

## Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Stochastik</b>   | <b>5</b>  |
| 2.1      | Elementare Statistik und ebenso elementare Komplexitätstheorie . . . . .    | 5         |
| 2.2      | Der lokale Grenzwertsatz von MOIVRE-LAPLACE . . . . .                       | 8         |
| 2.3      | Elementare Wählerstromanalyse . . . . .                                     | 21        |
| <b>3</b> | <b>Analysis</b>   | <b>23</b> |
| 3.1      | Implizites Differenzieren . . . . .   | 23        |
| 3.2      | LAGRANGE-Multiplikatoren . . . . .  | 26        |
| 3.3      | Extrema von Funktionen in zwei Variablen . . . . .                          | 31        |
| 3.4      | Extrema I: Winkel Ebene/Gerade . . . . .                                    | 38        |
| 3.5      | Extrema II: Winkel Ebene/Ebene . . . . .                                    | 40        |
| 3.6      | Extrema III: Treffnormalen . . . . .  | 42        |
| 3.6.1    | Ein geometrischer Zugang . . . . .  | 42        |
| 3.6.2    | Ein analytischer Weg . . . . .  | 43        |
| 3.7      | Extrema IV: Isoperimetrische Vierecke . . . . .                             | 45        |
| 3.8      | Extrema V: Anwendungen der LAGRANGE-Multiplikatoren . . . . .               | 52        |
| 3.8.1    | Günstigste Stromleitung zum abseits gelegenen Haus . . . . .                | 52        |
| 3.8.2    | Volumsgrößter Drehzylinder in einer Kugel . . . . .                         | 53        |
| 3.8.3    | Volumskleinster Drehkegel um einen coaxialen Drehzylinder . . . . .         | 55        |
| 3.8.4    | Volumsgrößter Drehkegel in einer Kugel . . . . .                            | 57        |
| 3.8.5    | Volumskleinster Drehkegel um eine Kugel . . . . .                           | 58        |
| 3.8.6    | Maximaler Sehwinkel zum Genuss eines Bildes . . . . .                       | 60        |
| 3.8.7    | Drehkegel minimalen Mantelflächeninhalts bei vorgegebenem Volumen . . . . . | 63        |
| 3.8.8    | Die ideale Eprouvette . . . . .   | 64        |
| 3.8.9    | Volumsgrößter Drehzylinder in einem coaxialen Drehkegel . . . . .           | 65        |
| 3.8.10   | Materialverbrauchsfreundlichster Zylinder . . . . .                         | 67        |
| 3.8.11   | Ausblick 1: Fassungsreichster Zylinder . . . . .                            | 68        |
| 3.8.12   | Ausblick 2: Volumsgrößte Pyramide aus einem Quadrat . . . . .               | 69        |
| 3.8.13   | Ausblick 3: Kürzeste Verbindung zweier Punkte über eine Gerade . . . . .    | 70        |
| 3.8.14   | Ausblick 4: Kugel und Würfel . . . . .                                      | 71        |
| 3.8.15   | Ausblick 5: Trapez in Halbkreis . . . . .                                   | 72        |
| 3.9      | Eigenschaften der komplexen Ableitung . . . . .                             | 72        |
| 3.10     | Geodätische Kurven auf der Kugel . . . . .                                  | 75        |
| 3.11     | Die EULER-MASCHERONI-Konstante . . . . .                                    | 77        |
| 3.12     | Linearapproximationen und Ableitungsregeln . . . . .                        | 79        |
| 3.13     | Ein heuristischer Weg zur TAYLOR-Formel . . . . .                           | 82        |
| 3.14     | Potenzfunktion, Exponentialfunktion oder keines von beiden? . . . . .       | 85        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>4</b> | <b>Arithmetik und Algebra</b>   | <b>87</b>  |
| 4.1      | Zur Division von Brüchen . . . . .  | 87         |
| 4.2      | Auf dem Weg zu binomischen Formeln . . . . .  | 88         |
| 4.2.1    | Die erste binomische Formel und der Lehrsatz von PYTHAGORAS . . . . .                 | 88         |
