- $\boxed{\text{Ungleichung } \mathit{3}:}$ a und b seien die Katheten, c sei die Hypotenuse eines nicht-entarteten rechtwinkligen Dreiecks. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} > \frac{c}{a+b} \quad (3.1).$$

$\boxed{\text{Lösungsvariante:}}$ Multiplikation von (3.1) mit dem Produkt aller drei Nenner führt auf

$$(3.1) \quad \Leftrightarrow \quad a(a+c)(a+b) + b(b+c)(a+b) > c(a+c)(b+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)\left(a^2 + ac + b^2 + bc\right) > c\left(ab + bc + ac + c^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad (a+b)\left(c^2 + ac + bc\right) > c\left(ab + bc + ac + c^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad c(a+b)(c+a+b) > c\left(ab + bc + ac + c^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad (a+b)(c+a+b) > ab + bc + ac + c^2$$
$$\Leftrightarrow \quad ac + a^2 + ab + bc + ab + b^2 > ab + bc + ac + c^2$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 + ab + bc + ab + b^2 > ab + bc + c^2$$
$$\Leftrightarrow \quad c^2 + ab > c^2 \quad \Leftrightarrow \quad ab > 0, \ \square$$

- $\boxed{\text{Ungleichung } \mathit{4}:}$ a und b seien die Katheten, c sei die Hypotenuse eines nicht-entarteten rechtwinkligen Dreiecks. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} > \frac{c^2}{a^2+b^2} \quad (4.1).$$

$\boxed{\text{Lösungsvariante:}}$ Im Gegensatz zu (3.1) können wir (4.1) direkt unter Verwendung des Lehrsatzes von Pythagoras via

$$(4.1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{a^2+2b^2} + \frac{b^2}{2a^2+b^2} > 1 \quad (4.2)$$

anschreiben und nun durch Multiplikation mit dem Produkt der beiden Nenner auf die äquivalente Form

$$(4.2) \quad \Leftrightarrow \quad a^2\left(2a^2 + b^2\right) + b^2\left(a^2 + 2b^2\right) > \left(a^2 + 2b^2\right)\left(2a^2 + b^2\right) \quad (4.3)$$

bringen, wodurch via

$$(4.2) \quad \Leftrightarrow \quad 2a^4 + a^2b^2 + a^2b^2 + 2b^4 > 2a^4 + 5a^2b^2 + 2b^4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > 3a^2b^2$$

alles bewiesen ist.

- $\boxed{\text{Ungleichung } \mathit{5}:}$ a und b seien die Katheten, c sei die Hypotenuse eines nicht-entarteten rechtwinkligen Dreiecks. Man beweise die Ungleichung

$$a(b+c) + b(a+c) < 2c(a+b) \quad (5.1)$$

auf zwei Arten, nämlich

– (I) mit

bzw.

– (II) ohne

Verwendung des harmonischen Mittels.

$\boxed{\text{Lösungsvariante:}}$ Wir formen (5.1) via

$$(5.1) \quad \Leftrightarrow \quad ab+ac+ab+bc < 2ac+2bc \quad \Leftrightarrow \quad 2ab < ac+bc \quad \Leftrightarrow \quad 2ab < c(a+b) \quad (5.2)$$

um, was wir nun

– (I) via

$$(5.2) \quad \Leftrightarrow \quad c > \frac{2ab}{a+b} \quad (5.3)$$

beweisen, indem wir verwenden, dass (5.3) gerade aussagt, dass c größer als das harmonische Mittel $m_h(a,b)$ von a und b ist. Da nun $a \leq m_h(a,b) \leq b$ gilt, hat dies $c > \max\{a,b\}$ zur Folge, was für die Hypotenuse als längste Seite jedes nicht-entarteten rechtwinkligen Dreiecks sicher zutrifft, womit alles gezeigt ist.

  * $\boxed{\text{Bemerkung:}}$ Aus (I) folgt demnach, dass (5.1) auch für spitz- und stumpfwinklige Dreiecke gilt, sofern c die längste Dreiecksseite ist.

