$$\mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{c} \cdot \frac{ab}{c} = \frac{ab^3}{c^2}$$

$$\mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_6 + \mathcal{A}_7 = \frac{3}{2} \cdot ab$$

Vor der Berechnung von $\mathcal{A}_8$ benötigen wir noch die Kathetenlängen:

* Aufgrund der Kongruenz der Dreiecke ΔHCG und ΔBCA ist $\overline{AM}$ gleich der doppelten Höhe h auf die Hypotenuse der beiden Dreiecke, welche sich aus der Gleichung $ab = ch$ (zwei Arten der Flächeninhaltsberechnung!) via $h = \frac{ab}{c}$ ergibt.
* $\overline{HM}$ ergibt sich aus folgender Gleichung:

$$\overline{HM} + \overline{HG} + \overline{GL} = \overline{JN} + \overline{NE} + \overline{EK}$$

$$\Rightarrow \overline{HM} = c + \frac{ab - a^2}{c} + \frac{b^2}{c} - \frac{ab}{c} - c = \frac{b^2 - a^2}{c}$$

Somit gilt

$$\mathcal{A}_8 = \frac{ab}{c} \cdot \frac{b^2 - a^2}{c} = \frac{ab^3 - a^3b}{c^2}$$

und schließlich

$$\mathcal{A}_9 = b^2.$$

Nun vergleichen wir $\sum_{k=1}^{9} \mathcal{A}_k$ mit μ:

$$\frac{2ab^3 - a^3b + b^4}{c^2} + ab + b^2 = b^2 - ab + \frac{ab^3 - 2a^2b^2 + a^3b}{2c^2} + \frac{ab^3}{c^2} + \frac{3}{2} \cdot ab + \frac{ab^3 - a^3b}{c^2} + b^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{b^4}{c^2} + \frac{1}{2} \cdot ab = b^2 + \frac{ab^3 - 2a^2b^2 + a^3b}{2c^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2b^4 + abc^2 = 2b^2c^2 + ab^3 - 2a^2b^2 + a^3b$$

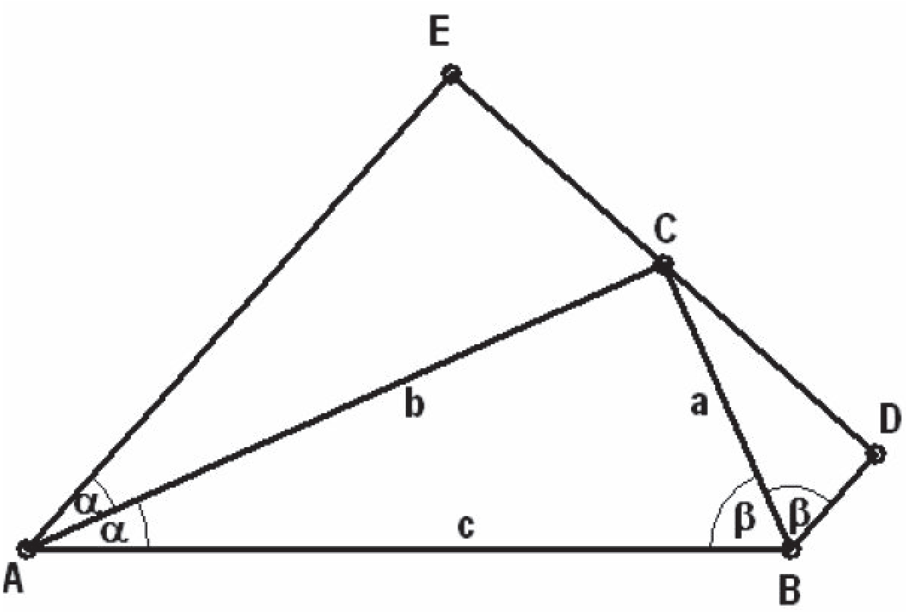
$$\Rightarrow \quad 2b^2(b^2 + a^2 - c^2) = ab(b^2 + a^2 - c^2) \quad \Leftrightarrow \quad b(2b - a)(b^2 + a^2 - c^2) = 0$$

Da $a = 2b$ i.A. nicht gelten wird, folgt daraus zwingend $b^2 + a^2 - c^2 = 0$ bzw.

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

womit der erste Beweis des Lehrsatzes von PYTHAGORAS abgeschlossen ist.