| 4.2.2    | Die zweite binomische Formel mit Hilfe der ersten binomischen Formel . . . . .        | 89         |
| 4.2.3    | Die dritte binomische Formel via Abbildungsgeometrie . . . . .                        | 90         |
| 4.2.4    | Vermischte Aufgaben zum Herleiten binomischer Formeln . . . . .                       | 91         |
| 4.3      | Das harmonische Mittel - phänomenologische Vielfalt . . . . .                         | 92         |
| 4.3.1    | Zum Lösen von Textaufgaben - ein Stück angewandter Mathematik . . . . .               | 92         |
| 4.3.2    | Zum Prozess des Abstrahierens - ein Stück reiner Mathematik . . . . .                 | 93         |
| 4.4      | Lösungsformeln für quadratische Gleichungen: Diverse <i>elementare</i> Wege . . . . . | 104        |
| 4.4.1    | Quadratische Gleichungen selbst gemacht . . . . .                                     | 104        |
| 4.4.2    | Ein Gleichungssystem als Schlüssel . . . . .  | 109        |
| 4.4.3    | Symmetrie als Schlüssel . . . . .   | 111        |
| 4.4.4    | Pythagoras als Schlüssel . . . . .  | 111        |
| 4.4.5    | Die dritte binomische Formel als Schlüssel . . . . .                                  | 114        |
| 4.4.6    | Produkt-Nullsatz als Schlüssel . . . . .  | 114        |
| 4.4.7    | Ein multiplikativer Ansatz als Schlüssel . . . . .                                    | 116        |
| 4.4.8    | Ein achter Zugang in Form einer Übungsaufgabe . . . . .                               | 119        |
| 4.4.9    | Ein neunter Zugang in Form einer Übungsaufgabe . . . . .                              | 119        |
| 4.5      | Das Pentagon und komplexe Zahlen . . . . .  | 121        |
| 4.6      | Symmetrische algebraische Gleichungen und eine Ergänzung zur VIETA-Gruppe . . . . .   | 123        |
| 4.6.1    | Symmetrische Gleichungen höheren Grades: Ein Ausblick . . . . .                       | 123        |
| 4.6.2    | Erweiterung der Satzgruppe von VIETA . . . . .  | 125        |
| 4.7      | Steigungsadditionen und komplexe Zahlen . . . . .                                     | 126        |
| 4.8      | Zugänge zu den komplexen Zahlen . . . . .   | 129        |
| 4.9      | Der Fundamentalsatz der Algebra . . . . .   | 134        |
| 4.10     | Lösungsformeln für quadratische Gleichungen vom höheren Standpunkt . . . . .          | 139        |
| 4.10.1   | Komplexe Zahlen und Matrizen als Wegbereiter . . . . .                                | 139        |
| 4.10.2   | Komplexe Zahlen und Polynome als Wegbereiter . . . . .                                | 140        |
| 4.11     | Fibonacci-Zahlen und Binomialkoeffizienten . . . . .                                  | 142        |
| <b>5</b> | <b>Geometrie</b>  | <b>144</b> |
| 5.1      | Grundlagen der <i>ebenen</i> analytischen Geometrie . . . . .                         | 144        |
| 5.1.1    | Eine Flächeninhaltsformel . . . . .   | 144        |
| 5.1.2    | Matrizen, Vektoren und Determinanten: Basics . . . . .                                | 144        |
| 5.1.3    | Präzisierung des Vektorbegriffs . . . . .   | 146        |
| 5.1.4    | Ausweitung des Vektorbegriffs . . . . .   | 147        |
| 5.1.5    | Rechnen mit Vektoren . . . . .  | 148        |
| 5.1.6    | Betrag von Vektoren . . . . .   | 153        |
| 5.1.7    | Orthogonalität von Vektoren: Das skalare Produkt . . . . .                            | 154        |
| 5.1.8    | Die Kippregel . . . . .   | 157        |
| 5.1.9    | Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts . . . . .                            | 159        |
| 5.1.10   | Die (HESSESche) Normalvektorform der Geradengleichung . . . . .                       | 162        |
| 5.1.11   | Die CRAMERSche Regel . . . . .  | 165        |
| 5.2      | Grundlagen der Trigonometrie . . . . .  | 167        |

