5.6.3 Hypervolumina höherdimensionaler Sphären

Analog zur dreidimensionalen Sphäre vom Radius r mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung des $\mathbb{R}^3$, deren Inneres bzw. Rand durch

$$x^2 + y^2 + z^2 < r^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

beschrieben wird, wird das Innere bzw. der drei(!)-dimensionale Rand der vierdimensionalen Sphäre vom Radius r mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung des $\mathbb{R}^4$ via

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 < r^2 \quad \text{bzw.} \quad w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

analytisch modelliert.

Die Berechnung des (vierdimensionalen) Rauminhalts einer $4D-$Sphäre mit dem Radius r erfolgt nach demselben Prinzip wie bei der Berechnung des Kreisflächeninhalts bzw. des Kugelvolumens im zwei- bzw. dreidimensionalen Raum, und zwar durch "Aufschneiden" der Figur normal zur Drehachse, was in der Kreisebene auf unendlich viele zueinander parallele Kreissehnen, im Kugelraum auf unendlich viele Schnittkreise (da ja dann auf die Drehachse Normalebenen gefällt werden) und in logischer (wenn auch a-priori nicht anschaulicher) Konsequenz im vierdimensionalen Hyperkugelraum auf unendlich viele dreidimensionale Schnittkugeln (da ja dann auf die Drehachse Normalräume gefällt werden) führt, über deren ein- bzw. zwei- resp. dreidimensionale Volumina integriert wird.

Für die Dimension 2 (Inhalt V_2 der Kreisfläche) führt dies (im Folgenden sehr abgekürzt dargestellt, weil hinlänglich bekannt) auf

$$V_2 = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \mathrm{d}x =$$

bzw. durch die Substitution $x = r \cdot \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = r \cdot \cos\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi$ auf

$$V_2 = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} r^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi,$$

was wegen

$$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi - (1 - \cos^2\varphi) = 2 \cdot \cos^2\varphi - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\varphi = \frac{1}{2} \cdot [\cos(2\varphi) + 1]$$

zu

$$V_2 = 2r^2 \cdot \int_0^{\pi/2} [\cos(2\varphi) + 1] \cdot \mathrm{d}\varphi = 2r^2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) + \varphi\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = 2r^2 \cdot \frac{\pi}{2},$$

also $\boxed{V_2 = \pi \cdot r^2}$ führt.

Unter Verwendung $\boxed{\text{dieses Resultats}}$ wird nun in der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

der zweidimensionalen $3D-$Kugelfläche die $z-$Koordinate zwischen $-r$ und r (als Süd- und Nordpol interpretierbar!) variiert, was je nach Wahl des variierenden Parameters t für z auf die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 - t^2$$

führt, welche in einer ersten Hauptebene η mit $\eta: \; z = t$ einen Kreis mit dem Radius $r_t = \sqrt{r^2 - t^2}$ beschreibt, wobei wegen $-r < t < r$ der Radikand nicht-negativ ist.

Integration über diese unendlich vielen Kreisflächeninhalte liefert unter Anwendung des $\boxed{\text{obigen Resultats}}$ für das Kugelvolumen V_3 somit

$$V_3 = \int_{-r}^{r} \pi \cdot (r^2 - t^2) \cdot \mathrm{d}t$$

bzw. aufgrund des geraden Integranden und des zu 0 symmetrischen Integrationsbereichs sowie der Linearität des Integrals

$$V_3 = 2\pi \cdot \int_0^r (r^2 - t^2) \cdot \mathrm{d}t = 2\pi \cdot \left(r^2 t - \frac{1}{3} \cdot t^3 \right) \bigg|_0^r = 2\pi \cdot \frac{2r^3}{3},$$

woraus die bekannte Formel $\boxed{\boxed{V_3 = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3}}$ folgt.

Entsprechend verwenden wir $\boxed{\boxed{\text{dieses Resultat}}}$ nun in Kombination mit der Gleichung

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

der dreidimensionalen $4D-$Kugelfläche, wobei sich jetzt die $w-$Koordinate zwischen $-r$ und r bewegt, was in Abhängigkeit des Parameterwerts t für w auf die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 - t^2$$

führt, welche in einem Parallelraum des $\mathbb{R}^3$ mit der Gleichung $w = t$ eine $3D-$Kugel mit dem Radius $r_t = \sqrt{r^2 - t^2}$ beschreibt, welcher aus dem selben Grund wie zuvor stets definiert ist.

