Inhaltsverzeichnis

- Eine äußerst interessante und herausfordernde Übung für den werten L $\overset{\text{e}}{\text{ö}}$ ser besteht nun darin, die erstaunliche Formel

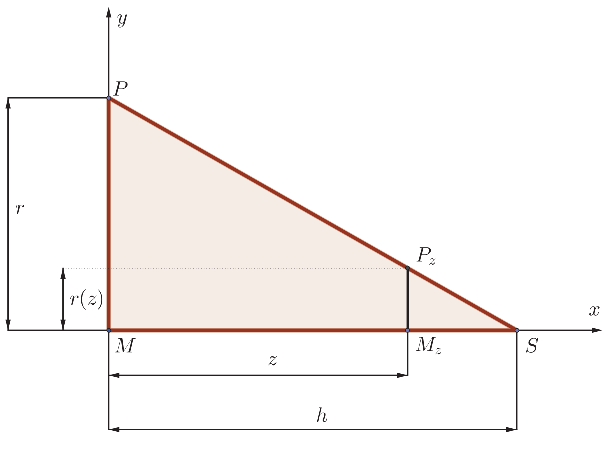
$$\sum_{k=1}^{\infty} V_{2k} = e^{r^2\pi} - 1$$

zu beweisen, welche ähnlich der (speziellen) Eulerschen Formel (bzgl. verschiedener Zugänge zu dieser schönen Formel konsultiere man etwa [42], S. 168ff!) $e^{i\pi} = -1$ (welche übrigens in [4] auf Platz 1 der Top Ten der schönsten mathematischen Sätze gereiht ist, was auf eine Umfrage der renommierten Zeitschrift *The Mathematical Intelligencer* aus dem Jahr 1990 zurückgeht) mit 1, e und π die wichtigsten mathematischen Konstanten vereint.

5.6.4 Kegel im $\mathbb{R}^n$ und deren Beziehungen zu Sphären

Nachdem wir uns im letzten Abschnitt mit den n-dimensionalen Analoga des Kreises im $\mathbb{R}^2$ sowie der Kugel im $\mathbb{R}^3$ beschäftigt haben, werden wir nun die höherdimensionalen Pendants des Drehkegels im $\mathbb{R}^3$ behandeln, wozu wir folgenden *Aspekt des Kegels als Körper* verallgemeinern:

Schneidet man einen Drehkegel mit zur Drehachse normalen Ebenen, so entsteht jeweils ein Kreis, dessen Radius dem Normalabstand der Schnittebene von der Kegelspitze direkt proportional ist.



Um *diese Eigenschaft* zu präzisieren bzw. quantifizieren, gehen wir von der linken Abbildung aus, welche einen halben Achsenschnitt eines Drehkegels der Höhe h mit dem Radius r zeigt. Rotiert umgekehrt das Dreieck ΔMSP um die x-Achse, so gelangt man vom zweidimensionalen Achsenschnitt wieder zum dreidimensionalen Drehkegel (als Körper) zurück. Letzteren kann man sich daher als unendliche viele übereinanderliegende Kreise vorstellen, deren Radien $r(z)$ gemäß der Abbildung von $r(0) = r$ bis $r(h) = 0$ *stetig abnehmen*. Quantifiziert wird *dies* durch die Anwendung des *Strahlensatzes* auf die zueinander ähnlichen Dreiecke $\Delta P_z M_z S$ und ΔPMS:

$$r(z) : (h - z) = r : h \quad \Rightarrow \quad r(z) = \frac{r}{h} \cdot (h - z)$$

Durch Integration über die Flächeninhalte $A(z) = \pi \cdot r^2(z)$ für $0 \le z \le h$ erhalten wir via

$$V = \int_0^h \pi \cdot r^2(z) \cdot \mathrm{d}z = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot \int_0^h (z-h)^2 \cdot \mathrm{d}z = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (z-h)^3\Big|_0^h = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$$

das Volumen V des Drehkegels, $\square$.