|        |  |     |
|--------|--|-----|
| 5.2.1  | Sinus und Cosinus am Einheitskreis I: Determinante und Skalarprodukt . . . . .           | 167 |
| 5.2.2  | Sinus und Cosinus am Einheitskreis II: Koordinaten . . . . .                             | 167 |
| 5.2.3  | Additionstheoreme für Sinus und Cosinus . . . . .  | 169 |
| 5.2.4  | Sinus, Cosinus (und Tangens nicht nur) im rechtwinkligen Dreieck .                       | 170 |
| 5.2.5  | Symbiose zwischen Vektorrechnung und Trigonometrie . . . . .                             | 171 |
| 5.3    | Geometrie und Zahlentheorie: Ganze Dreiecke . . . . .                                    | 178 |
| 5.4    | Eine Ergänzung zu Determinante und Skalarprodukt . . . . .                               | 182 |
| 5.5    | Spuren, Determinanten und mehr davon . . . . .   | 184 |
| 5.6    | Vier- und höherdimensionale Geometrie . . . . .  | 185 |
| 5.6.1  | Der vierdimensionale Würfel und ... . . . .  | 185 |
| 5.6.2  | ... und einer seiner räumlichen Schnitte . . . . .                                       | 194 |
| 5.6.3  | Hypervolumina höherdimensionaler Sphären . . . . .                                       | 197 |
| 5.6.4  | Kegel im $\mathbb{R}^n$ und deren Beziehungen zu Sphären . . . . .                       | 205 |
| 5.6.5  | Winkel zwischen zwei Ebenen im $\mathbb{R}^4$ . . . . .                                  | 209 |
| 5.6.6  | Sonderfälle für Winkelmaße zwischen Ebenen . . . . .                                     | 212 |
| 5.6.7  | Charakterisierung isogonaler Ebenenpaare . . . . .                                       | 213 |
| 5.7    | Durchschnitt von Polygonen: Ein Spezialfall . . . . .                                    | 217 |
| 5.8    | Plückers $\mu$ für algebraische Kurven höherer Ordnung . . . . .                         | 219 |
| 5.9    | Ebene Kurven in Parameterdarstellung (PDST) . . . . .                                    | 224 |
| 5.9.1  | Ein simples, aber überraschendes Einstiegsbeispiel . . . . .                             | 224 |
| 5.9.2  | Weitere Aufgaben zu(nächst zu) ebenen Kurven . . . . .                                   | 225 |
| 5.9.3  | Übungsaufgaben zu(nächst zu) ebenen Kurven . . . . .                                     | 232 |
| 5.10   | Eine Ergänzung zum Winkel zwischen Gerade und Ebene . . . . .                            | 245 |
| 5.11   | Dreiecksgeometrie . . . . .  | 247 |
| 5.11.1 | Kopunktale Geraden I: Streckensymmetralen und Höhen . . . . .                            | 247 |
| 5.11.2 | Kopunktale Geraden II: Schwerlinien und Winkelsymmetralen . . .                          | 249 |
| 5.11.3 | Kollineare Punkte I: Die EULER-Gerade . . . . .  | 256 |
| 5.11.4 | Kollineare Punkte II: Die WALLACE-Gerade . . . . .                                       | 258 |
| 5.11.5 | Kopunktale Geraden III: Orthologische Dreiecke I . . . . .                               | 262 |
| 5.11.6 | Kopunktale Geraden IV: Orthologische Dreiecke II . . . . .                               | 263 |
| 5.12   | HP-Flächen . . . . .   | 265 |
| 5.12.1 | $z = x^2 - y^2$ . . . . .  | 265 |
| 5.12.2 | Zum eigenständigen Üben: $z = xy$ . . . . .  | 266 |
| 5.12.3 | Ein windschiefes Viereck . . . . .   | 267 |
| 5.12.4 | Ein weiteres windschiefes Viereck zum eigenständigen Üben . . . .                        | 271 |
| 5.13   | Raumkurven und Raumflächen in PDST . . . . .   | 273 |
| 5.13.1 | Einstieg: Die kleine Lösungsformel als Fläche . . . . .                                  | 273 |
| 5.13.2 | Weitere(s) zu Flächen (und Kurven) im Raum (und der Ebene) –<br>Übungsaufgaben . . . . . | 276 |