– (II) via

$$(5.2) \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2b^2 < c^2(a+b)^2 \quad (5.4)$$

beweisen, indem wir auf (5.4) den Lehrsatz des Pythagoras anwenden ...

$$(5.4) \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2b^2 < \left(a^2+b^2\right)\left(a^2+2ab+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2b^2 < \left(a^2+b^2\right)^2+2ab\left(a^2+b^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2b^2 < a^4+2a^2b^2+b^4+2ab\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < a^4-2a^2b^2+b^4+2ab\left(a^2+b^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \left(a^2-b^2\right)^2+2ab\left(a^2+b^2\right)$$

..., womit auch alles gezeigt ist.

- $\boxed{\text{Ungleichung } 6\text{:}}$ a und b seien reelle Zahlen mit $0 < a < b$. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{2a}{a+2b} + \frac{2b}{b+2a} < \frac{2b}{b-a} \quad (6.1).$$

$\boxed{\text{Lösungsvariante:}}$ Wir formen (6.1) via Multiplikation mit den drei Nennern um:

$$(6.1) \quad \Leftrightarrow \quad 2a(b+2a)(b-a)+2b(2b+a)(b-a) < 2b(a+2b)(2a+b)$$

$$\Leftrightarrow \quad (b-a)\left(2ab+4a^2+4b^2+2ab\right) < 2b\left(2a^2+5ab+2b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < 4(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)+2b\left(2a^2+5ab+2b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < 2\left(a^3-b^3\right)+2a^2b+5ab^2+2b^3 \quad \Leftrightarrow \quad 2a^3+2a^2b+5ab^2 > 0, \ \square$$

- $\boxed{\text{Ungleichung 7:}}$ Man beweise für $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}^+$ und $z \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{x+2y} + \frac{1}{2x+y} \geq \frac{1}{ax+by} \quad \text{mit} \quad a = 2z^2 + (z+1)^2 \quad \text{und} \quad b = z^2 + 2(z+1)^2 \quad (7.1)$$

und untersuche auch den Fall der Gleichheit.

$\boxed{\text{Lösungsvariante:}}$ Wir formen (7.1) via Multiplikation mit den drei Nennern um:

$$(7.1) \quad \Leftrightarrow \quad (2x+y)(ax+by) + (x+2y)(ax+by) \geq (x+2y)(2x+y)$$

$$\Leftrightarrow \quad (ax+by)(3x+3y) \geq 2x^2 + 5xy + 2y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (3a-2)x^2 + (3a+3b-5)xy + (3b-2)y^2 \geq 0 \quad (7.2)$$

$\Downarrow$ $(a = 2z^2 + (z+1)^2 = 3z^2 + 2z + 1$ und $b = z^2 + 2(z+1)^2 = 3z^2 + 4z + 2)$

$$(7.2) \quad \Leftrightarrow \quad \left(9z^2 + 6z + 1\right) x^2 + \left(18z^2 + 18z + 4\right) xy + \left(9z^2 + 12z + 4\right) y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3z+1)^2 x^2 + 2\left(9z^2 + 9z + 2\right) xy + (3z+2)^2 y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 \cdot \left[(3z+1)^2 \cdot \frac{x^2}{y^2} + 2\left(9z^2 + 9z + 2\right) \cdot \frac{x}{y} + (3z+2)^2\right] \geq 0$$

$\Updownarrow$ $\left(k := \dfrac{x}{y}\right)$

$$(3z+1)^2 k^2 + 2\left(9z^2 + 9z + 2\right) k + (3z+2)^2 \geq 0$$

$\Updownarrow$ $\left(\text{Nota bene: } (3z+1)(3z+2) = 9z^2 + 9z + 2\right)$

$$[(3z+1)\, k + (3z+2)]^2 \geq 0$$

mit Gleichheit

$$\Leftrightarrow \quad k = -\frac{3z+2}{3z+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} = -\left(1 + \frac{1}{3z+1}\right),$$

was

$$1 + \frac{1}{3z+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3z+1} < -1$$

$\Updownarrow$ $\left(3z + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad z < -\dfrac{1}{3}\right))$

$$1 > -3z - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3z > -2 \quad \Leftrightarrow \quad z > -\frac{2}{3},$$

also insgesamt

$$-\frac{2}{3} < z < -\frac{1}{3}$$

bedingt, womit auch das (in diesem Fall durchaus komplexe) Szenario der Gleichheit erledigt ist, welches demnach genau dann vorliegt, wenn für ein z aus dem Intervall $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ die Gleichung $x + \dfrac{3z+2}{3z+1} \cdot y = 0$ gilt $\left(\text{Bsp.: } x = y,\ a = b = \dfrac{3}{4}\right)$.