Die Verallgemeinerung auf den $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 4$ liegt nun auf der Hand:

Wir ersetzen die Flächeninhaltsfunktion A des Kreises durch die Volumsfunktion $\overline{V}_{n-1}$ der entsprechenden $n-1$-dimensionalen Kugel aus dem letzten Abschnitt und werden dadurch für das n-dimensionale Kegelvolumen V_n auf

$$V_n = \int_0^h \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\frac{n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot r^{n-1}(z) \cdot \mathrm{d}z = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\frac{n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{r^{n-1}}{h^{n-1}} \cdot \int_0^h (h-z)^{n-1} \cdot \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\underbrace{\frac{n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}_{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}} \cdot \frac{r^{n-1}}{h^{n-1}} \cdot \underbrace{\left.\frac{(h-z)^n}{n}\right|_h^0}_{\frac{h^n}{n}},$$

also

$$\boxed{V_n = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{n \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot r^{n-1} \cdot h}$$

bzw.

$$V_n = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot r^{n-1} \cdot \frac{h}{n}, \quad \text{ergo } \boxed{V_n = \overline{V}_{n-1} \cdot \frac{h}{n}}$$

geführt.

In Verallgemeinerung des Optimierungsproblems aus Abschnitt 3.8.4 wollen wir jetzt das n-dimensionale Pendant behandeln, ergo unter allen einer n-dimensionalen Kugel vom Radius r einbeschriebenen n-dimensoionalen Kegel jenen mit dem größten Volumen V_n zu ermitteln, wozu wir mit der selben Abbildung und auch gleichen Nebenbedingung wie in 3.8.4 ansetzen können, die Hauptbedingung sich jedoch zu $f(x, y) = x^{n-1}y$ ändert. Dadurch werden wir also auf die Funktion L mit

$$L(x, y) = x^{n-1}y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 2ry)$$

geführt, deren nullgesetze partielle Ableitun- gen (wobei $x \neq 0$ zu beachten ist!)

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (n-1) \cdot x^{n-2}y + 2x\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{(1-n)x^{n-3}y}{2}$$

sowie

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x^{n-1} + \lambda \cdot (2y - 2r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{x^{n-1}}{2 \cdot (r-y)},$$

also insgesamt (wiederum wegen $x \neq 0$)

$$\frac{(1-n)y}{2} = \frac{x^2}{2 \cdot (r-y)} \quad \text{bzw.} \quad (1-n)ry + (n-1)y^2 = x^2 \quad (**)$$

ergeben.

Beachten wir jetzt noch die Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 2ry = 0 \;\; (*)$,
so ergibt sich durch Einsetzen von $(**)$ in $(*)$ die Gleichung

$$ny^2 - (n+1)ry = 0$$

bzw. wegen $y \neq 0$ das Resultat

$$y = \frac{(n+1)r}{n}$$

und durch Einsetzen in $(*)$ oder $(**)$

$$x^2 = \frac{2(n+1)}{n} \cdot r^2 - \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot r^2 = \frac{-n^2 - 2n - 1 + 2n^2 + 2n}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \cdot r,$$

also

$$(x_0|y_0) = \left(\frac{\sqrt{n^2-1} \cdot r}{n} \middle| \frac{(n+1)r}{n} \right)$$

und somit

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\sqrt{n^2-1} \cdot r}{n} \right)^{n-1} \cdot \frac{(n+1)r}{n^2} = \\ &= \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{(n-1)^{(n-1)/2} \cdot (n+1)^{(n+1)/2}}{n^{n+1}} \cdot r^n. \end{aligned}$$

Wegen

$$\overline{V}_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \cdot r^n$$

ergibt sich zunächst

$$V_n = \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot \frac{(n-1)^{(n-1)/2} \cdot (n+1)^{(n+1)/2}}{n^{(n-1)/2} \cdot n^{(n+1)/2} \cdot n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\pi^{n/2}} \cdot \overline{V}_n,$$

wobei wir den relativen Anteil von V_n an $\overline{V}_n$ unter Anwendung der Formel

