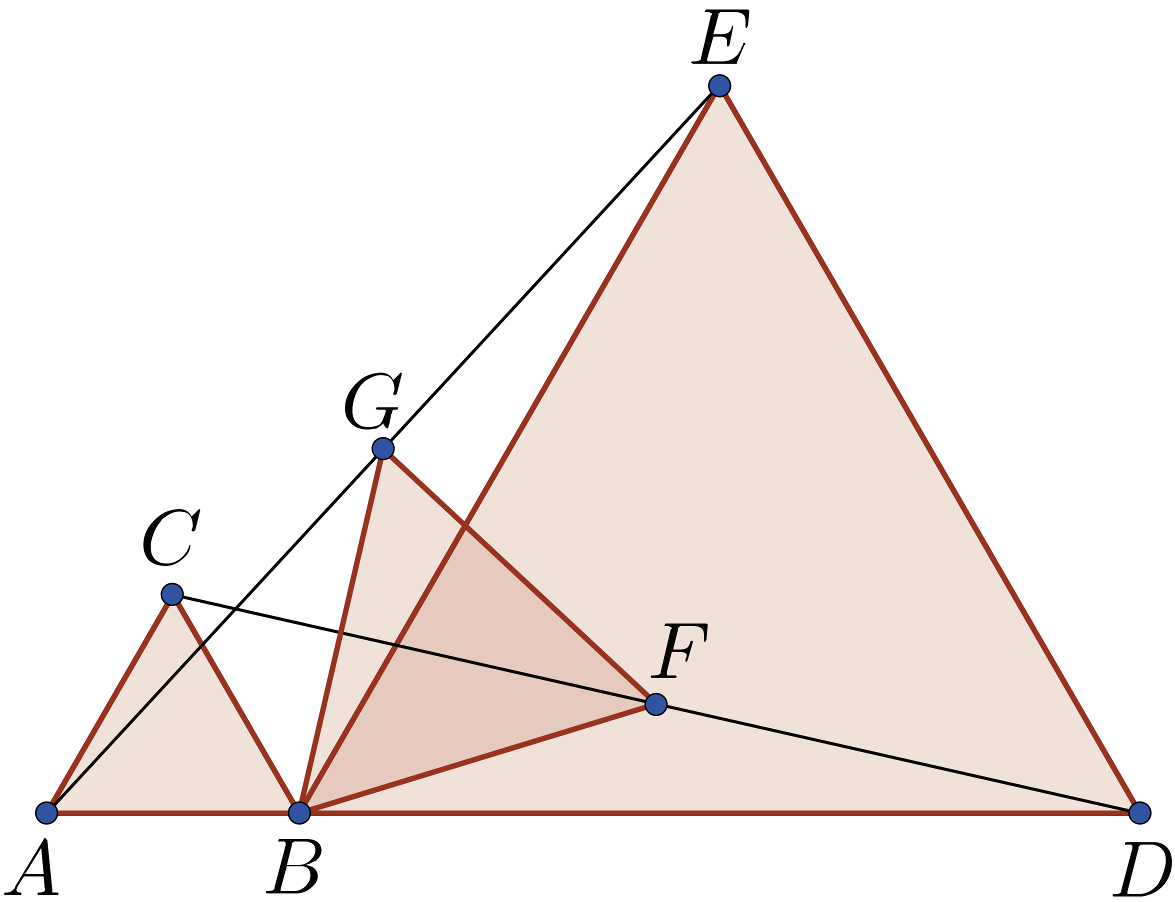
4.8.2 Aus zwei mach drei (Dreiecke)

In diesem Abschnitt beweisen wir einen besonders hübschen Satz (welcher in [45], S. 29 und S. 33 abbildungsgeometrisch bewiesen wird), der in der unteren Abbildung visualisiert



wird: Ausgehend von zwei gleichseitigen Dreiecken mit einem gemeinsamen Eckpunkt sowie einer gemeinsamen Trägergerade jener Seiten, welche gerade diesen Eckpunkt enthalten, wird ein neues Dreieck konstruiert, welches wiederum gleichseitig ist, wobei wir über diese Eigenschaft hinaus auch noch eine wahrhaft schöne Formel herleiten, die es ermöglicht, ausgehend von den Seitenlängen der Ausgangsdreiecke die Seitenlänge des neuen Dreiecks zu berechnen.

