3.3 Extrema I: Winkel Ebene/Gerade

In diesem Abschnitt gehen wir von einer Gerade g und einer g nicht enthaltenden Ebene ε aus und wollen unter allen möglichen spitzen Schnittwinkeln zwischen g und der Gesamtheit aller Geraden $g_\varepsilon \subset \varepsilon$ den *kleinsten Schnittwinkel* ermitteln, welchen wir dann naheliegenderweise als einen der Schnittwinkel zwischen g und ε definieren werden (Der zweite ist dann der Supplementärwinkel zum ersten Winkel.).

Dazu gehen wir o.B.d.A. von $\varepsilon = \pi_1$ (also der $xy-$Ebene) sowie einem **normierten Richtungsvektor**

$$\overrightarrow{r_g} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

von g aus [**d.h. es gilt** $|\overrightarrow{r_g}| = 1$, ergo $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 1$ bzw. $a^2+b^2+c^2 = 1$ $(*)$] und berechnen in Abhängigkeit des Parameters t im Richtungsvektor

$$\overrightarrow{r_h} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

einer beliebigen Gerade $h \subset \varepsilon$ das Maß des spitzen Schnittwinkels $\varphi_h = \measuredangle(g,h)$:

$$\cos\varphi_h = \frac{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}\right|}$$

Da φ_h genau dann minimal wird, wenn $\cos\varphi_h$ und somit auch $\cos^2\varphi_h$ maximal wird, erhalten wir für letzteren Ausdruck unter Beachtung von $(*)$ eine Funktion f in der Variable k mit der Funktionsgleichung

$$f(k) = \frac{(bk+a)^2}{k^2+1}.$$

Differenzieren liefert

$$f'(k) = \frac{2b\cdot(bk+a)\cdot(k^2+1) - 2k\cdot(bk+a)^2}{(k^2+1)^2} = 2\cdot(bk+a)\cdot\frac{b\cdot(k^2+1) - k\cdot(bk+a)}{(k^2+1)^2} =$$

$$= 2\cdot(bk+a)\cdot\frac{b-ak}{(k^2+1)^2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad k = -\frac{a}{b} \;\vee\; k = \frac{b}{a} \quad\Rightarrow\quad k_1 = -\frac{a}{b},\; k_2 = \frac{b}{a}$$

Hierbei sticht schon einmal ins Auge, dass $k_1 \cdot k_2 = -1$ gilt, ergo die beiden "extremalen Geraden" aufeinander normal stehen (wie man einfach beweist, siehe etwa [84], S. 16).

Um nun festzustellen, welche der beiden Lösungen ${}_1k_2$ die gesuchte Maximumstelle liefert, gibt es neben Verwendung der zweiten Ableitung (hinreichender, aber nicht notwendiger Extremwerttest) oder *Epsilontik* (Nachweis, dass $f'({}_1k_2 - \varepsilon)\cdot f'({}_1k_2+\varepsilon) < 0$ gilt, also f' bei ${}_1k_2$ einen Vorzeichenwechsel erfährt, was für $f'(k-\varepsilon) > 0 \wedge f'(k+\varepsilon) < 0$ auf eine

Maximumstelle schließen lässt) aufgrund der speziellen Bauart von f auch die Möglichkeit, die Gültigkeit der Ungleichung $f({}_1k_2) \leq f(k)$ bzw. $f({}_1k_2) \geq f(k)$ $(\forall k \in \mathbb{R}\backslash\{{}_1k_2\})$ auf elementare Weise zu zeigen (ebenso wie die beiden erstgenannten Methoden als Übung dem werten L$\substack{\text{e}\\ \text{ö}}$ser empfohlen).

Wir werden hier ein in [84], S.184f hergeleitetes (wiederum hinreichendes, aber nicht notwendiges) Kriterium verwenden, demzufolge für eine *Stelle* x_0 des Definitionsbereichs einer rationalen Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)},$$

für *welche* bereits $f'(x_0) = 0$ gilt, aus

$$u''(x_0)\cdot v(x_0) - u(x_0)\cdot v''(x_0) \left\{ \begin{matrix} < 0 \\ > 0 \end{matrix} \right\} \text{ folgt, dass } x_0 \text{ eine } \left\{ \begin{matrix} \text{Maximumstelle} \\ \text{Minimumstelle} \end{matrix} \right\} \text{ von } f \text{ ist.}$$

Wegen

$$u(k) = (bk + a)^2 \;\Rightarrow\; u'(k) = 2b \cdot (bk + a) \;\Rightarrow\; u''(k) = 2b^2$$

sowie

$$v(k) = k^2 + 1 \;\Rightarrow\; v'(k) = 2 \cdot k \;\Rightarrow\; v''(k) = 2$$

erhalten wir

$$u''(k_1) \cdot v(k_1) - u(k_1) \cdot v''(k_1) = 2b^2 \cdot \left(\frac{a^2}{b^2} + 1 \right) - 0 = 2 \cdot (a^2 + b^2) > 0$$

sowie

$$u''(k_2)\cdot v(k_2) - u(k_2)\cdot v''(k_2) = 2b^2 \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} + 1 \right) - 2 \cdot \left(\frac{b^2}{a} + a \right)^2 = \frac{2b^4}{a^2} + 2b^2 - \frac{2b^4}{a^2} - 2b^2 - 2a^2 = -2a^2 < 0.$$

