olympiade
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger
15. Juni 2010

3. Es seien x und y positive reelle Zahlen mit $x + y = 1$.

Man beweise:

$$\frac{(3x-1)^2}{x} + \frac{(3y-1)^2}{y} \geq 1.$$

Für welche x und y gilt Gleichheit?

Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 2/7)

- Zum Experimentieren:

31. Österreichische Mathematik Olympiade
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger
15. Juni 2000

2. Es seien a und b positive reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{(a+b)^3}{a^2b} \geq \frac{27}{4}.$$

Wann gilt Gleichheit?

- Ohne den Beitrag schon fast zu leicht …

39. Österreichische Mathematische Olympiade
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger
17. Juni 2008

3. Man beweise für alle reellen Zahlen a, b mit $a+b \neq 0$ die Ungleichung

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} \leq \frac{4}{|a+b|}.$$

Wann gilt Gleichheit?

AHS HEUSTADELGASSE

Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 3/7)

- „Zweifachmutter"! ;-)

40. Österreichische Mathematik Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

23. Juni 2009

2. Es seien x und y nichtnegative reelle Zahlen.

   Man zeige:

$$(x+y^3)(x^3+y) \geq 4x^2y^2.$$

   Wann gilt Gleichheit?

- (Den Weg zur) Mutter (finden IST NICHT IMMER LEICHT!):

42. Österreichische Mathematische Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

16. Juni 2011

3. Es seien x, y positive reelle Zahlen mit

$$x+y+xy=3.$$

   Man beweise, dass

$$x+y \geq 2.$$

   Wann gilt Gleichheit?

Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 4/7)

- Mutter und Vorzeichen-„Falle“:

43. Österreichische Mathematische Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

11. Juni 2012

3. Es seien a und b zwei positive reelle Zahlen mit $a \leq 2b \leq 4a$.

   Man zeige, dass dann immer

$$4ab \leq 2(a^2 + b^2) \leq 5ab$$

   gilt.

- Nicht misstrauisch sein:

45. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

12. Juni 2014

3. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a < b < c < d$.

   Man ordne $x = a \cdot b + c \cdot d$, $y = b \cdot c + a \cdot d$ und $z = c \cdot a + b \cdot d$ der Größe nach und beweise die angegebene Reihenfolge.

AHS HEUSTADELGASSE

Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 5/7)

- AG-UGL!!

46. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

9. Juni 2015

2. Für die positiven reellen Zahlen x und y gilt die Bedingung $xy = 4$. Man beweise, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}$$

gilt. Für welche x, y tritt Gleichheit ein?

- MUTTER!!

47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

16. Juni 2016

2. Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $x \neq -1$, $y \neq -1$ und mit $xy = 1$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2 \geq \frac{9}{2}$$

AHS HEUSTADELGASSE

Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 6/7)

- AG-UGL!!

44. Österreichische Mathematische Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

13. Juni 2013

3. Es seien a und b reelle Zahlen mit $0 \leq a,\, b \leq 1$. Man beweise:

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit?

- AH-UGL!!

Raach 2012 Ungleichungen Seite 4 *Birgit Vera Schmidt*

41. Man zeige für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$$

- *Niederländische Mathematikolympiade 1965*:

Man zeige für beliebige reelle a und b : $\quad (a+b)^4 \leq 8(a^4+b^4)$

Diese Herausforderung packen wir auf zweierlei Arten an, nämlich durch einen "Direkt-Angriff" bzw. mittels QA-UGL (als Kontrast danach!).

AHS HEUSTADELGASSE

Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 7/7)

- BOHR*sche Ungleichung*[1]:

$$(a+b)^2 \le (1+c)a^2 + \left(1+\frac{1}{c}\right)b^2 \quad \text{für} \quad a,b \in \mathbb{R} \quad \text{sowie} \quad c \in \mathbb{R}^+$$

- Zuletzt: Für beliebige reelle Zahlen x und y gilt entweder

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge \sqrt{5} \quad \text{oder} \quad \frac{x+y}{x}+\frac{x}{x+y} \ge \sqrt{5}.$$

Für Interessierte bzgl. Verfassen mathematischer Texte mit LaTeX am linken Rand der Quelltext der letzten drei Aufgaben!

```
\begin{itemize}
\item {\it Niederländische Mathematikolympiade 1965}:
\[ \mbox{Man zeige für beliebige reelle}~a~\mbox{und}~b:~~(a+b)^4\le 8(a^4+b^4). \]
Diese Herausforderung packen wir auf zweierlei Arten an, nämlich durch\\ einen~{\dq Direkt-Angriff\dq}~bzw. mittels $QA$-UGL (als Kontrast danach!).
\item {\it {\sc BOHR}sche Ungleichung}\footnote{nach dem dänischen Mathematiker und Fußballer Harald {\sc Bohr} (1887-1951), dessen Bruder der dänische Physiker
Niels {\sc Bohr} (1885-1962) war, auf den das berühmte Bohrsche Atommodell zurückgeht.}:
\[ (a+b)^2\le (1+c)a^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)b^2~~\mbox{für}~~a,b\in\mathbb{R}~~\mbox{sowie}~~c\in\mathbb{R}^+ \]
\item Zuletzt: Für beliebige reelle Zahlen $x$ und $y$ gilt entweder
\[ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge \sqrt{5}~~~~\mbox{oder}~~~~\frac{x+y}{x}+\frac{x}{x+y}\ge \sqrt{5}. \]
\end{itemize}
```

Mit Adventbeginn wechseln wir dann das Themengebiet und gehen vom Kapitel „UNGLEICHUNGEN“ zu einem der folgenden Schmankerln über …

- GLEICHUNGEN
- GEOMETRIE
- ZAHLENTHEORIE („SPIELTHEORIE“, aber nicht mit der echten SPIELTHEORIE – u.a. John Nash – zu verwechseln)

…, welchem wir uns dann im Dezember und Jänner widmen werden (3. bzw. 4. Thema dann im Februar/März bzw. März/April/Mai) .

Bei Lion King, Martini-Martoni, Hat-Man, Super-Mario, Tokio, Eva, Charly, Ma(m)i & co wird es jedenfalls alles andere als langweilig werden! ☺

Wien, im Oktober 2016. Dr. Robert Resel, eh.