Zum zweiten Beweis betrachten wir in der nachfolgenden Abbildung die zueinander ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke ΔABC, ΔCBD und ΔABE. Da die Hypotenusenlängen der Dreiecke ΔCBD und ΔABC zueinander im Verhältnis $a : c$ stehen, gilt dies auch für deren Kathetenpaare, woraus $\overline{BD} = \frac{a^2}{c}$ und $\overline{CD} = \frac{ab}{c}$ folgt. Durch eine analoge Überlegung ergeben sich dann die Längen $\overline{CE} = \frac{ab}{c}$ und $\overline{AE} = \frac{b^2}{c}$. Da $\measuredangle AEC$ und $\measuredangle BDE$ rechte Winkel sind, handelt es sich beim Viereck $ABDE$ folglich um ein Trapez, für dessen Flächeninhalt F_{TR} dann einerseits $F_{TR} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c}\right) \cdot \frac{2ab}{c} = \frac{ab(a^2+b^2)}{c^2}$ gilt. Andererseits gilt aber auch $F_{TR} = F_{\Delta ABC} + F_{\Delta CBD} + F_{\Delta ACE}$, ergo $F_{TR} = \frac{ab}{2} + \frac{a^3b}{2c^2} + \frac{ab^3}{2c^2} = \frac{ab}{2c^2} \cdot (c^2 + a^2 + b^2)$. Gleichsetzen der rechten Seiten der beiden Darstellungen für F_{TR} liefert schließlich



$$\frac{ab}{2c^2}\cdot(c^2+a^2+b^2)=$$

$$=\frac{ab}{c^2}\cdot(a^2+b^2),$$

was zu

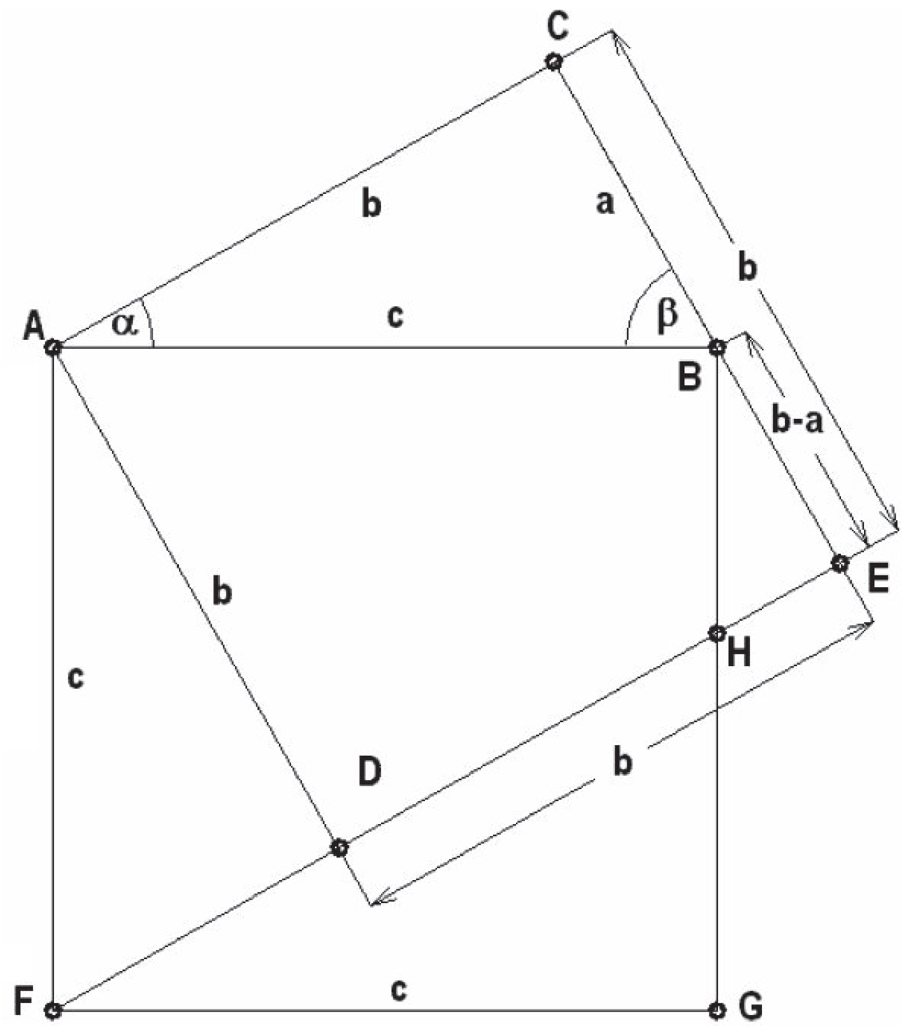
$$c^2+a^2+b^2=$$

$$=2a^2+2b^2$$

bzw.

$$c^2=a^2+b^2$$

äquivalent ist, woraus sich die Aussage des Lehrsatzes von PYTHAGORAS ergibt.