Also liegt bei k_1 eine Minimum- und bei k_2 eine Maximumstelle vor.
Da k_1 bzw. k_2 die Richtungsvektoren

$$\overrightarrow{r_{h_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \\ 0 \end{pmatrix} \;||\; \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_{h_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \\ 0 \end{pmatrix} \;||\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

generiert, ergibt sich demnach, dass der Grundriss g' von g (bzw. allgemeiner: die Normalprojektion g_ε von g in ε) den kleinsten spitzen Winkel liefert und ferner die Normale auf g_ε in ε den größten (nämlich rechten) Winkel mit g einschließt, weshalb wir definieren:

$\boxed{\text{DEFINITION.}}$ Unter den Schnittwinkeln zwischen einer Gerade g und einer Ebene ε versteht man die Schnittwinkel zwischen den Geraden g sowie g_ε, wobei g_ε die Normalprojektion von g in ε bezeichnet.

3.4 Extrema II: Treffnormalen

3.4.1 Ein geometrischer Zugang

Haben zwei Geraden g und h keine Punkte gemeinsam, liegen aber auch nicht zueinander parallel, so spricht man von (zueinander) windschiefen Geraden, deren **Richtungen** eine Ebene aufspannen. Es ist offensichtlich, dass g und h durch eine räumliche Drehung sowie eine Translation in eine derartige Lage gebracht werden können, sodass g in π_1 liegt und durch den Koordinatenursprung verläuft sowie h parallel zu π_1 verläuft und die $z-$Achse im Punkt $Z(0|0|w)$ schneidet, wobei sich aber nichts an der gegenseitigen Lagebeziehung ändert (weil es sich bei Rotationen wie auch Verschiebungen um *Isometrien* handelt).

Dann können g und h via

$$g : X = q \cdot (s|t|0) \quad \text{und}$$

$$h : X = (0|0|w) + r \cdot (u|v|0)$$

beschrieben werden, wobei die Startpunkte $G(0|0|0)$ und $H(0|0|w)$ das einzige Punktepaar auf den beiden Geraden ist, für welches die Strecke GH normal auf g und auf h steht. Für alle anderen Punkte G_q und H_r auf g und h ergeben sich wegen der obigen Parameterdarstellungen die Koordinatisierungen

$$G_q(sq|tq|0) \quad \text{und} \quad H_r(ur|vr|w),$$

woraus

$$\overrightarrow{G_qH_r} = \begin{pmatrix} ur - sq \\ vr - tq \\ w \end{pmatrix}$$

folgt und wir somit wegen

$$\overline{G_qH_r} = \left|\overrightarrow{G_qH_r}\right| \to \text{Min.} \Leftrightarrow \underbrace{\overline{G_qH_r}^2}_{f(q,r)} \to \text{Min.}$$

auf das Problem des Auffindens der Minimumstelle der Funktion f mit

$$f(q,r) = (ur - sq)^2 + (vr - tq)^2 + w^2$$

geführt werden.

Wegen $(ur - sq)^2 \geq 0 \; \forall (q,r) \in \mathbb{R}^2$ sowie $(vr - tq)^2 \geq 0 \; \forall (q,r) \in \mathbb{R}^2$ gilt somit $f(q,r) \geq w^2 \; \forall (q,r) \in \mathbb{R}^2$, wobei das Minimum w^2 nur für den Fall $ur - sq = vr - tq = 0$ eintritt, was auf

$$\begin{pmatrix} u & -s \\ v & -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit für den Fall

$$\det \begin{pmatrix} u & -s \\ v & -t \end{pmatrix} \neq 0$$

– was zu $g \nparallel h$ äquivalent ist – auf die eindeutige Lösung

$$(q|r) = (0|0)$$

führt, womit also unter allen sowohl g als auch h schneidenden Geraden (sogenannte **Treffgeraden**) die sogenannte **Treffnormale** den kürzesten Abstand zwischen g und h erzeugt.

3.4.2 Ein analytischer Weg

Anders als eben zuvor im geometrischen Zugang gehen wir hier von zwei zueinander windschiefen Geraden g und h in allgemeiner Lage mit den Parameterdarstellungen

$$g : X = G + r \cdot \overrightarrow{g} \quad \text{und} \quad h : X = H + s \cdot \overrightarrow{h}$$

sowie **normierten Richtungsvektoren** (d.h. es gilt $|\overrightarrow{g}| = \left|\overrightarrow{h}\right| = 1$) aus.