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \cdot \sqrt{\pi} \quad (\#)$$

aus dem letzten Abschnitt (in welche wir anstelle von n "einfach[96]" $\frac{n}{2}$ einsetzen) sowie im Zuge der Grenzwertberechung $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{V_n}{\overline{V}_n}$ der Formel von Stirling aus Abschnitt 2.2 wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{V_n}{\overline{V}_n} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot n} \cdot \overbrace{\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{1/2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}^{:=k_n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = \\ &= k_n \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot n} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\frac{n!}{2^n \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!} \cdot \sqrt{\pi}} = k_n \cdot \frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \frac{2^n \cdot \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2}{n!} = \end{aligned}$$

Bilden wir jetzt den Grenzwert für $n \to \infty$, so ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{\overline{V}_n} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 1 \cdot \sqrt{e} \cdot 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\pi \cdot n} \cdot \frac{2^n \cdot \pi \cdot n \cdot \left(\frac{n}{2e}\right)^n}{\sqrt{2\pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} \right], \quad \text{ergo} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{\overline{V}_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n}}},$$

[96] Weil die rechte Seite von (#) auch für $\frac{n}{2}$ anstelle von n definiert ist, nachdem ja eben wegen (#) der Ausdruck $\left(\frac{n}{2}\right)!$ nicht nur für gerade, sondern auch ungerade ganze Zahlen n definiert ist!

d.h. *d.h. der hypervolumsgrößte einer n-dimensionalen Kugel einbeschriebener n-dimensionale Drehkegel nimmt ca. den* $\sqrt{2\pi\cdot n}^{\,ten}$ *Bruchteil des Kugelvolumens ein.*

Fehlt noch der Nachweis des Maximums, um *letztere Aussage auch mathematisch zu fundieren*, wozu wir die aufgrund von 3.2 erforderlichen partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung bilden ...

$$f_x=(n-1)x^{n-2}y,\ f_y=x^{n-1},\ f_{xx}=(n-1)(n-2)x^{n-3}y,\ f_{xy}=f_{yx}=(n-1)x^{n-2},\ f_{yy}=0,$$

$$g_x=2x,\ g_y=2y-2r,\ g_{xy}=g_{yx}=0,\ g_{xx}=g_{yy}=2$$

... und den in 3.2 erhaltenen Ausdruck an der Stelle $(x,y)=(x_0,y_0)$ auswerten:

$$f_{xx}-2\cdot f_{xy}\cdot\frac{g_x}{g_y}+f_{yy}\cdot\left(\frac{g_x}{g_y}\right)^2-\frac{f_y}{g_y}\cdot\left[g_{xx}-2\cdot g_{xy}\cdot\frac{g_x}{g_y}+g_{yy}\cdot\left(\frac{g_x}{g_y}\right)^2\right]\Bigg|_{(x,y)=(x_0,y_0)}=$$

$$=(n-1)\cdot(n-2)\cdot\frac{(n^2-1)^{(n-3)/2}}{n^{n-3}}\cdot r^{n-3}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot r-2\cdot(n-1)\cdot\frac{(n^2-1)^{(n-2)/2}}{n^{n-2}}\cdot r^{n-2}\cdot\frac{\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\cdot r}{\frac{r}{n}}$$

$$-\frac{(n^2-1)^{(n-1)/2}\cdot r^{n-1}}{n^{n-1}}\cdot\frac{n}{2r}\cdot[2+2\cdot(n^2-1)]=$$

$$=r^{n-2}\cdot\frac{(n-2)\cdot(n^2-1)^{(n-1)/2}-2\cdot(n-1)\cdot(n^2-1)^{(n-1)/2}-(n^2-1)^{(n-1)/2}\cdot n^2}{n^{n-2}}=$$

$$=\left(\frac{r}{n}\right)^{n-2}\cdot(n^2-1)^{(n-1)/2}\cdot[n-2-2\cdot(n-1)-n^2]=-\left[\left(\frac{r}{n}\right)^{n-2}\cdot(n^2-1)^{(n-1)/2}\cdot n\cdot(n+1)\right]<0$$

Also liegt gemäß unseren Überlegungen aus 3.2 an der Stelle $(x_0|y_0)$ ein Maximum von f unter der Nebenbedingung $(*)$ vor, □.