- Eine äußerst interessante und herausfordernde Übung für den werten Leser besteht nun darin, die erstaunliche Formel

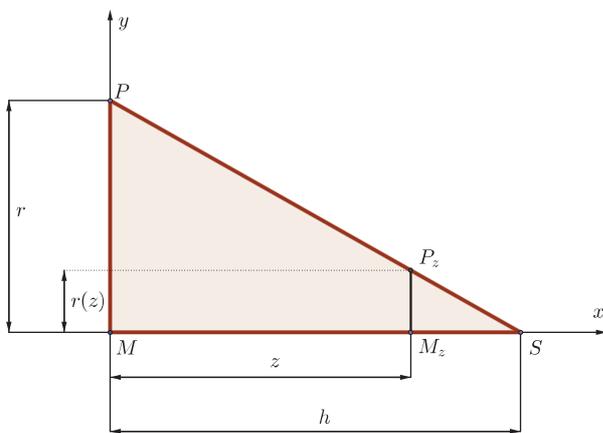
$$\sum_{k=1}^{\infty} V_{2k} = e^{r^2\pi} - 1$$

zu beweisen, welche ähnlich der (speziellen) EULERSchen Formel (bzgl. verschiedener Zugänge zu dieser schönen Formel konsultiere man etwa [42], S. 168ff!)  $e^{i\pi} = -1$  (welche übrigens in [4] auf Platz 1 der Top Ten der schönsten mathematischen Sätze gereiht ist, was auf eine Umfrage der renommierten Zeitschrift *The Mathematical Intelligencer* aus dem Jahr 1990 zurückgeht) mit 1,  $e$  und  $\pi$  die wichtigsten mathematischen Konstanten vereint.

#### 5.6.4 Kegel im $\mathbb{R}^n$ und deren Beziehungen zu Sphären

Nachdem wir uns im letzten Abschnitt mit den  $n$ -dimensionalen Analoga des Kreises im  $\mathbb{R}^2$  sowie der Kugel im  $\mathbb{R}^3$  beschäftigt haben, werden wir nun die höherdimensionalen Pendant des Drehkegels im  $\mathbb{R}^3$  behandeln, wozu wir folgenden *Aspekt des Kegels als Körper* verallgemeinern:

*Schneidet man einen Drehkegel mit zur Drehachse normalen Ebenen, so entsteht jeweils ein Kreis, dessen Radius dem Normalabstand der Schnittebene von der Kegelspitze direkt proportional ist.*



Um *diese Eigenschaft* zu präzisieren bzw. quantifizieren, gehen wir von der linken Abbildung aus, welche einen halben Achsenschnitt eines Drehkegels der Höhe  $h$  mit dem Radius  $r$  zeigt. Rotiert umgekehrt das Dreieck  $\Delta MSP$  um die  $x$ -Achse, so gelangt man vom zweidimensionalen Achsenschnitt wieder zum dreidimensionalen Drehkegel (als Körper) zurück. Letzteren kann man sich daher als unendliche viele übereinanderliegende

Kreise vorstellen, deren Radien  $r(z)$  gemäß der Abbildung von  $r(0) = r$  bis  $r(h) = 0$  *stetig abnehmen*. Quantifiziert wird *dies* durch die Anwendung des *Strahlensatzes* auf die zueinander ähnlichen Dreiecke  $\Delta P_z M_z S$  und  $\Delta PMS$ :

$$r(z) : (h - z) = r : h \Rightarrow r(z) = \frac{r}{h} \cdot (h - z)$$

Durch Integration über die Flächeninhalte  $A(z) = \pi \cdot r^2(z)$  für  $0 \leq z \leq h$  erhalten wir via

$$V = \int_0^h \pi \cdot r^2(z) \cdot dz = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot \int_0^h (z - h)^2 \cdot dz = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (z - h)^3 \Big|_0^h = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$$

das Volumen  $V$  des Drehkegels,  $\square$ .