Integrieren wir über diese unendlich vielen Kugelvolumina, erhalten wir unter Verwendung des $\boxed{\boxed{\text{obigen Resultats}}}$ für das Hypervolumen V_4 zunächst

$$V_4 = \int_{-r}^{r} \frac{4\pi}{3} \cdot \sqrt{r^2 - t^2}^{\,3} \cdot \mathrm{d}t.$$

Mit analog zu den obig angestellten Überlegungen erfolgenden Vereinfachungen (inkl. der schon für die Berechnung von V_2 verwendeten Substitution) gelangen wir in weiterer Folge unter zusätzlicher Verwendung von

$$\sin(2\varphi) = 2 \sin\varphi \cos\varphi$$

über die Kette

$$V_4 = \frac{8\pi}{3} \cdot \int_0^r (r^2 - t^2)^{3/2} \cdot \mathrm{d}t = \frac{8\pi}{3} \cdot \int_0^{\pi/2} r^4 \cdot \cos^4\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{8\pi}{3} \cdot r^4 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot (1 - \sin^2\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{8\pi}{3} \cdot r^4 \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi - \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi \right) =$$

(wobei das im Zuge der Berechnung von V_2 erhaltene Zwischenresultat $\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}$ verwendet wird)

$$= \frac{8\pi}{3} \cdot r^4 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot r^4 \cdot \left(\pi - \int_0^{\pi/2} \big(1 - \cos^2(2\varphi)\big) \cdot \mathrm{d}\varphi\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot r^4 \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2(2\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi\right) =$$

$(\psi := 2\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}\psi)$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot r^4 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \cos^2\psi \cdot \mathrm{d}\psi\right) = \frac{2\pi}{3} \cdot r^4 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\pi} [\cos(2\psi) + 1] \cdot \mathrm{d}\psi\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot r^4 \cdot \left[2\pi + \left(\frac{1}{2} \cdot \sin(2\psi) + \psi\right)\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{\pi}{6} \cdot r^4 \cdot (2\pi + \pi) = \frac{\pi}{6} \cdot r^4 \cdot 3\pi$$

schließlich zur Formel $\boxed{V_4 = \frac{\pi^2}{2} \cdot r^4}$ für das Hypervolumen einer $4D-$Kugel mit dem Radius r.

Der werte L$\substack{\text{e}\\ \text{ö}}$ser möge die folgenden kurzen und (vor allem in den Fällen V_5 und V_7!) knapp gehaltenen Berechnungen der Hyperrauminhalte V_5 bzw. V_6 resp. V_7 einer $5D-$ bzw. $6D-$ resp. $7D-$Kugel mit dem Radius r, deren vier(!!)- bzw. fünf(!!!)- resp. sechs(!!!!)-dimensionaler Rand via

$$v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{bzw.} \quad u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

resp.

$$s^2 + u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

beschrieben wird, selbst in allen Details kommentieren, bevor wir unsere Ideen für beliebige $n-$dimensionale Kugeln vom selben Radius r verallgemeinern (wozu wir tief in das Reich der mathematischen Analysis vordringen müssen, wofür wir mit zahlreichen spektakulären Überraschungen belohnt werden):

$$V_5 = 2 \cdot \int_0^r \frac{\pi^2}{2} \cdot (r^2 - t^2)^2 \cdot \mathrm{d}t = \pi^2 \cdot \int_0^r (r^4 - 2r^2t^2 + t^4) \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \pi^2 \cdot \left(r^4 t - \frac{2r^3}{3} \cdot t^3 + \frac{1}{5} \cdot t^5\right)\Big|_0^r = \pi^2 \cdot \frac{8}{15} \cdot r^5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_5 = \frac{8\pi^2}{15} \cdot r^5}$$

