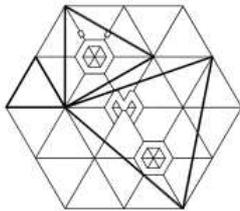


# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 1/7)

- Zur Herausforderung ein Beispiel aus einem Gebietswettbewerb (für Fortgeschrittene!):



## 37. Österreichische Mathematik Olympiade Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene 27. April 2006

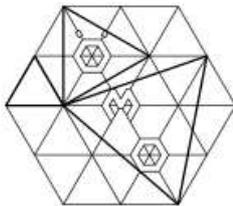
1. Es seien  $0 < x < y$  reelle Zahlen und

$$H = \frac{2xy}{x+y}, \quad G = \sqrt{xy}, \quad A = \frac{x+y}{2}, \quad Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

das harmonische, geometrische, arithmetische und quadratische Mittel von  $x$  und  $y$ . Bekanntermaßen gilt  $H < G < A < Q$ .

Man ordne die Intervalle  $[H, G]$ ,  $[G, A]$  und  $[A, Q]$  aufsteigend nach ihrer Länge.

- Zur Anwendung eines Teils der QAGH-UGL-Kette:



## 41. Österreichische Mathematik Olympiade Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger 15. Juni 2010

3. Es seien  $x$  und  $y$  positive reelle Zahlen mit  $x + y = 1$ .

Man beweise:

$$\frac{(3x-1)^2}{x} + \frac{(3y-1)^2}{y} \geq 1.$$

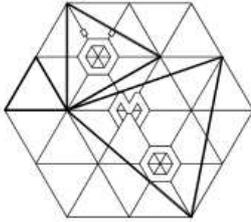
Für welche  $x$  und  $y$  gilt Gleichheit?



# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 2/7)

- Zum Experimentieren:



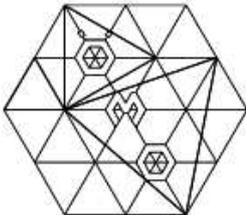
**31. Österreichische Mathematik Olympiade**  
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger  
15. Juni 2000

2. Es seien  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{(a+b)^3}{a^2b} \geq \frac{27}{4}.$$

Wann gilt Gleichheit?

- Ohne den Beitrag schon fast zu leicht ...



**39. Österreichische Mathematische Olympiade**  
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger  
17. Juni 2008

3. Man beweise für alle reellen Zahlen  $a, b$  mit  $a + b \neq 0$  die Ungleichung

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} \leq \frac{4}{|a+b|}.$$

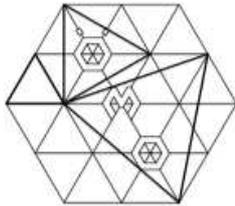
Wann gilt Gleichheit?



# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 3/7)

- „Zweifachmutter“! ;-)



**40. Österreichische Mathematik Olympiade**  
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger  
23. Juni 2009

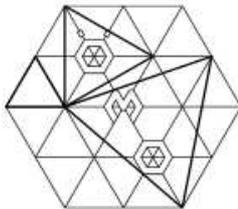
2. Es seien  $x$  und  $y$  nichtnegative reelle Zahlen.

Man zeige:

$$(x + y^3)(x^3 + y) \geq 4x^2y^2.$$

Wann gilt Gleichheit?

- (Den Weg zur) Mutter (finden IST NICHT IMMER LEICHT!):



**42. Österreichische Mathematische Olympiade**  
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger  
16. Juni 2011

3. Es seien  $x, y$  positive reelle Zahlen mit

$$x + y + xy = 3.$$

Man beweise, dass

$$x + y \geq 2.$$

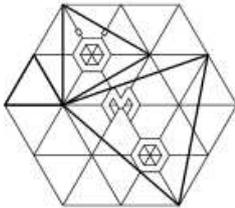
Wann gilt Gleichheit?



# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 4/7)

- Mutter und Vorzeichen-„Falle“:



## 43. Österreichische Mathematische Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

11. Juni 2012

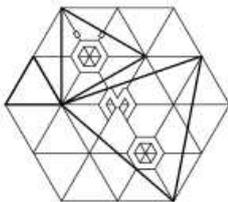
3. Es seien  $a$  und  $b$  zwei positive reelle Zahlen mit  $a \leq 2b \leq 4a$ .

Man zeige, dass dann immer

$$4ab \leq 2(a^2 + b^2) \leq 5ab$$

gilt.

- Nicht misstrauisch sein:



## 45. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

12. Juni 2014

3. Es seien  $a, b, c$  und  $d$  reelle Zahlen mit  $a < b < c < d$ .

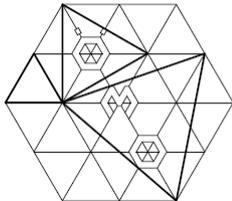
Man ordne  $x = a \cdot b + c \cdot d$ ,  $y = b \cdot c + a \cdot d$  und  $z = c \cdot a + b \cdot d$  der Größe nach und beweise die angegebene Reihenfolge.



# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 5/7)

- AG-UGL!!



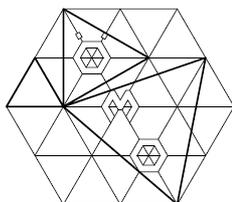
**46. Österreichische Mathematik-Olympiade**  
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger  
9. Juni 2015

2. Für die positiven reellen Zahlen  $x$  und  $y$  gilt die Bedingung  $xy = 4$ .  
Man beweise, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}$$

gilt. Für welche  $x, y$  tritt Gleichheit ein?

- MUTTER!!



**47. Österreichische Mathematik-Olympiade**  
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger  
16. Juni 2016

2. Man beweise, dass für alle reellen Zahlen  $x \neq -1$ ,  $y \neq -1$  und mit  $xy = 1$  die folgende Ungleichung gilt:

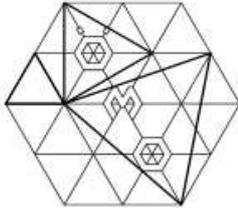
$$\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2 \geq \frac{9}{2}$$



# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 6/7)

- AG-UGL!!



## 44. Österreichische Mathematische Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

13. Juni 2013

3. Es seien  $a$  und  $b$  reelle Zahlen mit  $0 \leq a, b \leq 1$ . Man beweise:

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit?

- AH-UGL!!

Raach 2012

Ungleichungen Seite 4

Birgit Vera Schmidt

41. Man zeige für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ :

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \geq a + b + c$$

- *Niederländische Mathematikolympiade 1965:*

Man zeige für beliebige reelle  $a$  und  $b$ :  $(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$

Diese Herausforderung packen wir auf zweierlei Arten an, nämlich durch einen "Direkt-Angriff" bzw. mittels QA-UGL (als Kontrast danach!).