Die Verallgemeinerung auf den  $\mathbb{R}^n$  für  $n \geq 4$  liegt nun auf der Hand:

Wir ersetzen die Flächeninhaltsfunktion  $A$  des Kreises durch die Volumsfunktion  $\bar{V}_{n-1}$  der entsprechenden  $n-1$ -dimensionalen Kugel aus dem letzten Abschnitt und werden dadurch für das  $n$ -dimensionale Kegelvolumen  $V_n$  auf

$$\begin{aligned} V_n &= \int_0^h \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\frac{n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot r^{n-1}(z) \cdot dz = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\frac{n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{r^{n-1}}{h^{n-1}} \cdot \int_0^h (h-z)^{n-1} \cdot dz = \\ &= \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\underbrace{\frac{n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}_{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}} \cdot \frac{r^{n-1}}{h^{n-1}} \cdot \underbrace{\frac{(h-z)^n}{n}}_{\frac{h^n}{n}} \Big|_0^h, \end{aligned}$$

also

$$V_n = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{n \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot r^{n-1} \cdot h$$

bzw.

$$V_n = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot r^{n-1} \cdot \frac{h}{n}, \quad \text{ergo } V_n = \bar{V}_{n-1} \cdot \frac{h}{n}$$

geführt.

In Verallgemeinerung des Optimierungsproblems aus Abschnitt 3.8.4 wollen wir jetzt das  $n$ -dimensionale Pendant behandeln, ergo unter allen einer  $n$ -dimensionalen Kugel vom Radius  $r$  einbeschriebenen  $n$ -dimensionalen Kegel jenen mit dem größten Volumen  $V_n$  zu ermitteln, wozu wir mit der selben Abbildung und auch gleichen Nebenbedingung wie in 3.8.4 ansetzen können, die Hauptbedingung sich jedoch zu  $f(x, y) = x^{n-1}y$  ändert. Dadurch werden wir also auf die Funktion  $L$  mit

$$L(x, y) = x^{n-1}y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 2ry)$$

geführt, deren nullgesetzte partielle Ableitungen (wobei  $x \neq 0$  zu beachten ist!)

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (n-1) \cdot x^{n-2}y + 2x\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(1-n)x^{n-3}y}{2}$$

sowie

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x^{n-1} + \lambda \cdot (2y - 2r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{x^{n-1}}{2 \cdot (r-y)},$$

also insgesamt (wiederum wegen  $x \neq 0$ )

$$\frac{(1-n)y}{2} = \frac{x^2}{2 \cdot (r-y)} \quad \text{bzw.} \quad (1-n)ry + (n-1)y^2 = x^2 \quad (**)$$

ergeben.

Beachten wir jetzt noch die Nebenbedingung  $x^2 + y^2 - 2ry = 0$  (\*), so ergibt sich durch Einsetzen von (\*\*) in (\*) die Gleichung

$$ny^2 - (n+1)ry = 0$$

bzw. wegen  $y \neq 0$  das Resultat

$$y = \frac{(n+1)r}{n}$$

und durch Einsetzen in (\*) oder (\*\*)

$$x^2 = \frac{2(n+1)}{n} \cdot r^2 - \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot r^2 = \frac{-n^2 - 2n - 1 + 2n^2 + 2n}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \cdot r,$$

also

$$(x_0|y_0) = \left( \frac{\sqrt{n^2 - 1} \cdot r}{n} \mid \frac{(n+1)r}{n} \right)$$

und somit

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \left( \frac{\sqrt{n^2 - 1} \cdot r}{n} \right)^{n-1} \cdot \frac{(n+1)r}{n^2} = \\ &= \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{(n-1)^{(n-1)/2} \cdot (n+1)^{(n+1)/2}}{n^{n+1}} \cdot r^n. \end{aligned}$$

Wegen

$$\bar{V}_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \cdot r^n$$

ergibt sich zunächst

$$V_n = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{(n-1)^{(n-1)/2} \cdot (n+1)^{(n+1)/2}}{n^{(n-1)/2} \cdot n^{(n+1)/2} \cdot n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\pi^{n/2}} \cdot \bar{V}_n,$$

wobei wir den relativen Anteil von  $V_n$  an  $\bar{V}_n$  unter Anwendung der Formel