$\boxed{\text{ÜBUNGSAUFGABE für den werten L}\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{e}}{\text{ö}}\text{ser:}}$ Unter Anwendung von Formel (0) aus Abschnitt 2.2 sowie der ebenda hergeleiteten Formel von STIRLING zeige man, dass die Wahrscheinlichkeit p_n für gleich viele Kopf- und Adlerwürfe unter $2n$ Würfen mit einer fairen Münze für große n ca. das $\sqrt{2}$-fache von $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{V_n}{\overline{V}_n}$ beträgt[97].

[97]was wieder einmal in äußerst faszinierender Weise Zeugnis darüber ablegt, welche unerwarteten Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen mathematischen Fragestellungen bestehen!

Literatur

[1] Amann, Herbert und Joachim Escher (2001): Analysis III. Birkhäuser, Basel.

[2] Arens, Tilo, Frank Hettlich, Christian Karpfinger, Ulrich Kockelhorn, Klaus Lichtenegger und Hellmuth Stachel (2008): Mathematik. Spektrum, Heidelberg.

[3] Artner, Günther (2003): Ein computerunterstützter Zugang zur Differentialgeometrie. Diplomarbeit an der Technischen Universität Wien.

[4] Basieux, Pierre (2004^5): Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze. Rowohlt, Reinbek.

[5] Borucki, Hans (2000): Online in die vierte Dimension. Aulis Verlag, Köln.

[6] Borucki, Hans (2008): Ein Blick in die vierte Dimension. WBG, Darmstadt.

[7] Büchter, Andreas und Hans-Wolfgang Henn (2005): Elementare Stochastik. Springer, Berlin.

[8] Davis, Philip J. und Reuben Hersh (1994): Erfahrung Mathematik. Birkhäuser, Basel.

[9] Ebbinghaus, Heinz-Dieter et al. (1992^3): Zahlen. Springer, Berlin.

[10] Foata, Dominique und Aimé Fuchs (1999): Wahrscheinlichkeitsrechnung. Birkhäuser, Basel.

[11] Forst, Wilhelm und Dieter Hoffmann (2002): Funktionentheorie erkunden mit Maple. Springer, Berlin.

[12] Franzen, Jonathan (2003): Die Korrekturen (Taschenbuchausgabe). Rowohlt, Reinbek.

[13] Frey, Gerhard (1967): Einführung in die philosophischen Grundlagen der Mathematik. Schroedel, Hannover & Schöningh, Paderborn.

[14] Fuhrmann, Wilhelm (1902): Kollineare und orthologische Dreiecke. Hartung, Königsberg.

[15] Gallatly, William (1910): The modern geometry of the triangle. Hodgson, London.

[16] Glaeser, Georg (2007^2): Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik. Spektrum, Heidelberg.

[17] Glaeser, Georg und Konrad Polthier (2009): Bilder der Mathematik. Spektrum, Heidelberg.

[18] Gray, Alfred (1994): Differentialgeometrie - Klassische Theorie in moderner Darstellung. Spektrum, Heidelberg.

[19] Haag, Wilfried (2003): Wege zu geometrischen Sätzen. Klett, Stuttgart.

[20] Havil, Julian (2007): Gamma. Springer, Berlin.

[21] Heintz, Bettina (2000): Die Innenwelt der Mathematik. Springer, Wien.

[22] Hellus, Michael (2013[3]): Lineare Algebra nicht-vertieft. Logos, Berlin.

[23] Hemmerling, Marco (2011): Boxel - Experimenteller Pavillon auf dem Campus Emilie, Hochschule Ostwestfalen-Lippe.