Der Abstand $d = d(r,s)$ zweier beliebiger Punkte $G_r = G + r \cdot \overrightarrow{g}$ und $H_s = H + s \cdot \overrightarrow{h}$ auf g und h wird dann via

$$d = d(r,s) = \left|\overrightarrow{G_rH_s}\right| = \left|\overrightarrow{GH} + s \cdot \overrightarrow{h} - r \cdot \overrightarrow{g}\right|$$

beschrieben, wobei

$$d \;\to\; \text{Min.} \quad \Rightarrow \quad d^2 = f(r,s) = \left|\overrightarrow{GH} + s \cdot \overrightarrow{h} - r \cdot \overrightarrow{g}\right|^2 \;\to\; \text{Min.}$$

gilt und f wegen $|\mathfrak{x}|^2 = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}$ auch in der Form

$$f(r,s) = \left(\overrightarrow{GH} + s \cdot \overrightarrow{h} - r \cdot \overrightarrow{g}\right) \cdot \left(\overrightarrow{GH} + s \cdot \overrightarrow{h} - r \cdot \overrightarrow{g}\right)$$

bzw. ausmultipliziert als

$$f(r,s) = \overrightarrow{GH}^2 + 2 \cdot \left(\overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{GH}\right) \cdot s - 2 \cdot \left(\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{GH}\right) \cdot r - 2 \cdot \left(\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{h}\right) \cdot r \cdot s + \underbrace{\overrightarrow{h}^2}_{1} \cdot s^2 + \underbrace{\overrightarrow{g}^2}_{1} \cdot r^2$$

angeschrieben werden kann.

Um nun die Minimumstelle von f zu ermitteln, wenden wir den bekannten Extremwerttest an, d.h. wir bilden sowohl

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \underbrace{2r - 2\left(\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{h}\right) \cdot s - 2\left(\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{GH}\right) = 0}_{(1)} \quad \Leftrightarrow \quad r - \left(\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{h}\right) \cdot s = \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{GH} \quad (1')$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \overbrace{2s - 2\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right)\cdot r + 2\left(\vec{h}\cdot\overrightarrow{GH}\right) = 0}^{(2)} \quad\Leftrightarrow\quad -\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right)\cdot r + s = -\left(\vec{h}\cdot\overrightarrow{GH}\right) \qquad (2')$$

als auch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = 2 \quad\text{und}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial s} = \frac{\partial^2 f}{\partial s\partial r} = -2\cdot\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right).$$

Das aus $(1')$ und $(2')$ resultierende lineare Gleichungssystem aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$ (notwendige Bedingung für die gesuchte Minimumstelle) lässt sich in Matrix/Vektor-Notation auch in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & -\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right) \\ -\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right) & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{g}\cdot\overrightarrow{GH} \\ -\left(\vec{h}\cdot\overrightarrow{GH}\right) \end{pmatrix}$$

anschreiben und ließe sich prinzipiell mittels CRAMERscher Regel lösen, wobei wir hier nur dem gemeinsamen Nenner von r und s Beachtung schenken ...

$$r = \frac{\dots}{\det\begin{pmatrix} 1 & -\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right) \\ -\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right) & 1 \end{pmatrix}} = \frac{\dots}{1-\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right)^2},$$

... da selbiger wegen

$$\cos\measuredangle(g,h) = \frac{\vec{g}\cdot\vec{h}}{\underbrace{|\vec{g}|}_{1}\cdot\underbrace{\left|\vec{h}\right|}_{1}} = \vec{g}\cdot\vec{h} \quad\Rightarrow\quad 1-\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right)^2 = 1-\cos^2\measuredangle(g,h) = \sin^2\measuredangle(g,h)$$

sowie

$$g \nparallel h \quad\Rightarrow\quad \measuredangle(g,h)\neq 0^\circ \quad\Rightarrow\quad \sin\measuredangle(g,h)\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \sin^2\measuredangle(g,h)\neq 0$$

ungleich Null ist, woraus die Existenz und Eindeutigkeit einer stationären Stelle von f folgt.

Von letzterer ist jetzt noch nachzuweisen, dass es sich bei ihr um eine Minimumstelle handelt, wozu wir die zugehörige HESSE-Matrix $H_f = (h_{ij})$ aufstellen ...

$$H_f \equiv \begin{pmatrix} 2 & -2\cdot\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right) \\ -2\cdot\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right) & 2 \end{pmatrix},$$

... woraus wegen $h_{11} = h_{22} = 2 > 0$ sowie $\det H_f = 4 - 4\cdot\left(\vec{g}\cdot\vec{h}\right)^2 \overbrace{=}^{\text{siehe oben!}}$ $4\cdot\sin^2\measuredangle(g,h) > 0$ folgt, dass f genau eine Minimumstelle aufweist, $\square$.

Nun kann (1) bzw. (2) als

$$(-2)\cdot\left(\overrightarrow{G_rH_s}\cdot\vec{g}\right) = 0 \quad\text{bzw.}\quad 2\cdot\left(\overrightarrow{G_rH_s}\cdot\vec{h}\right) = 0$$

interpretiert werden, was bedeutet, dass die kürzeste Verbindung zwischen g und h demnach auf einer sowohl zu g als zu h normalen Gerade gemessen wird, weshalb man diese Gerade als **Treffnormale** bezeichnet (nebst allen anderen sogenannten *Treffgeraden*, welche sowohl g als auch h schneiden).