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \quad (\#)$$

aus dem letzten Abschnitt (in welche wir anstelle von  $n$  "einfach"<sup>96</sup>  $\frac{n}{2}$  einsetzen) sowie im Zuge der Grenzwertberechnung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{\bar{V}_n}$  der Formel von STIRLING aus Abschnitt 2.2 wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{V_n}{\bar{V}_n} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot n} \cdot \overbrace{\left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right]^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \cdot \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{1/2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}}^{:=k_n} = \\ &= k_n \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot n} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\frac{n!}{2^n \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!} \cdot \sqrt{\pi}} = k_n \cdot \frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \frac{2^n \cdot \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}{n!} = \end{aligned}$$

Bilden wir jetzt den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$ , so ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{\bar{V}_n} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 1 \cdot \sqrt{e} \cdot 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \frac{2^n \cdot \pi \cdot n \cdot \left(\frac{n}{2e}\right)^n}{\sqrt{2\pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} \right], \quad \text{ergo} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{\bar{V}_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n}}},$$

<sup>96</sup>Weil die rechte Seite von (#) auch für  $\frac{n}{2}$  anstelle von  $n$  definiert ist, nachdem ja eben wegen (#) der Ausdruck  $\left(\frac{n}{2}\right)!$  nicht nur für gerade, sondern auch ungerade ganze Zahlen  $n$  definiert ist!

d.h. d.h. der hypervolumsgröße einer  $n$ -dimensionalen Kugel eingeschriebener  $n$ -dimensionale Drehkegel nimmt ca. den  $\sqrt{2\pi \cdot n}$ -ten Bruchteil des Kugelvolumens ein.

Fehlt noch der Nachweis des Maximums, um letztere Aussage auch mathematisch zu fundieren, wozu wir die aufgrund von 3.2 erforderlichen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung bilden ...

$$f_x = (n-1)x^{n-2}y, \quad f_y = x^{n-1}, \quad f_{xx} = (n-1)(n-2)x^{n-3}y, \quad f_{xy} = f_{yx} = (n-1)x^{n-2}, \quad f_{yy} = 0,$$

$$g_x = 2x, \quad g_y = 2y - 2r, \quad g_{xy} = g_{yx} = 0, \quad g_{xx} = g_{yy} = 2$$

... und den in 3.2 erhaltenen Ausdruck an der Stelle  $(x, y) = (x_0, y_0)$  auswerten:

$$\begin{aligned} & f_{xx} - 2 \cdot f_{xy} \cdot \frac{g_x}{g_y} + f_{yy} \cdot \left(\frac{g_x}{g_y}\right)^2 - \frac{f_y}{g_y} \cdot \left[ g_{xx} - 2 \cdot g_{xy} \cdot \frac{g_x}{g_y} + g_{yy} \cdot \left(\frac{g_x}{g_y}\right)^2 \right] \Bigg|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \\ &= (n-1) \cdot (n-2) \cdot \frac{(n^2-1)^{(n-3)/2}}{n^{n-3}} \cdot r^{n-3} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot r - 2 \cdot (n-1) \cdot \frac{(n^2-1)^{(n-2)/2}}{n^{n-2}} \cdot r^{n-2} \cdot \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \cdot r \\ & \quad - \frac{(n^2-1)^{(n-1)/2} \cdot r^{n-1}}{n^{n-1}} \cdot \frac{n}{2r} \cdot [2 + 2 \cdot (n^2-1)] = \\ &= r^{n-2} \cdot \frac{(n-2) \cdot (n^2-1)^{(n-1)/2} - 2 \cdot (n-1) \cdot (n^2-1)^{(n-1)/2} - (n^2-1)^{(n-1)/2} \cdot n^2}{n^{n-2}} = \\ &= \left(\frac{r}{n}\right)^{n-2} \cdot (n^2-1)^{(n-1)/2} \cdot [n-2-2 \cdot (n-1)-n^2] = - \left[\left(\frac{r}{n}\right)^{n-2} \cdot (n^2-1)^{(n-1)/2} \cdot n \cdot (n+1)\right] < 0 \end{aligned}$$

Also liegt gemäß unseren Überlegungen aus 3.2 an der Stelle  $(x_0|y_0)$  ein Maximum von  $f$  unter der Nebenbedingung (\*) vor,  $\square$ .