Dazu koordinatisieren wir die Ausgangsdreiecke ΔABC und ΔBDE via $A(-4a|0)$, $B(0|0)$, $C(-2a|2\sqrt{3}\cdot a)$, $D(4b|0)$ sowie $E(2b|2\sqrt{3}\cdot b)$ und erhalten die via

$$F := M_{CD} \quad \text{und} \quad G := M_{AE}$$

definierten neuen Punkte F und G somit durch $F(-a+2b|\sqrt{3}\cdot a)$ sowie $G(-2a+b|\sqrt{3}\cdot b)$.

Daraus resultiert

$$\overline{BF} = \left|\begin{pmatrix} -a+2b \\ \sqrt{3}\cdot a \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2-4ab+4b^2+3a^2} = 2\cdot\sqrt{a^2-ab+b^2},$$

$$\overline{BG} = \left|\begin{pmatrix} -2a+b \\ \sqrt{3}\cdot b \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4a^2-4ab+b^2+3b^2} = 2\cdot\sqrt{a^2-ab+b^2}$$

sowie

$$\overline{FG} = \left| \begin{pmatrix} a+b \\ \sqrt{3}\cdot(a-b) \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a^2+2ab+b^2+3a^2-6ab+3b^2} = 2\cdot\sqrt{a^2-ab+b^2},$$

woraus $\overline{BF} = \overline{BG} = \overline{FG}$ folgt, $\square$.

$\boxed{\text{Bemerkung:}}$ Wegen der Seitenlängendarstellungen

$$s_1 := \ell_{\Delta ABC} = 4a \quad \text{und} \quad s_2 := \ell_{\Delta BDE} = 4b$$

der beiden Ausgangsdreiecke ΔABC und ΔBDE kann man die Seitenlänge $s_3 := \ell_{\Delta BFG}$ des aus ihnen hervorgehenden Dreiecks ΔBFG aufgrund der obigen Berechnungen von $\overline{BF}$, $\overline{BG}$ und $\overline{FG}$ via

$$s_3 = 2\cdot\sqrt{\frac{{s_1}^2}{16} - \frac{s_1 s_2}{16} + \frac{{s_2}^2}{16}} \quad \text{bzw.} \quad s_3 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{{s_1}^2 - s_1 s_2 + {s_2}^2}$$

resp. wegen der Formel $u^3 + v^3 = (u+v)\cdot(u^2 - uv + v^2)$ schließlich via

$$s_3 = \sqrt{\frac{{s_1}^3 + {s_2}^3}{s_1 + s_2}}$$

darstellen.

$\boxed{\text{Übungsaufgabe } \mathit{1} \text{ für den werten L}\overset{\text{E}}{\text{Ö}}\text{ser:}}$ Man beweise für den via $\varphi := \measuredangle GBC$ definierten Winkel φ die schöne Darstellung

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(a+b)^3}{a^3+b^3}}.$$

$\boxed{\text{Übungsaufgabe } \mathit{2} \text{ für den werten L}\overset{\text{E}}{\text{Ö}}\text{ser:}}$ Für den via $\psi := \measuredangle FBE$ definierten Winkel ψ beweise man die Kongruenz $\psi \cong \varphi$.

$\boxed{\text{Übungsaufgabe } \mathit{3} \text{ für den werten L}\overset{\text{E}}{\text{Ö}}\text{ser:}}$ Man beweise, dass die Geraden g_{AE} und g_{CD} unabhängig von den Seitenlängen s_1 und s_2 stets die gleichen Winkel (nämlich $60°$ und $120°$) einschließen.

$\boxed{\text{Übungsaufgabe } \mathit{4} \text{ für den werten L}\overset{\text{E}}{\text{Ö}}\text{ser:}}$ Man beweise ohne Verwendung der Formel aus Übungsaufgabe *1* und damit ohne Gebrauch der Beschränktheit der reellen Cosinusfunktion, dass

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{a^3+b^3}} \le 2$$

gilt, indem man letztere Ungleichung auf die zu ihr äquivalente Ungleichung

$$(a-b)^2\cdot(a+b) \ge 0$$

zurückführe.