- $\boxed{\text{Ungleichung 10:}}$ Zwischen dem via

$$\left\{\begin{array}{l} m_q(a,b):=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\ m_a(a,b):=\frac{a+b}{2} \\ m_g(a,b):=\sqrt{ab} \\ m_h(a,b):=\frac{2ab}{a+b}\end{array}\right\} \text{ definierten } \left\{\begin{array}{c}\text{quadratischen}\\ \text{arithmetischen}\\ \text{geometrischen}\\ \text{harmonischen}\end{array}\right\} \text{ Mittel}$$

der positiven reellen Zahlen a und b besteht neben der bekannten Ungleichungskette

$$m_h(a,b)\le m_g(a,b)\le m_a(a,b)\le m_q(a,b)$$

(welche wir nebst der Einführung dieser vier Mittel in B7, S. ... bewiesen haben) auch die Ungleichung

$$m_q(a,b)\cdot m_h(a,b)\ge m_a(a,b)\cdot m_g(a,b) \quad (*),$$

welche wir nun beweisen werden:

$$(*) \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\cdot\frac{2ab}{a+b}\le\frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{ab} \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{2ab(a^2+b^2)}\le(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow\; 8ab(a^2+b^2)\le(a+b)^4 \;\Leftrightarrow\; 8a^3b+8ab^3\le a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$\Leftrightarrow\; 0\le a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4 \;\Leftrightarrow\; 0\le(a-b)^4,\ \square$$

- $\boxed{\text{Ungleichung 11:}}$ Für $x>-\frac{1}{4}$ sowie $y>\frac{1}{4}$ beweisen wir die Ungleichung

$$\frac{1}{4x+1}+\frac{1}{4y-1}\ge\frac{1}{x+y} \quad (*).$$

Nundenn:

$$(*) \;\Leftrightarrow\; (x+y)(4x+4y)\ge(4x+1)(4y-1) \;\Leftrightarrow\; 4(x+y)^2\ge 16xy-4x+4y-1$$

$$\Leftrightarrow\; 4x^2+8xy+4y^2\ge 16xy-4x+4y-1 \;\Leftrightarrow\; 4x^2-8xy+4y^2\ge -4x+4y-1$$

$$\Leftrightarrow\; 4(x^2-2xy+y^2)+4(x-y)+1\ge 0 \;\Leftrightarrow\; 4(x-y)^2+4(x-y)+1\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\; [2(x-y)+1]^2\ge 0,\ \square$$

Dabei tritt der Fall der Gleichheit genau dann, wenn

$$2(x-y)+1=0 \Leftrightarrow\; 2x-2y=-1 \;\Leftrightarrow\; y=x+\frac{1}{2}$$

gilt, was sich durch Einsetzen in $(*)$ via

$$\frac{1}{4x+1}+\frac{1}{4x+2-1}=\frac{1}{2x+\frac{1}{2}} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4x+1}+\frac{1}{4x+1}=\frac{2}{4x+1}$$

bestätigt.

- $\boxed{\text{Ungleichung 12:}}$ Für $x\in\mathbb{R}^+$ sowie $y\in\mathbb{R}^+$ mit $x+y=2$ beweisen wir die Ungleichung

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1}\ge 1 \quad (*).$$

Wegen

$$y=2-x$$

gilt

$$(*) \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{2-x+1}+\frac{2-x}{x+1}\ge 1 \;\Leftrightarrow\; \Leftrightarrow\; \frac{x}{3-x}+\frac{2-x}{1+x}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow\; x(1+x)+(2-x)(3-x)\ge(3-x)(1+x) \;\Leftrightarrow\; x+x^2+6-5x+x^2\ge 3+2x-x^2$$

$$\Leftrightarrow\; 3x^2-6x+3\ge 0 \;\Leftrightarrow\; 3(x^2-2x+1)\ge 0 \;\Leftrightarrow\; 3(x-1)^2\ge 0,\ \square$$

Dabei tritt der Fall der Gleichheit genau dann, wenn

$$x-1=0 \Leftrightarrow\; x=1$$

gilt, was sich durch Einsetzen in $(*)$ via

$$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+1}=1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

bestätigt.

