49. Österreichische Mathematische Olympiade

Gemischter Vorbereitungskurs

Kursleiter: Dr. Robert Resel

Schuljahr: 2017/18

Kursort: AHS Heustadelgasse

Übungsbeispiele zu Ungleichungen

1. Zum Einstimmen: a und b seien die Katheten, c sei die Hypotenuse eines nicht-entarteten rechtwinkligen Δs. Beweise die Ungleichung $\dfrac{a^2}{b^2+c^2}+\dfrac{b^2}{a^2+c^2}<\dfrac{c^2}{a^2+b^2}$.

2. Zum weiteren Aufwärmen: a und b seien reelle Zahlen mit $0<a<b$.

   $$\text{Beweise: } \frac{2a}{a+2b}+\frac{2b}{b+2a}<\frac{2b}{b-a}$$

3. **J e d e n f a l l s :** a und b seien reelle Zahlen mit $0<a<b$.

   $$\text{Beweise: } \frac{4a}{5a+3b}+\frac{4b}{3a+5b}\geq\frac{2a+b}{a+2b}$$

   Untersuche auch den Fall der Gleichheit!

4. Heavy: Beweise für $x\in\mathbb{R}^+$, $y\in\mathbb{R}^+$ und $z\in\mathbb{R}$ die Ungleichung

   $$\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{2x+y}\geq\frac{1}{ax+by} \quad \text{mit} \quad a=2z^2+(z+1)^2 \quad \text{und} \quad b=z^2+2(z+1)^2.$$

   Untersuche auch den Fall der Gleichheit!

5. a und b seien die Katheten, c sei die Hypotenuse eines nicht-entarteten rechtwinkligen Dreiecks. Beweise die Ungleichung $a(b+c)+b(a+c)<2c(a+b)$ auf zwei Arten, nämlich

   - (I) mit

   bzw.

   - (II) ohne

   Verwendung des harmonischen Mittels (Was folgt aus (I)?).

6. a und b seien die Katheten, c sei die Hypotenuse eines nicht-entarteten rechtwinkligen Dreiecks. Beweise die Ungleichung $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}>\dfrac{c}{a+b}$.

Wien, im Mai 2018. Dr. Robert Resel, eh.