$$\Rightarrow \quad V_6 = 2 \cdot \int_0^r \frac{8\pi^2}{15} \cdot (r^2 - t^2)^{5/2} \cdot \mathrm{d}t = \frac{16\pi^2}{15} \cdot \int_0^{\pi/2} r^6 \cdot \cos^6\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = \frac{16\pi^2 r^6}{15} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^6\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi,$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^6\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\varphi)^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi) \cdot \cos^2\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos^2\varphi - 2\underbrace{\sin^2\varphi}_{1-\cos^2\varphi} \cos^2\varphi + \sin^4\varphi \cos^2\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi + 2 \cdot \int_0^{\pi/2} (\cos^4\varphi - \cos^2\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi + \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\varphi) \cdot (\sin^2\varphi \cos^2\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi - \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi + \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin^2(2\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2(2\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi - \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\varphi) \cdot \cos(2\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi \right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8} \cdot \left(\int_0^{\pi/2} [1-\cos^2(2\varphi)] \cdot \mathrm{d}\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin^3(2\varphi) \Big|_0^{\pi/2} \right) =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} \cos^2\psi \cdot \mathrm{d}\psi + \frac{1}{3} \cdot 0 \right) = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\pi} [\cos(2\psi)+1] \cdot \mathrm{d}\psi \right) =$$

$$= \frac{3\pi}{16} - \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sin(2\psi) + \psi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{16} - \frac{1}{32} \cdot \psi = \frac{5\pi}{32} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_6 = \tfrac{\pi^3}{6} \cdot r^6}$$

$$\Rightarrow \quad V_7 = 2 \cdot \int_0^r \frac{\pi^3}{6} \cdot (r^2 - t^2)^3 \cdot \mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{3} \cdot \int_0^r (r^6 - 3r^4t^2 + 3r^2t^4 - t^6) \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\pi^3}{3} \cdot \left(r^6 t - r^4 t^3 + \frac{3r^2}{5} \cdot t^5 - \frac{1}{7} \cdot t^7 \right) \Big|_0^r = \frac{\pi^3}{3} \cdot \frac{16}{35} \cdot r^7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_7 = \tfrac{16\pi^3}{105} \cdot r^7}$$

Der werte L$\overset{\text{e}}{\underset{\text{ö}}{}}$ser sei nun ebenso dazu aufgerufen, auf Grundlage der erhaltenen Resultate die folgenden Vermutungen selbst (Also momentan **nicht** weiterlesen!) zu formulieren:

$$\boxed{V_{2n} = \tfrac{\pi^n}{n!} \cdot r^{2n}}, \quad V_{2n+1} = \frac{\pi^n \cdot 2^{n+1}}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \cdot r^{2n+1} =$$

$$= \frac{\pi^n \cdot 2^{n+1} \cdot 2n \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot r^{2n+1} =$$

$$= \frac{\pi^n \cdot 2^{n+1} \cdot 2^n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2n+1)!} \cdot r^{2n+1} =$$

$$= \frac{\pi^n \cdot 2^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!}{(2n+1)!} \cdot r^{2n+1}, \quad \text{ergo} \quad \boxed{V_{2n+1} = \tfrac{\pi^n \cdot 2^{2n+1} \cdot n!}{(2n+1)!} \cdot r^{2n+1}}$$

Für eine vereinheitlichte Darstellung der Kugelvolumina sowohl gerader als auch ungerader Dimension bedarf es einer Verallgemeinerung der Fakultätsfolge für beliebige reelle Zahlen, welche auch die rätselhaften Zweiersprünge der Potenzen von π demystifizieren wird. Dazu begeben wir uns wie schon angekündigt in die wunderbare Welt der Analysis und betrachten die dort beheimatete über ein uneigentliches bestimmtes Integral via

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \cdot \mathrm{d}t$$

definierte *Gammafunktion*, die wir nun genauer untersuchen werden,
indem wir $\Gamma(x+1)$ mittels *partieller Integration* durch $\Gamma(x)$ ausdrücken:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} \cdot \mathrm{d}t = \left(-e^{-t} \cdot t^x \right)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot x \cdot t^{x-1} \cdot \mathrm{d}t =$$