- $\boxed{\text{Ungleichung 13:}}$ Für $x\in\mathbb{R}$ sowie $y\in\mathbb{R}$ beweisen wir die Ungleichung

$$x^4-4xy^3+3y^4\ge 0 \quad (*).$$

Nundenn:

$$(*) \;\Leftrightarrow\; x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4+2y^4-6x^2y^2+4x^3y\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\; (x-y)^4+2y(y^3-3x^2y+2x^3)\ge 0 \;\Leftrightarrow\; (y-x)^4+2y(y-x)(y^2+xy-2x^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\; (y-x)^4+2y(y-x)(y-x)(y+2x)\ge 0 \;\Leftrightarrow\; (y-x)^4+2y(y-x)^2(y+2x)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\; (y-x)^2[(y-x)^2+2y(y+2x)]\ge 0 \;\Leftrightarrow\; (y-x)^2(3y^2+2xy+x^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\; (y-x)^2[x^2+2xy+y^2+2y^2]\ge 0 \;\Leftrightarrow\; (x-y)^2[(x+y)^2+2y^2]\ge 0,\ \square$$

Dabei tritt der Fall der Gleichheit genau dann, wenn

$$x-y=0 \Leftrightarrow\; x=y=z$$

gilt, was sich durch Einsetzen in $(*)$ via

$$z^4-4z^4+3z^4=0$$

bestätigt.

- $\boxed{\text{Ungleichung 14:}}$ Sind a und b die Kathetenlängen sowie c die Hypotenusenlänge eines rechtwinkligen Dreiecks, so gilt die Ungleichung

$$a+b\le c\sqrt{2} \quad (*),$$

was wir auf zweierlei Art beweisen:

- **Lösungsvariante 1:** Wir quadrieren $(*)$ und verwenden den Lehrsatz des Pythagoras:

$$(*) \;\Leftrightarrow\; a^2+2ab+b^2\le 2c^2 \;\Leftrightarrow\; c^2+2ab\le 2c^2 \;\Leftrightarrow\; 2ab\le c^2$$

$$\Leftrightarrow\; 0\le c^2-2ab \;\Leftrightarrow\; 0\le a^2+b^2-2ab \;\Leftrightarrow\; 0\le(a-b)^2,\ \square$$

Dabei tritt der Fall der Gleichheit genau dann, wenn

$$a-b=0 \Leftrightarrow\; a=b=z$$

gilt, was sich durch Einsetzen in $(*)$ unter Verwendung des Lehrsatzes von Pythagoras via

$$z+z=\sqrt{z^2+z^2}=z\sqrt{2}$$

bestätigt.

- **Lösungsvariante 2:** Wir verwenden die Parametrisierung $a=u^2-v^2$, $b=2uv$ und $c=u^2+v^2$ für pythagoreische Tripel, was

$$(*) \;\Leftrightarrow\; u^2-v^2+2uv\le u^2\sqrt{2}+v^2\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; 0\le\left(\sqrt{2}-1\right)u^2-2uv+\left(\sqrt{2}+1\right)v^2$$

$$\left[\text{Nota bene: } \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}=\sqrt{2-1}=\sqrt{1}=1 \quad (**)\right]$$

$$\Leftrightarrow\; 0\le\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot u-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot v\right)^2,\ \square$$

Dabei tritt der Fall der Gleichheit genau dann, wenn

$$\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot u-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot v=0 \Leftrightarrow\; \sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot u=\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot v$$

(Man beachte wiederum $(**)$!)

$$\Leftrightarrow\; u=\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot v$$

gilt, was sich via

$$a=\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^2-1\right]\cdot v^2=\left(3+2\cdot\sqrt{2}-1\right)\cdot v^2=\left(2+2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot v^2,$$

$$b=2\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot v^2=\left(2+2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot v^2$$

(wobei sich dadurch $a=b$ auf andere Weise als in der ersten Lösungvariante zeigt) und

$$c=\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^2+1\right]\cdot v^2=\left(3+2\cdot\sqrt{2}+1\right)\cdot v^2=\left(4+2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot v^2,$$

durch Einsetzen in $(*)$ mit

$$\left(4+4\cdot\sqrt{2}\right)\cdot v^2=\sqrt{2}\cdot\left(4+2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot v^2$$

bestätigt, $\square$.