ÜBUNGSAUFGABE für den werten L  $\overset{e}{\underset{o}{\circ}}$  ser:

Unter Anwendung von Formel (0) aus Abschnitt 2.2 sowie der ebenda hergeleiteten Formel von STIRLING zeige man, dass die Wahrscheinlichkeit  $p_n$  für gleich viele Kopf- und Adlerwürfe unter  $2n$  Würfeln mit einer fairen Münze für große  $n$  ca. das  $\sqrt{2}$ -fache von  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{\sqrt{V_n}}$  beträgt<sup>97</sup>.

<sup>97</sup>was wieder einmal in äußerst faszinierender Weise Zeugnis darüber ablegt, welche unerwarteten Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen mathematischen Fragestellungen bestehen!

## Literatur

- [1] AMANN, Herbert und Joachim ESCHER (2001): Analysis III. Birkhäuser, Basel.
- [2] ARENS, Tilo, Frank HETTLICH, Christian KARPFFINGER, Ulrich KOCKELHORN, Klaus LICHTENEGGER und Hellmuth STACHEL (2008): Mathematik. Spektrum, Heidelberg.
- [3] ARTNER, Günther (2003): Ein computerunterstützter Zugang zur Differentialgeometrie. Diplomarbeit an der Technischen Universität Wien.
- [4] BASIEUX, Pierre (2004<sup>5</sup>): Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze. Rowohlt, Reinbek.
- [5] BORUCKI, Hans (2000): Online in die vierte Dimension. Aulis Verlag, Köln.
- [6] BORUCKI, Hans (2008): Ein Blick in die vierte Dimension. WBG, Darmstadt.
- [7] BÜCHTER, Andreas und Hans-Wolfgang HENN (2005): Elementare Stochastik. Springer, Berlin.
- [8] DAVIS, Philip J. und Reuben HERSH (1994): Erfahrung Mathematik. Birkhäuser, Basel.
- [9] EBBINGHAUS, Heinz-Dieter et al. (1992<sup>3</sup>): Zahlen. Springer, Berlin.
- [10] FOATA, Dominique und Aimé FUCHS (1999): Wahrscheinlichkeitsrechnung. Birkhäuser, Basel.
- [11] FORST, Wilhelm und Dieter HOFFMANN (2002): Funktionentheorie erkunden mit Maple. Springer, Berlin.
- [12] FRANZEN, Jonathan (2003): Die Korrekturen (Taschenbuchausgabe). Rowohlt, Reinbek.
- [13] FREY, Gerhard (1967): Einführung in die philosophischen Grundlagen der Mathematik. Schroedel, Hannover & Schöningh, Paderborn.
- [14] FUHRMANN, Wilhelm (1902): Kollineare und orthologische Dreiecke. Hartung, Königsberg.
- [15] GALLATLY, William (1910): The modern geometry of the triangle. Hodgson, London.
- [16] GLAESER, Georg (2007<sup>2</sup>): Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik. Spektrum, Heidelberg.
- [17] GLAESER, Georg und Konrad POLTHIER (2009): Bilder der Mathematik. Spektrum, Heidelberg.
- [18] GRAY, Alfred (1994): Differentialgeometrie - Klassische Theorie in moderner Darstellung. Spektrum, Heidelberg.