Für den dritten Beweis wurde in der linken Abbildung sowohl über der Kathete AC als auch der Hypotenuse AB des rechtwinkligen Dreiecks ΔABC jeweils ein Quadrat $ADEC$ bzw. $AFGB$ errichtet. O. B. d. A. nehmen wir im Folgenden $a<b$ (passend zur Figur) an. Um zu zeigen, dass $a^2+b^2=c^2$ gilt, brauchen wir im Wesentlichen nicht mehr zu tun, als die Länge der Strecke DH auf zwei Arten zu berechnen. Wegen $\measuredangle BHE=\measuredangle ABC$ sowie $\measuredangle BEH=90°$ gilt $\Delta BHE \sim \Delta ABC$, wobei entsprechende Streckenlängen zueinander im Verhältnis $\frac{\overline{BE}}{\overline{AC}}=\frac{b-a}{b}$ stehen. Daraus ergibt sich unmittelbar $\overline{HE}=\frac{a}{b}\cdot(b-a)$ und somit $\boxed{\overline{DH}=b-\frac{a}{b}\cdot(b-a)\ (1)}$.

Soweit, so gut! Jetzt berechnen wir $\overline{DH}$ auf eine zweite Art und Weise:

Da $\Delta AFD \cong \Delta ABC$ und ferner $\measuredangle ADF = \measuredangle ADE = 90°$ (im ersten Fall wegen der Kongreunz der Dreiecke, im zweiten Fall, weil $ADEC$ ein Quadrat ist) gilt, liegen die Punkte F, D und E und somit auch F, D und H kollinear, woraus wegen $\measuredangle FHG = \measuredangle BHE$ auch $\Delta FHG \sim \Delta ABC$ folgt, wobei entsprechende Streckenlängen zueinander im Verhältnis $\frac{\overline{FG}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b}$ stehen. Daraus ergibt sich unmittelbar $\overline{FH} = \frac{c^2}{b}$, woraus aus der Kollinearität der Punkte F, D und H sofort $\boxed{\overline{DH} = \frac{c^2}{b} - a \ (2)}$ folgt.

Durch Gleichsetzen von (1) und (2) folgt

$$b - \frac{a}{b} \cdot (b - a) = \frac{c^2}{b} - a \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - ab + a^2 = c^2 - ab \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + c^2 = a^2, \ \Box$$

Übung für den werten L$\overset{\text{e}}{\text{ö}}$ser: Ergänze in der Abbildung des zweiten Beweises des Lehrsatzes von Pythagoras das Dreieck ΔABC durch Ziehen einer Parallele zur Hypotenuse durch C zu einem Rechteck und verfahre mit diesem Rechteck wie mit dem Trapez in zweiten Beweis!

Literaturhinweis für den werten L$\overset{\text{e}}{\text{ö}}$ser: Sehr zum empfehlende Bücher zum Themenkreis "Lehrsatz des Pythagoras" (inkl. historischer Aspekte) sind besonders [9], [43] sowie [45]!

2.24 Der Peripheriewinkelsatz

Betrachten wir in der Ebene eine feste Strecke AB, so wollen wir uns die Frage (der Herausforderung) stellen, wo alle Punkte X liegen (alle Punkte X zu bestimmen), von denen aus AB unter konstantem Winkel $0° < \varphi < 180°$ erscheint.

Dazu übersetzen wir dieses *geometrische Problem* durch *Algebraisierung* in die Sprache der *Analytischen Geometrie*, indem wir die Endpunkte der Strecke AB via $A(0|0)$ und $B(2a|0)$ koordinatisieren sowie ausgehend vom Ansatz $X(x|y)$ die Vektoren

$$\overrightarrow{XA} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{XB} = \begin{pmatrix} 2a - x \\ -y \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} x - 2a \\ y \end{pmatrix}$$

in die Vektor-Winkel-Formel einsetzen:

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2a \\ y \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} x - 2a \\ y \end{pmatrix}\right|} = \frac{x^2 - 2ax + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - 4ax + 4a^2}}$$

Weitere Umformungen (wobei wir vorläufig $C := \cos\varphi$ setzen) führen auf