[24] Hilbert, David (1992): Natur und mathematisches Erkennen. Birkhäuser, Basel.

[25] Humenberger, Hans (2007): Nachbarbrüche, Medianten und Farey-Reihen – entdeckender und verständiger Umgang mit Brüchen. In: ÖMG Didaktik-Reihe (39), S. 66-80.

[26] Koecher, Max und Aloys Krieg (2000[2]): Ebene Geometrie. Springer, Berlin.

[27] Köhler, Günter (2006): Analysis. Heldermann, Lemgo.

[28] Kranzer, Walter (1989): So interessant ist Mathematik. Aulis Verlag, Köln.

[29] Krickeberg, Klaus und Herbert Ziezold (1995[4]): Stochastische Methoden. Springer, Berlin.

[30] Loeffel, Hans (1987): Blaise Pascal. Birkhäuser, Basel

[31] Matousek, Jiri und Jaroslav Nesetril (2002): Diskrete Mathematik . Springer, Berlin.

[32] Needham, Tristan (2001): Anschauliche Funktionentheorie.
Oldenbourg, München.

[33] Nelson, Roger B. (1993): Proofs without words - exercises in visual thinking. The mathematical association of America.

[34] Pascal, Blaise (1972[7]): Über die Religion und über einige andere Gegenstände (Pensées). Lambert Schneider, Heidelberg.

[35] Peiffer, Jeanne und Amy Dahan-Dalmedico (1994):
Wege und Irrwege - Eine Geschichte der Mathematik. Birkhäuser, Basel.

[36] Quaisser, Erhard und Hans-Jürgen Sprengel (1986): Extrama. Harri Deutsch, Thun/Frankfurt.

[37] Reichel, Hans–Christian, Günter Hanisch und Robert Müller (1992[3]): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Hölder–Pichler–Tempsky, Wien.

[38] Reichel, Hans-Christian, Robert Müller, Günter Hanisch und Josef Laub (1992[2]): Lehrbuch der Mathematik 7. öbv&hpt, Wien.

[39] Reichel, Hans-Christian, Robert Müller und Günter Hanisch (1993[2]): Lehrbuch der Mathematik 8. öbv&hpt, Wien.

[40] Reichel, Hans-Christian, Erich Windischbacher, Robert Resel, Volkmar Lautscham und Stefan Götz (1997): Wege zur Mathematik - Anregungen und Vertiefungen. öbv&hpt, Wien.

[41] Resel, Robert (1999): Ausbaumöglichkeiten der Oberstufen-Schulmathematik. Diplomarbeit, Universität Wien.

[42] Resel, Robert (2014): Reise zum Mittelpunkt der Mathematik. Logos, Berlin.

[43] Rudin, Walter (1998): Analysis. Oldenbourg, München/Wien.

[44] Sachs, Lothar (1974^4): Angewandte Statistik. Springer, Berlin.

[45] Schark, Rainer (1992): Konstanten in der Mathematik - variabel betrachtet. Harri Deutsch, Frankfurt.

[46] Scheid, Harald (1997): Folgen und Funktionen. Spektrum, Heidelberg.

[47] Schupp, Hans und Heinz Dabrock (1995): Höhere Kurven. BI-Verlag, Mannheim.

[48] Stillwell, John (2002): Mathematics and its history. Springer, Berlin.

[49] Szirucsek, Eduard, Gerhard Dinauer, Hubert Unfried und Herwig Schatzl (1994^3): Mathematik 7. öbv&hpt, Wien.

[50] Tittmann, Peter (2000): Kombinatorik. Spektrum, Heidelberg.

[51] Wells, David (1991): The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry. Penguin books, London.

[52] Wischounig, Veronika (2000): Analytische Darstellung ebener algebraischer Kurven. Diplomarbeit an der Technischen Universität Wien.

[53] Wunderlich, Walter (1966): Darstellende Geometrie I. BI-Verlag, Mannheim.