- [19] HAAG, Wilfried (2003): Wege zu geometrischen Sätzen. Klett, Stuttgart.
- [20] HAVIL, Julian (2007): Gamma. Springer, Berlin.
- [21] HEINTZ, Bettina (2000): Die Innenwelt der Mathematik. Springer, Wien.
- [22] HELLUS, Michael (2013<sup>3</sup>): Lineare Algebra nicht-vertieft. Logos, Berlin.
- [23] HEMMERLING, Marco (2011): Boxel - Experimenteller Pavillon auf dem Campus Emilie, Hochschule Ostwestfalen-Lippe.
- [24] HILBERT, David (1992): Natur und mathematisches Erkennen. Birkhäuser, Basel.
- [25] HUMENBERGER, Hans (2007): Nachbarbrüche, Medianten und Farey-Reihen – entdeckender und verständiger Umgang mit Brüchen. In: ÖMG Didaktik-Reihe (39), S. 66-80.
- [26] KOECHER, Max und Aloys KRIEG (2000<sup>2</sup>): Ebene Geometrie. Springer, Berlin.
- [27] KÖHLER, Günter (2006): Analysis. Heldermann, Lemgo.
- [28] KRANZER, Walter (1989): So interessant ist Mathematik. Aulis Verlag, Köln.
- [29] KRICKEBERG, Klaus und Herbert ZIEZOLD (1995<sup>4</sup>): Stochastische Methoden. Springer, Berlin.
- [30] LOEFFEL, Hans (1987): Blaise Pascal. Birkhäuser, Basel
- [31] MATOUSEK, Jiri und Jaroslav NESETRIL (2002): Diskrete Mathematik . Springer, Berlin.
- [32] NEEDHAM, Tristan (2001): Anschauliche Funktionentheorie. Oldenbourg, München.
- [33] NELSON, Roger B. (1993): Proofs without words - exercises in visual thinking. The mathematical association of America.
- [34] PASCAL, Blaise (1972<sup>7</sup>): Über die Religion und über einige andere Gegenstände (Pensées). Lambert Schneider, Heidelberg.
- [35] PEIFFER, Jeanne und Amy DAHAN-DALMEDICO (1994): Wege und Irrwege - Eine Geschichte der Mathematik. Birkhäuser, Basel.
- [36] QUAISSER, Erhard und Hans-Jürgen SPRENGEL (1986): Extrama. Harri Deutsch, Thun/Frankfurt.
- [37] REICHEL, Hans–Christian, Günter HANISCH und Robert MÜLLER (1992<sup>3</sup>): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Hölder–Pichler–Tempisky, Wien.
- [38] REICHEL, Hans-Christian, Robert MÜLLER, Günter HANISCH und Josef LAUB (1992<sup>2</sup>): Lehrbuch der Mathematik 7. öbv&hpt, Wien.
- [39] REICHEL, Hans-Christian, Robert MÜLLER und Günter HANISCH (1993<sup>2</sup>): Lehrbuch der Mathematik 8. öbv&hpt, Wien.

- [40] REICHEL, Hans-Christian, Erich WINDISCHBACHER, Robert RESEL, Volkmar LAUTSCHAM und Stefan GÖTZ (1997): Wege zur Mathematik - Anregungen und Vertiefungen. öbv&hpt, Wien.
- [41] RESEL, Robert (1999): Ausbaumöglichkeiten der Oberstufen-Schulmathematik. Diplomarbeit, Universität Wien.
- [42] RESEL, Robert (2014): Reise zum Mittelpunkt der Mathematik. Logos, Berlin.
- [43] RUDIN, Walter (1998): Analysis. Oldenbourg, München/Wien.
- [44] SACHS, Lothar (1974<sup>4</sup>): Angewandte Statistik. Springer, Berlin.
- [45] SCHARK, Rainer (1992): Konstanten in der Mathematik - variabel betrachtet. Harri Deutsch, Frankfurt.
- [46] SCHEID, Harald (1997): Folgen und Funktionen. Spektrum, Heidelberg.
- [47] SCHUPP, Hans und Heinz DABROCK (1995): Höhere Kurven. BI-Verlag, Mannheim.
- [48] STILLWELL, John (2002): Mathematics and its history. Springer, Berlin.
- [49] SZIRUCSEK, Eduard, Gerhard DINAUER, Hubert UNFRIED und Herwig SCHATZL (1994<sup>3</sup>): Mathematik 7. öbv&hpt, Wien.
- [50] TITTMANN, Peter (2000): Kombinatorik. Spektrum, Heidelberg.
- [51] WELLS, David (1991): The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry. Penguin books, London.
- [52] WISCHOUNIG, Veronika (2000): Analytische Darstellung ebener algebraischer Kurven. Diplomarbeit an der Technischen Universität Wien.
- [53] WUNDERLICH, Walter (1966): Darstellende Geometrie I. BI-Verlag, Mannheim.